Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Examen de Rattrapage.
Lundi 25/06/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (06pts) On considère l'équation

$$(E) \qquad x\, e^{x^2} = 2$$

1. Montrer que (E) admet, dans l'intervalle $[0,1]$ une solution unique x_*. (On ne demande pas de calculer cette solution)
2. Existe-t-il dans $\mathbb{R}$ d'autres solutions en dehors de l'intervalle $[0,1]$?

Exercice 2: (08pts) On considère la fonction réelle

$$f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f en $0, 1$ et $+\infty$ (éventuellement à gauche et à droite de certains points considérés).
3. Montrer que $f(D_f) \subset D_f$, puis calculer $f \circ f$.
4. Soit $a \in D_f$ fixé. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   Pour quelles valeurs de a cette suite est-elle convergente ?

Exercice 3: (06pts) A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$$

1ère année M.I - Semestre 1 - 2017/2018

Module : « Analyse I » - Epreuve de Rattrapage.

Corrigé.

Exercice 1 : (06 pts) (E) $x e^{x^2} = 2$.

1°/ Solution unique dans $[0,1]$:

* Pour l'existence, il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : posons $g(x) = x e^{x^2} - 2$. 0,5 pt

✓ g est continue sur $[0,1]$ car : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -2$ sont toutes continues et g est "fabriquée" à l'aide de ces fonctions et les opérations élémentaires. 1,5 pt

✓ $g(0) = -2$; $g(1) = e - 2$ (>0). Donc $0 \in [g(0), g(1)]$. 1 pt

Par application du thm des valeurs intermédiaires, $\exists\, x_* \in [0,1]$ tq $g(x_*) = 0$ càd x_* est solution de (E).

* Pour l'unicité, on peut essayer de voir la monotonie de g. En effet, $g'(x) = (1 + 2x^2) e^{x^2} > 0$. Donc g est strictement croissante. Cela empêche l'existence d'une deuxième solution. 1 pt

2°/ Autre solutions dans $\mathbb{R} \setminus [0,1]$:

Nous avons déjà calculé $g'(x)$ et remarqué que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$. Cela interdit à g d'avoir deux zéros car elle est strictement croissante ; càd si $x > x_* \Rightarrow g(x) > g(x_*) = 0$ et si $x < x_*$ alors $g(x) < g(x_*) = 0$. 2 pts

Exercice 2 : (08 pts) $\quad f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$

1°/ Domaine de f : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq 1\}$ 2pts

d'où $\boxed{D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[}$

2°/ Les limites : $\ast \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$ 0,5

$\ast \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \ln x = 0^- \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{1}{\ln x} = -\infty \end{cases}$ 0,5

$\ast \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \ln x = 0^+ \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$ 0,5

$\ast \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$ 0,5

3°/ $f(D_f) \subset D_f$: Calculons : $f'(x) = \frac{-1}{x \ln^2 x} e^{1/\ln x} < 0$ 0,5

donc f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles.

Ainsi : $f(]0,1[) =]f(1^-), f(0^+)[=]0,1[$ 0,5

$f(]1,+\infty[) =]f(+\infty), f(1^+)[=]1,+\infty[$ 0,5

d'où $f(D_f) = D_f$ (mieux que $f(D_f) \subset D_f$)

Maintenant $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \exp\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)$.

car $\ln f(x) = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \frac{1}{\ln f(x)} = \ln x$ 0,5

et donc $\boxed{(f \circ f)(x) = e^{\ln x} = x}$ $(\forall x \in D_f)$

4°/ Etude de la suite : $a \in D_f$. $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) . \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Remarquons d'abord que $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = u_n$.

Donc $u_{2k} = u_{2k-2} = u_{2k-4} = \cdots = u_0 = a$ (les termes pairs)

$u_{2k+1} = u_{2k-1} = u_{2k-3} = \cdots = u_1 = f(a)$ (" impairs) 2pts

Les deux sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) étant constantes (donc convergentes), si $a \neq f(a)$, la suite (u_n) divergera. Donc pour que (u_n) converge, il faut et il suffit que $a = f(a)$.

Donc $a = e^{1/\ln a} \Rightarrow \ln a = \frac{1}{\ln a} \Rightarrow \ln^2 a = 1$

$\Rightarrow (\ln a = 1 \text{ ou } \ln a = -1) \Rightarrow \boxed{a = e \text{ ou } a = \frac{1}{e}}$

Exercice 3 : (06 pts) Posons $A(x) = \ln(\sin x) - \ln(\cos x)$

$B(x) = \sin x - \cos x$.

Dans un petit voisinage de $\pi/4$, on peut appliquer le thm des accroissements finis à $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$, car elles sont de classe C^1. 1pt

Donc $A(x) - A(\pi/4) = (x - \pi/4) A'(c_1)$, ($c_1$ entre $\frac{\pi}{4}$ et x. strictement)

$\Rightarrow A(x) = (x - \pi/4)\left(\frac{\cos c_1}{\sin c_1} + \frac{\sin c_1}{\cos c_1}\right)$ (car $A(\pi/4) = 0$)

$\boxed{A(x) = (x - \pi/4)\left(\frac{1}{\sin c_1 \cos c_1}\right)}$ $\left(\frac{\pi}{4} < c_1 < x \text{ ou } x < c_1 < \pi/4\right)$ 1pt +0,5

de même $B(x) - B(\pi/4) = (x - \pi/4) B'(c_2)$ $\left(B\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0\right)$

$\Rightarrow \boxed{B(x) = (x - \pi/4)(\cos c_2 + \sin c_2)}$ $\left(\frac{\pi}{4} < c_2 < x \text{ ou } x < c_2 < \pi/4\right)$ 1pt +0,5

Ainsi $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\cancel{(x - \pi/4)} \frac{1}{\sin c_1 \cos c_1}}{\cancel{(x - \frac{\pi}{4})}(\cos c_2 + \sin c_2)} = \frac{1}{(\sin c_1)(\cos c_1)(\cos c_2 + \sin c_2)}$

Si $x \to \pi/4$ alors c_1 et $c_2 \longrightarrow \pi/4$ d'où 2pts

$$\boxed{\lim_{x \to \pi/4} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}}$$