Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018
Rattrapage Contrôle Continue Algèbre 1 - Corrigé 13/12/2017

<u>Exercice1</u>: Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies:
1- 221 est un multiple de 13 et 2 divise 221
2- 221 est un multiple de 13 ou 2 divise 221
3- $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\ \ |a| < \varepsilon$

<u>Solution:</u> 1- Faux: $13 * 17 = 221$ vraie *et* 2 divise 221 fausse. 1 point
2- Vrai: $13 * 17 = 221$ vraie *ou* 2 divise 221 fausse. 1 point
3- $\overline{\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\ \ |a| < \varepsilon} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0\ \ |a| \geq \varepsilon$. L'assertion $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0\ \ |a| \geq \varepsilon$ est fausse car pour $a = 0$ il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $0 \geq \varepsilon$.
Donc $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\ \ |a| < \varepsilon$ est vraie. 3 points

<u>Exercice2:</u> Soit $n > 0$. Montrer par l'absurde que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

<u>Solution:</u> Soit $n > 0$. Supposons que n est le carré d'un entier et que $2n$ est aussi le carré d'un entier. 2 points
n étant le carré d'un entier veut dire qu'il existe k entier non nul tel que $n = k^2$. 1 point
$2n$ étant le carré d'un entier veut dire qu'il existe p entier non nul tel que $2n = p^2$. D'ou $2k^2 = p^2$. 1 point
Alors $\sqrt{2} = \dfrac{p}{k}$. Ceci est impossible puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. 2 points

<u>Exercice3:</u> Soient les deux ensembles:
$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 4x - y = 1\right\}$ et $C = \{(t + 1, 4t + 3),\ \ t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $A = C$.

<u>Solution:</u> Montrons que $C \subset A$. Soit $(x, y) \in C$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$.
Soit $4x - y = 4(t + 1) - 4t - 3 = 1$, donc $(x, y) \in A$. 2 points
Montrons que $A \subset C$. Soit $(x, y) \in A$ avec $4x - y = 1$. Donc $(x, y) = (x, 4x - 1)$.
En remplaçant x par $t + 1$, on aura $(x, y) = (x, 4x - 1) = (t + 1, 4t + 3) \in C$. 2 points

<u>Exercice4:</u> Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à chaque couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le couple $(x + y, xy)$ de $\mathbb{R}^2$.
1- Montrer que $f(x, y) = f(y, x)$.
2- Déterminer l'image réciproque de l'ensemble $\{(0, 1)\}$.
3- f est-elle injective? surjective?

Solution: 1- On remarque aisément que $f(x,y)=f(y,x)$. 1 point
2- $f^{-1}(\{(0,1)\}) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x+y,xy)=(0,1)\right\}$
$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } x=-y \ \ et \ -y^2=1\right\}.$
Or $-y^2=1$ est impossible dans $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(\{(0,1)\})=\varnothing$. 2 points
3- Selon la question 1): $f(1,2)=f(2,1)$ mais $(1,2)\neq(2,1)$ donc f n'est pas injective. 1 point
Selon la question 2): $(0,1)$ n'a pas d'antécédents dans $\mathbb{R}^2$ donc f n'est pas surjective. 1 point