Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1:

1. Montrer, en utilisant les sommes de Darboux, que la fonction $f(x) = x - [x]$ est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[0, 2]$.

2. Toujours à l'aide des sommes de Darboux relatives à une subdivision particulière, montrer que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$. (Penser à utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Exercice 2: En interprétant chacune des suites suivantes comme une somme de Riemann (après transformation éventuelle, préciser la fonction et l'intervalle d'intégration), calculer sa limite :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \quad , \quad v_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{1/n} \quad , \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2 a^2} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Exercice 3: Calculer des primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{x+2}{x^2 - 3x - 4} \quad , \quad \frac{x-1}{x^2 + x + 1} \quad , \quad \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} \quad , \quad \frac{1}{\sin x} \quad , \quad \frac{1}{2 + \sin x + \cos x}.$$

Exercice 4: Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad , \quad \int_{-1}^{1} (\arccos x)^2\, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 - \sin x}}\, dx$$

Exercice 5: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx$$

Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$. Montrer que ce résultat est encore vrai pour f une fonction en escalier (constante par morceaux).

Exercice 6: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose pour $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

Montrer que la fonction g se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe C^1. (Indication: utiliser les différentes formules de la moyenne en plus de certains résultats du cours)