Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: Soit a un paramètre réel. On donne les deux fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \sqrt{a^2 - |x| + x^2} \qquad , \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)$$

Déterminer pour chacune, et suivant les valeurs de a, le domaine de définition, puis étudier sa parité.

Exercice 2: Montrer que la fonction f, définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ strictement croissante, et ce en utilisant uniquement les définitions de base.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ une fonction telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(x-1)f(x+1).$$

Montrer que f est périodique. Vérifier que les fonctions $f_1(x) = e^{\cos\frac{\pi x}{3}}$ et $f_2(x) = e^{\sin\frac{\pi x}{3}}$ sont des solutions de l'équation précédente. Essayer d'en construire une autre.

Exercice 4: Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ des paramètres. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right]$$

Exercice 5: Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leurs domaines de définition respectifs

$$f(x) = \frac{x^3+2x+3}{x^3+1} \qquad , \qquad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

Etudier l'existence d'un prolongement par continuité à tout $\mathbb{R}$.

Exercice 6: Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) > 0$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a < 1.$$

Montrer alors qu'il existe $x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Analyse 1 - 1ère année - 2017/2018.

Fiche de T.D N° 3 - Corrigé

Exercice 1 : * $f(x)=\sqrt{a^2-|x|+x^2}$. Remarquons que $x^2=|x|^2$.

L'expression sous la racine est donc un polynôme du 2nd degré en $|x|$. $\Delta = 1-4a^2$; Signe de Δ : $-$ $\underset{-\frac{1}{2}}{|}$ $+$ $\underset{\frac{1}{2}}{|}$ $-$

1er cas : Si $\boxed{a\in]-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty[}$, alors $\Delta \le 0$ donc le signe de $a^2-|x|+|x|^2$ est celui du coefficient de $|x|^2$ càd positif ou nul.

et donc dans ce cas $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$.

2ème cas : Si $\boxed{a\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}$ alors $\Delta>0$. Il y a deux racines en $|x|$,

$\boxed{\alpha=\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2}}$ et $\boxed{\beta=\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2}}>0$ et $\alpha=\frac{a^2}{\beta}\geq 0$

Signe du trinôme en $|x|$: $\underset{0}{|}$ $+$ $\underset{\alpha}{|}$ $-$ $\underset{\beta}{|}$ $+$

Dans ce cas $D_f=\{x\in\mathbb{R} / \ |x|\le\alpha \text{ ou } |x|\geq\beta\}$

$$\boxed{D_f=[-\alpha,\alpha]\cup]-\infty,-\beta]\cup[\beta,+\infty[}$$

On voit bien que dans les deux cas D_f est symétrique par rapport à 0 càd si $x\in D_f$ alors $-x\in D_f$. De plus $f(-x)=f(x)$, donc f est paire.

* $g(x)=\ln\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)$; $D_g=\{x\in\mathbb{R} / \ \frac{1-ax}{1+ax}>0 \text{ et } 1+ax\neq 0\}$

1er cas : $\boxed{a=0}$, $g(x)\equiv 0$ et $\boxed{D_g=\mathbb{R}.}$

2ème cas : $\boxed{a\neq 0}$ Signe de $\frac{1-ax}{1+ax}$ est $-$ $\underset{-\frac{1}{|a|}}{|}$ $+$ $\underset{\frac{1}{|a|}}{|}$ $-$

$\boxed{D_g=]-\frac{1}{|a|},\frac{1}{|a|}[}$ g est impaire car $\ln\left(\frac{1}{t}\right)=-\ln t$.

Exercice 2 : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

* Pour montrer que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ en utilisant la définition, il suffit de montrer que $\forall y \in]-1,1[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = y$. (Résolution en x avec y paramètre).
  * $y = 0$, alors $f(x) = 0 \iff \dfrac{x}{1+|x|} = 0 \iff x = 0$.
  * $y \in]0,1[$, dans ce cas il faut chercher $x > 0$, càd
  $$\frac{x}{1+x} = y \iff x = y + xy \iff x(1-y) = y \iff x = \frac{y}{1-y}$$
  * $y \in]-1,0[$, on cherche alors $x < 0$, càd
  $$\frac{x}{1-x} = y \iff x = y - xy \iff x(1+y) = y \iff x = \frac{y}{1+y}$$

  En définitive $x = \dfrac{y}{1-|y|}$ est l'unique solution de $f(x) = y$.

* Pour la stricte croissance, il faut montrer que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
  * Si $x_1 < 0 < x_2$, alors il est évident que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.
  (Si l'un des deux est nul, c'est aussi évident).
  * Si $0 < x_1 < x_2$: remarquons que $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$
  donc $1 + x_1 < 1 + x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x_1} > \dfrac{1}{1+x_2} \Rightarrow \dfrac{-1}{1+x_1} < \dfrac{-1}{1+x_2}$
  $\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+x_1} < 1 - \dfrac{-1}{1+x_2}$ càd $f(x_1) < f(x_2)$
  * Si $x_1 < x_2 < 0$, même manipulation.

