Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1: Ecrire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour chacune des fonctions $x \mapsto \cosh x$ et $x \mapsto \sinh x$. En déduire le développement à l'ordre 4 pour $x \mapsto \cosh^3 x$ et $x \mapsto \sinh^3 x$ par un calcul direct à l'aide du binôme de Newton. Retrouver ces résultats en utilisant une linéarisation.

Exercice 2: Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (\cos x)\ln(1+x) \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{1+\arctan x} \quad , \quad f_3(x) = \cos(\sin x)$$

Exercice 3: Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \tan x$. En déduire, à l'aide d'un changement de variable, le développement de la même fonction au même ordre, au voisinage de $\pi/4$.

Exercice 4: En procédant directement par division, calculer le développement à l'ordre 5 au visinage de 0 de la fonction $x \mapsto \tanh x$. Retrouver le résultat en posant

$$\tanh x = ax + bx^3 + cx^5 + x^5\varepsilon(x)$$

où a, b, c sont des coefficients à déterminer en utilisant la formule $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$.

Exercice 5: En utilisant les développement limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}.$$

Exercice 6: On donne les deux fonctions

$$\varphi(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}} \quad , \quad \psi(x) = x^3 \arctan(\frac{1}{1+x^2}).$$

Déterminer pour chacune, les équations des asymptotes obliques ainsi que la position de la courbe par rapport à ces asymptotes et ce en utilisant un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ (i.e, développer en $t = 0$ où $t = 1/x$)
(Facultatif : étudier ces deux fonctions et tracer leurs courbes représentatives)

Analyse 2 - 1ère année M. I - 2017/2018

Fiche de T.D N° 1 - Corrigé.

(Quelques indications sur les réponses).

Ex 1: Les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ étant de classe C^∞, le DL se calcul à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange. On aura (après calcul des dérivées jusqu'à l'ordre 4 inclus)

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_1(x) \qquad (x \to 0)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon_2(x)$$

D'où

$$(\operatorname{ch} x)^3 = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + x^4 \varepsilon_5(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + x^4 \varepsilon_6(x)$$

$$(\operatorname{sh} x)^3 = \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^4 \varepsilon_7(x) = x^3 + x^4 \varepsilon_8(x)$$

(utiliser pour la première la formule du multinôme donnée en cours).

Linéarisation: $\ast\ (\operatorname{ch} x)^3 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{ch} x.$$

d'où $(\operatorname{ch} x)^3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24}\right) + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + x^4 \varepsilon_9(x)$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{8}\right)x^2 + \left(\frac{81}{96} + \frac{1}{32}\right)x^4 + x^4 \varepsilon_{10}(x)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + x^4 \varepsilon_{10}(x)$$

$\ast\ (\operatorname{sh} x)^3 = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{8}\left(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 3x - \frac{3}{4}\operatorname{sh} x$

d'où $(\operatorname{sh} x)^3 = \frac{1}{4}\left((3x) + \frac{(3x)^3}{6}\right) - \frac{3}{4}\left(x + \frac{x^3}{6}\right) + x^4 \varepsilon_{11}(x)$

$$= \left(\cancel{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}\right)x + \left(\frac{27}{24} - \frac{3}{24}\right)x^3 + x^4 \varepsilon_{11}(x)$$

$$= x^3 + x^4 \varepsilon_{11}(x).$$

(cqfd)

Ex2 : * $f_1(x) = (\cos x)\ln(1+x)$

On a : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)$

. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_2(x)$

Alors $f_1(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + x^4 \varepsilon_3(x)$

$$\boxed{f_1(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + x^4 \varepsilon_4(x)}$$

* $f_2(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{arctg} x}$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon_1(x)$

On fait une division suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 + x - x^3/3 \\
-(1 + x - x^3/3) & \hline 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 \\
\hline
-x + x^3/3 & \\
-(-x - x^2 + x^4/3) & \\
\hline
x^2 + x^3/3 - x^4/3 & \\
-(x^2 + x^3) & \\
\hline
-\frac{2}{3}x^3 - x^4/3 & \\
-\left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4\right) & \\
\hline
\frac{1}{3}x^4 & \\
-\frac{1}{3}x^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Alors $\boxed{f_2(x) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + x^4 \varepsilon_2(x)}$

* $f_3(x) = \cos(\sin x)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_1(x)$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon_2(t)$

Alors $f_3(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + x^4 \varepsilon_3(x)$

$$\boxed{f_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4 \varepsilon_4(x)}$$

Ex 3 : * On a $tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x)}$

$$\begin{array}{l|l} x - x^3/6 & 1 - x^2/2 \\ \hline -(x - x^3/2) & x + \frac{1}{3}x^3 \\ \hline \frac{1}{3}x^3 & \\ -\frac{1}{3}x^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

D'où $\boxed{tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_3(x)}$

* On veut développer $tg(x)$ en $\pi/4$; on pose $x - \pi/4 = t$

Alors $x = t + \pi/4$ et donc $tg(x) = tg(t + \pi/4) = \frac{tg t + tg \pi/4}{1 - tg t \, tg \pi/4}$

$$tg(x) = \frac{1 + tg t}{1 - tg t} = \frac{1 + t + t^3/3 + t^3 \varepsilon_3(t)}{1 - t - t^3/3 - t^3 \varepsilon_3(t)} \quad (t \in V(0))$$

