Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1: Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé. On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= 2 - \dfrac{8}{9u_n}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. En calculant u_1,u_2 et u_3, remarquez que, pour certaines valeurs de a, cette suite n'est pas définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'examiner le cas général.
2. Posons $w_n = \dfrac{6u_n - 8}{3u_n - 2}$. Montrez que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Exprimez à l'aide de n et w_0 son terme général.
3. En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n et a.
4. Retour à la première question. Déterminez les valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) n'est définie que pour un nombre fini de termes. Lesquels ?

Exercice 2: Calculez, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}.$$

Dans l'affirmative, donnez-en une démonstration en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Exercice 3: Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |a| < 1$. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{2 - u_n}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrez, par récurrence, que u_n est bien défini pour tout entier n et que $|u_n| < 1$. Montrez ensuite que la suite $(|u_n|)$ est décroissante. En majorant convenablement $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$, montrez que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0. Conclure pour la convergence de (u_n). Aurait-on pu obtenir cette dernière conclusion en travaillant directement sur (u_n) ?

Exercice 4: Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose

$$\begin{cases} u_0 = a \ , \ v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Établir que $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

2. Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. (Indication: on commencera par montrer que $u_n \leq v_n$). Leur limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b, notée $M(a, b)$ (On ne demande pas de la déterminer !).

Exercice 5: Soit (a_k) une suite réelle telle que $\forall k \in \mathbb{N} \ \ a_k \in \{-1, +1\}$. On pose pour tout $n \geq 1$

$$u_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}.$$

Montrez que la suite (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ en montrant qu'elle est de Cauchy. Comment peut-on modifier l'ensemble $\{-1, +1\}$ et conserver le résultat précédent.

Analyse 1 - 1ère année M.I - 2017/2018.

Fiche de T.D, N° 2 - Corrigé.

(Quelques indications sur les réponses)

Exercice 1 : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{8}{9u_n}, \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ a fixé dans $\mathbb{R}$.

1°/ $u_1 = 2 - \dfrac{8}{9a} = \dfrac{18a-8}{9a}$. $u_2 = 2 - \dfrac{8}{9u_1} = \dfrac{14a-8}{9a-4}$

$$u_3 = 2 - \frac{8}{9u_2} = \frac{2(45a-28)}{9(7a-4)}$$

On remarque que :

* Si $a=0$, alors u_1 n'est pas défini, et donc $u_2, u_3, \dots$ ne le sont pas.
* Si $a=\frac{4}{9}$, " u_2 " " $u_3, u_4, \dots$ "
* Si $a=\frac{4}{7}$, " u_3 " , " $u_4, u_5, \dots$, " .

2°/ $W_n = \dfrac{6u_n-8}{3u_n-2}$. Alors $W_{n+1} = \dfrac{6u_{n+1}-8}{3u_{n+1}-2} = \dfrac{12-\frac{16}{3u_n}-8}{6-\frac{8}{3u_n}-2}$

$$W_{n+1} = \frac{4-\frac{16}{3u_n}}{4-\frac{8}{3u_n}} = \frac{12u_n-16}{12u_n-8} = \left(\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{6u_n-8}{3u_n-2} = \frac{1}{2}W_n.$$

Ainsi (W_n) est géométrique, de raison $q = 1/2$.

Donc $\boxed{W_n = \dfrac{W_0}{2^n}}$

3°/ De l'expression de W_n en fonction de u_n, on peut déduire ;

$(3u_n-2)W_n = 6u_n - 8 \Longrightarrow 3u_n(W_n-2) = 2W_n - 8$

$$\Longrightarrow u_n = \frac{2W_n-8}{3(W_n-2)} = \frac{\frac{W_0}{2^{n-1}}-8}{3\left(\frac{W_0}{2^n}-2\right)} = \frac{2(W_0-2^{n+2})}{3(W_0-2^{n+1})}$$

d'où $u_n = \dfrac{2\left(\frac{6a-8}{3a-2}-2^{n+2}\right)}{3\left(\frac{6a-8}{3a-2}-2^{n+1}\right)} \Rightarrow \boxed{u_n = \dfrac{2\left[3a(1-2^{n+1})-4(1-2^n)\right]}{3\left[3a(1-2^n)-4(1-2^{n-1})\right]}}$

4°/ u_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ ne sera pas défini si :

$$3a(1-2^{n_0}) - 4(1-2^{n_0-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{4(2^{n_0-1}-1)}{3(2^{n_0}-1)}}$$

Dans ce cas seuls, $u_1, u_2, \ldots, u_{n_0-1}$ sont définis.

(Ex : $n_0 = 3$, $a = \frac{4(2^2-1)}{3(2^3-1)} = \frac{4 \times 3}{3 \times 7} = 4/7$, trouvé pour le cas u_3).

Exercice 2 : 1°/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n} = 1$.

1ère approche : Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$, par la définition.

$$\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2/3)} \quad (\text{car } \ln \tfrac{2}{3} < 0).$$

En prenant $N(\varepsilon) = \max\left(0, \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(2/3)}\right] + 1\right)$, on vérifiera facilement que $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\left(\frac{-2}{3}\right)^n - 0\right| \leq \varepsilon$.