Exercice 3 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x-1)f(x+1)$.

* Périodicité : On a $f(x+1) = f(x)f(x+2)$

d'où $f(x) = f(x-1)f(x)f(x+2) \Leftrightarrow f(x)\left[1 - f(x-1)f(x+2)\right] = 0$

Comme $f(x) \neq 0$, alors $\boxed{f(x-1)f(x+2) = 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

ou encore $\boxed{f(x)f(x+3) = 1}$ et $\boxed{f(x-3)f(x) = 1}$

$\Longrightarrow f(x)f(x+3) - f(x-3)f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left[f(x+3) - f(x-3)\right] = 0$

et donc $\boxed{f(x-3) = f(x+3)}$ ou encore $\boxed{f(x) = f(x+6)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

donc f est périodique. (6 est une des périodes).

* $f_1(x) = e^{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$, $f_1(x-1)f_1(x+1) = e^{\cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}$

or $\cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cancel{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}}$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ or $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$

$= \cos\frac{\pi x}{3}$

d'où $f_1(x-1)f_1(x+1) = f_1(x)$. Idem pour f_2.

* On remarque que quand f_1 et f_2 sont solutions de l'équation fonctionnelle, alors $f_1 \cdot f_2$ (produit) en est une autre. Donc une autre solution sera : $g(x) = e^{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$

Exercice 4 : * On a $\left[\frac{c}{x}\right] \leq \frac{c}{x} < \left[\frac{c}{x}\right] + 1$ d'où

$$\frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] \leq \frac{x}{b}\cdot\frac{c}{x} < \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] + \frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{c}{b} - \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] < \frac{x}{b}$$

d'où $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] = c/b}$

$$* \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x-a}\right)}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x-a}\right)}$$

$$= \frac{x-\left(\cancel{a}+x-\cancel{a}+2\sqrt{a}\sqrt{x-a}\right)}{\left(\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x-a}\right)} = \frac{-2\sqrt{\cancel{x-a}}\sqrt{a}}{\left(\sqrt{\cancel{x-a}}\right)\left(\sqrt{x+a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x-a}\right)}$$

$$= \frac{-2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x+a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x-a}\right)}.$$

d'où $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{-2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x+a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x-a}\right)}$

$$= \frac{-2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{2a}\right)\left(2\sqrt{a}\right)} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2a}}}$$

<u>Exercice 5</u> : $* \quad f(x) = \dfrac{x^3+2x+3}{x^3+1}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

. f est continue sur D_f, comme quotient de deux polynômes continues et que le dénominateur ne s'annule pas sur D_f.

. Remarquons que -1 est racine du numérateur aussi. Donc

sur D_f, $\quad f(x) = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+3)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \dfrac{x^2-x+3}{x^2-x+1}$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+3}{x^2-x+1} = \frac{3}{1} = 3$ (existe)

donc f admet un prolongement par continuité au pt -1 donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases} = \frac{x^2-x+3}{x^2-x+1} \quad ; \quad D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}.$$

$$* \quad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

i/ <u>Si $n=0$</u> : $\quad g(x) = \dfrac{1-1}{\cancel{x}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et g admet un prolongement.
$(\text{si } x \neq 0)$ (par continuité)

$\tilde{g} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

ii/ Si $n \geq 1$: On utilise la formule du binôme de Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \dots, C_n^{n-1} = n, C_n^n = 1$

d'où $g(x) = \frac{1}{x}\left[C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n\right] \quad (x \in D_g)$

$$= C_n^1 + C_n^2 x + C_n^3 x^2 + \dots + C_n^n x^{n-1}$$

$\lim_{x \to 0} g(x) = C_n^1 = n$ (existe), donc g admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ donné par :

$$\boxed{\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{k-1}}$$

Exercice 6 : On considère la fonction $g(x) = f(x) - x$.

. Sur $[0, +\infty[$, g est continue puisque f l'est et aussi $I(x) = x$.

. $g(0) = f(0) > 0$.

. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - 1\right] = -\infty$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et que $a - 1 < 0$.

Donc il existe un réel $b > 0$ (assez grand) tq $g(b) < 0$.

(et m̂ $g(x) < 0$ si $x \geq b$). Sur l'intervalle $[0, b]$

On a g continue et $g(0) > 0$, $g(b) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $x_0 \in [0, b]$ tq $g(x_0) = 0$, en cas $f(x_0) = x_0$.