Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: Soit a un paramètre réel. On donne les deux fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \sqrt{a^2 - |x| + x^2} \qquad , \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)$$

Déterminer pour chacune, et suivant les valeurs de a, le domaine de définition, puis étudier sa parité.

Exercice 2: Montrer que la fonction f, définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ strictement croissante, et ce en utilisant uniquement les définitions de base.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ une fonction telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(x-1)f(x+1).$$

Montrer que f est périodique. Vérifier que les fonctions $f_1(x) = e^{\cos\frac{\pi x}{3}}$ et $f_2(x) = e^{\sin\frac{\pi x}{3}}$ sont des solutions de l'équation précédente. Essayer d'en construire une autre.

Exercice 4: Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ des paramètres. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right]$$

Exercice 5: Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leurs domaines de définition respectifs

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 1} \qquad , \qquad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

Etudier l'existence d'un prolongement par continuité à tout $\mathbb{R}$.

Exercice 6: Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) > 0$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a < 1.$$

Montrer alors qu'il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = x_0$.