Donc :

$tg(x) = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + t^3 \varepsilon_4(t)$

et enfin

$$\boxed{\begin{gathered} tg(x) = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 \\ + \frac{8}{3}(x - \pi/4)^3 + (x - \pi/4)^3 \varepsilon_5(x) \\ x \in V(\pi/4) \end{gathered}}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 + t + t^3/3 & 1 - t - t^3/3 \\ \hline -(1 - t - t^3/3) & 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 \\ \hline 2t + 2t^3/3 & \\ -(2t - 2t^2) & \\ \hline 2t^2 + 2t^3/3 & \\ -(2t^2 - 2t^3) & \\ \hline 8/3 \, t^3 & \\ -\frac{8}{3}t^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ex4 : * $th(x) = \dfrac{sh\,x}{ch\,x} = \dfrac{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_1(x)}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x)}$

$$
\begin{array}{l|l}
x + x^3/6 + x^5/120 & 1 + x^2/2 + x^4/24 \\
\hline
-\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) & x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\hline
-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
-\left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5\right) & \\
\hline
\frac{4}{30}x^5 & \\
-\left(\frac{2}{15}x^5\right) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

donc $\boxed{th\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon(x)}$

* Autre méthode proposée :

$th\,x = ax + bx^3 + cx^5 + x^5 \varepsilon(x)$, car $x \in V(0)$ et $th(\cdot)$ est impaire.

$(th\,x)' = a + 3bx^2 + 5cx^4 + x^4 \varepsilon_1(x)$

$1 - th^2 x = 1 - (ax + bx^3 + cx^5)^2 + x^4 \varepsilon_2(x)$

$= 1 - a^2x^2 - 2abx^4 + x^4 \varepsilon_3(x)$

D'où $\begin{cases} a = 1 \\ 3b = -a^2 \\ 5c = -2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/3 \\ c = \frac{2}{15} \end{cases}$

Cad, $\boxed{th\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon(x)}$

Ex 5 : * $1^{ère}$ limite :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

d'où $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \frac{1}{8}x^3 + x^3\varepsilon_3(x)$

et donc $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8} + \varepsilon_3(x)$

càd $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = 1/8}$

* $2^{ème}$ limite :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) \Rightarrow x - \sin x = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$$

Aussi : $sh(t) = t + t^2\varepsilon_2(t) \Rightarrow \boxed{sh(x - \sin x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)}$

$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon_3(x)$, d'où

$$\frac{sh(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)}{\frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon_3(x)} = \frac{\frac{1}{6} + \varepsilon_2(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_3(x)}$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{sh(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = 1/3}$

Ex6 : * $\varphi(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$, si $x = 1/t$

alors $\varphi(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{3}{t}+1}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{3+t}}$

$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + t^3\varepsilon_1(t) \quad (t \in V(0))$

$\sqrt{3+t} = \sqrt{3}\sqrt{1+t/3} = \sqrt{3}\left[1 + \frac{t}{6} - \frac{t^2}{72} + \frac{t^3}{432} + t^3\varepsilon_2(t)\right]$

d'où $\sqrt{\frac{1-t}{3+t}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{27}t^3 + t^3\varepsilon_3(t)\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{3+t}} = \frac{1}{t\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{27\sqrt{3}}t^2 + t^2\varepsilon_3'(t)$

càd $\boxed{\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{(27\sqrt{3})x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_3'(1/x)}$

$(x \to \infty)$

Posons $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, c'est l'éq de l'asymptote oblique en $\pm\infty$ car $\lim_{x\to\pm\infty}\left[\varphi(x) - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\right] = 0$.

De plus $\varphi(x) - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{-2}{27\sqrt{3}\,x^2}\left[1 + \varepsilon_4(1/x)\right]$

càd sign$\left[\varphi(x) - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\right] < 0$ au voisinage de $\pm\infty$

donc (C_φ) se situe <u>sous</u> l'asymptote oblique.

* $\psi(x) = x^3 \arctg\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^3} \arctg\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)$

On a : $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^2 \varepsilon_1(t)$

$\Rightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = t^2 - t^4 + t^4 \varepsilon_1(t)$

et $\arctg(z) = z - z^3/3 + z^3 \varepsilon_2(z)$

$\Rightarrow \arctg\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) = (t^2 - t^4) - \frac{1}{3}(t^2 - t^4)^3 + t^4 \varepsilon_3(t)$

$= t^2 - t^4 + t^4 \varepsilon_4(t)$

d'où $\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - t + t\, \varepsilon_4(t)$

ou encore $\psi(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon_4(1/x)$

Posons $\boxed{y = x}$ c'est l'éq. de l'asymptote oblique en $\pm\infty$ car $\lim_{x \to \pm\infty} [\psi(x) - x] = 0$. De plus

$\psi(x) - x = -\frac{1}{x}[1 - \varepsilon_4(1/x)]$, donc

$\text{sign}(\psi(x) - x) = \begin{cases} + & \text{si } x \to -\infty \\ - & \text{si } x \to +\infty \end{cases}$

càd : (C_ψ) est au dessus de l'asymptote $(y = x)$ au voisinage de $-\infty$
et (C_ψ) " " dessous " " de $+\infty$