Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1: Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition

$$f(x) = \max\left(x^2 - 1, x + 1\right) \quad , \quad g(x) = \begin{cases} (\sin x)\left(\sin \frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2: Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 - 1}} \quad , \quad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad , \quad h(x) = x^x = e^{x \ln x}.$$

Exercice 3: Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé. Montrer que l'on a

$$2(x - \sin x) < (\tan x) - x$$

(Indication : appliquer le théorème des accroissement finis à la fonction $f(t) = 2 \sin t + \tan t - 3t$ dans l'intervalle $[0, x]$).

Exercice 4: Par application de la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{2 \ln(1 + x) - 2x + x^2}{x^3}.$$

Exercice 5: Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction $g(x) = |f(x)|$.

1. Montrer que g est dérivable en tout point a où $f(a) \neq 0$.
2. Etudions à présent le cas où $f(a) = 0$. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que g admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite de a. Exprimer ces dérivées. A quelle condition y aura-t-il dérivabilité de g en a ?

Exercice 6: Pour tout entier $n \geq 1$ on définit la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$.

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1/2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (x_n) converge.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$. En déduire la limite de (x_n).

Analyse 1 – Fiche de T-D N° 4 (2017/2018)

Quelques éléments de réponses

EX1: 1°/ $f(x) = \max(x^2-1,\ x+1)$. Il faut exprimer autrement f.

On a $x^2-1 \leq x+1 \iff (x-1)(x+1)-(x+1) \leq 0 \iff (x+1)(x-2) \leq 0$

$\iff x \in [-1,2]$, d'où

	-1		2	
$+$		$-$		$+$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1,2] \\ x^2-1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus[-1,2] \end{cases}$$

Sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,2[\,\cup\,]2,+\infty[$, f est dérivable comme un polynôme.

Reste les point $a=-1$ et $b=2$.

$*$ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} x-1 = -2$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{x+1}{x+1} = 1$. Donc f n'est pas dérivable en $a=-1$

$*$ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{(x+1)-3}{x-2} = 1$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{(x^2-1)-3}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} x+2 = 4$

Donc idem, f n'est pas dérivable en $b=2$.

2°/ $g(x) = \begin{cases} (\sin x)(\sin \frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ g est manifestement dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Reste $x_0 = 0$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x\neq 0)}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Cette limite n'existe

pas, car sinon $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ existerait puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas ! Donc g n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Ex2 : * $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3-1}}$, $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3-1>0\} = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x^2+x+1)>0\}$

$=]1, +\infty[$. (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$).

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^3-1} - (x^2+1)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}}{x^3-1} = \frac{4x(x^3-1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3-1)\sqrt{x^3-1}}$$

$$f'(x) = \frac{x(4x^3-4-3x^3-3x)}{(x^3-1)\sqrt{x^3-1}} = \boxed{\frac{x(x^3-3x-4)}{(x^3-1)\sqrt{x^3-1}}}$$

* $g(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ car $x^2+1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$

donc $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

* $h(x) = x^x = e^{x\ln x}$, $\mathcal{D}_h =]0, +\infty[$

$$\boxed{h'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}}$$

Ex3 : $f(t) = 2\sin t + tg\, t - 3t$ est continue sur $[0, x]$ $(x \in]0, \pi/2[)$

et dérivable sur $]0, x[$, donc le thm des accroissements finis donne

$\exists c \in]0, x[$ tq $f(x) - f(0) = x\, f'(c)$ $\quad (f(0) = 0)$

Un calcul direct donne $f'(c) = \dfrac{2\cos^3 c - 3\cos^2 c + 1}{\cos^2 c} = \dfrac{(\cos c - 1)^2(2\cos c + 1)}{\cos^2 c}$

Comme $c \in]0, x[$ alors $x \in]0, \pi/2[$ donc $\cos c > 0$ et donc $2\cos c + 1 > 0$

d'où $f'(c) > 0$. Ainsi $f(x) > 0$ si $x \in]0, \pi/2[$.

càd $\quad 2\sin x + tg\, x - 3x > 0$

$\iff 2(\sin x - x) + tg\, x - x > 0$

$\iff (tg\, x - x) > 2(x - \sin x)$.

Ex 4 : * La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en 0 donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\theta_1 x}, \quad 0<\theta_1<1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\cos(\theta_2 x), \quad 0<\theta_2<1$$

d'où

$$\frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1} = -\frac{e^{\theta_1 x}}{\cos(\theta_2 x)}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} -\frac{e^{\theta_1 x}}{\cos(\theta_2 x)} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$$

car q^d $x\to 0$, $\theta_1 x \to 0$ et $\theta_2 x \to 0$.

* Maintenant on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 à la fonction $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}, \quad 0<\theta<1$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{x^3} = \frac{2}{3(1+\theta x)^3}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3(1+\theta x)^3} = \boxed{2/3}$$

Ex 5 : $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $g(x) = |f(x)|$

1/ Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $f(a) \neq 0$. Donc $f(a)>0$ ou bien $f(a)<0$
donc dans un voisinage de a, $V(a)$, $f(x)>0$ ou bien $f(x)<0$
càd $g(x) = f(x)$ ou bien $g(x) = -f(x)$. Donc g est dérivable en a car f l'est.

2/ Soit maintenant $f(a)=0$. On a $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{|f(x)|}{x-a} = \frac{|x-a|}{x-a}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -|f'(a)|$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = |f'(a)|$.

Il y aura dérivabilité de g en a si $-|f'(a)| = |f'(a)| \Rightarrow 2|f'(a)| = 0$
$\Rightarrow \boxed{f'(a)=0}$.

Ex 6 : Pour $n \geq 1$, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$

1°/ $f_n'(x) = n x^{n-1} + 4x + 1 > 0$ sur $[0,1]$, donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. Maintenant $f_n(0) = -1$ et $f_n(1/2) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$
$= \frac{1}{2^n} > 0$

A l'aide du thm des valeurs intermédiaires, on peut affirmer qu'il existe $x_n \in]0, 1/2[$ tq $f_n(x_n) = 0$, x_n est unique car $f_n(\cdot)$ est strictement croissante.

On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ car $x \in [0,1]$,

donc $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in [0,1]$.

Appliquons cette dernière inégalité à $x = x_{n+1}$:

$$f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$$

mais comme $f_n(\cdot)$ est croissante (en x), alors forcément $x_{n+1} \geq x_n$.

Ainsi la suite (x_n) est croissante majorée (par $\frac{1}{2}$ par exemple), donc elle est convergente.

2°/ On a $0 < x_n < 1/2 \Rightarrow 0 < x_n^n < \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$

Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, on a $x_n^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$

d'où $2l^2 + l - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$l_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $l_2 = \frac{-1+3}{4} = 1/2$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1/2}$