2ème approche : $\left|\frac{1-(-2/3)^n}{1+(-2/3)^n} - 1\right| = \left|\frac{-2(-2/3)^n}{1+(-2/3)^n}\right| = \frac{2 \cdot (2/3)^n}{\left|1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right|}$

$$\leq \frac{2 \cdot (2/3)^n}{1-(2/3)^n} \quad \text{car } |1 \pm a| \geq |1-|a|| \quad (n \geq 1).$$

Il suffit de chercher $N(\varepsilon)$ par :

$$\frac{2 \cdot (2/3)^n}{1-(2/3)^n} \leq \varepsilon \Rightarrow (2-\varepsilon)\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \text{ si } \varepsilon < 2$$

(car sinon, l'inégalité précédente est vérifiée $\forall n \in \mathbb{N}$). D'où

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon/2-\varepsilon)}{\ln(2/3)}, \text{ et } N(\varepsilon) = \max\left(0, \left[\frac{\ln(\varepsilon/2-\varepsilon)}{\ln(2/3)}\right] + 1\right).$$

2°/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{(n+\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2+1})} = 0$. On a par la définition

$$\left|\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}\right| = \frac{1}{(n+\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2+1})} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{car } n+\sqrt{n^2-1} \geq n \text{ et } n+\sqrt{n^2+1} \geq n$$

d'où $\frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$.

<u>Exercice 3 :</u> $\begin{cases} u_0 = a \ , & 0 < |a| < 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 - u_n} \end{cases}$

1°/ L'assertion à démontrer est (P_n) : u_n est bien défini et $|u_n| < 1$.

* (P_0) est vraie par définition de a.
* Supposons que (P_n) est vraie. Comme $|u_n| < 1$ donc $u_n \neq 2$ et donc u_{n+1} est bien défini. Par ailleurs :

$$|u_{n+1}| = \frac{|u_n|}{|2 - u_n|} \leq \frac{|u_n|}{\big||2| - |u_n|\big|} = \frac{|u_n|}{2 - |u_n|} \quad \text{car } |u_n| < 1 .$$

A partir de $|u_n| < 1$, on a : $2|u_n| < 2 \Leftrightarrow |u_n| < 2 - |u_n| \Leftrightarrow \dfrac{|u_n|}{2 - |u_n|} < 1$;

donc $|u_{n+1}| < 1$.

2°/ Comme $|u_n| > 0$, alors on regarde le rapport $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$.

On a $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{1}{|2 - u_n|} \leq \dfrac{1}{2 - |u_n|} < 1$ car $|u_n| < 1 \Rightarrow 2 - |u_n| > 1$.

Donc $(|u_n|)$ est décroissante.

3°/ Comme $(|u_n|)$ est décroissante, alors $\forall n \geq 1$, $|u_n| \leq |u_0| = |a|$.

Donc $2 - |u_n| \geq 2 - |a|$. Ainsi $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \dfrac{1}{2 - |u_n|} \leq \dfrac{1}{2 - |a|}$

càd $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2 - |a|} \cdot |u_n|$; et par récurrence on peut établir que

$$|u_n| \leq \frac{1}{(2 - |a|)^n} |a| \text{, d'où } \lim_{n \to +\infty} |u_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{|a|}{(2 - |a|)^n} = 0$$

car $2 - |a| > 1$ et donc $\dfrac{1}{2 + |a|} < 1$. Comme $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

4°/ On a dans tous les cas $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2 - u_n} > 0$ car $-1 < u_n < 1$. Donc les u_n ont tous le même signe que celui de a. De plus $\dfrac{1}{2 - u_n} = \dfrac{1}{1 + (1 - u_n)} < 1$ et donc u_n est croissante si $a < 0$ et décroissante si $a > 0$. Donc (u_n) sera convergente. La limite vérifie l'équation $\ell(1 - \ell) = 0 \Rightarrow \ell = 0$ car $\ell = 1$ est impossible. Donc oui on peut !

Exercice 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1°/ On a : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ et $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

donc $\forall a, b \geq 0$, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dans notre cas l'inégalité est stricte.

2°/ On a bien $u_0 \leq v_0$ par hypothèse. Maintenant

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 \geq 0$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. On remarque aussi que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{u_n v_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{v_n}{u_n}} \geq 1$ car $v_n \geq u_n$

donc (u_n) est croissante. D'autre part

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \text{ car } v_n \geq u_n.$$

et donc (v_n) est décroissante. D'après les calculs précédents $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2$

$$= \frac{1}{2} \frac{(v_n - u_n)^2}{(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})^2} = \frac{1}{2} \frac{(v_n - u_n)(v_n - u_n)}{(v_n + u_n + 2\sqrt{u_n v_n})}$$

Il est facile de voir que $0 \leq \dfrac{v_n - u_n}{v_n + u_n + 2\sqrt{u_n v_n}} \leq 1$. Donc

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \text{ et par récurrence}$$

$0 \leq (v_n - u_n) \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 5 : $u_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}$, avec

$n \geq 1$ et $a_k \in \{-1, 1\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

1°/ Soient $p \geq q \geq 1$ deux entiers qcq. Alors

$$u_p - u_q = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{a_k}{2^k} = \frac{a_{q+1}}{2^{q+1}} + \frac{a_{q+2}}{2^{q+2}} + \dots + \frac{a_p}{2^p}.$$

et donc $|u_p - u_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k}$ car $|a_k| = 1$

$$\leq \frac{1}{2^{q+1}} \cdot \frac{1 - 1/2^{p-q}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^q} - \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{2^q}.$$

Si $\frac{1}{2^q} \leq \varepsilon \iff q \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$. En prenant

$$N(\varepsilon) = \max\left(1, \left[-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right] + 1\right)$$

On aura que si $p \geq q \geq N(\varepsilon)$ alors $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

2°/ Pour conserver le résultat précédent, c'est-à-dire la convergence de (u_n), il suffit que la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée

càd $\exists M > 0$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leq M$.