Université Aboubekr BELKAID -Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1:

1. Montrer, en utilisant les sommes de Darboux, que la fonction $f(x) = x - [x]$ est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[0, 2]$.

2. Toujours à l'aide des sommes de Darboux relatives à une subdivision particulière, montrer que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$. (Penser à utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Exercice 2: En interprétant chacune des suites suivantes comme une somme de Riemann (après transformation éventuelle, préciser la fonction et l'intervalle d'intégration), calculer sa limite :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \quad , \quad v_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{1/n} \quad , \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2 a^2} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Exercice 3: Calculer des primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{x+2}{x^2 - 3x - 4} \quad , \quad \frac{x-1}{x^2 + x + 1} \quad , \quad \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} \quad , \quad \frac{1}{\sin x} \quad , \quad \frac{1}{2 + \sin x + \cos x}.$$

Exercice 4: Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad , \quad \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 - \sin x}}\, dx$$

Exercice 5: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx$$

Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$. Montrer que ce résultat est encore vrai pour f une fonction en escalier (constante par morceaux).

Exercice 6: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose pour $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

Montrer que la fonction g se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe C^1. (Indication: utiliser les différentes formules de la moyenne en plus de certains résultats du cours)

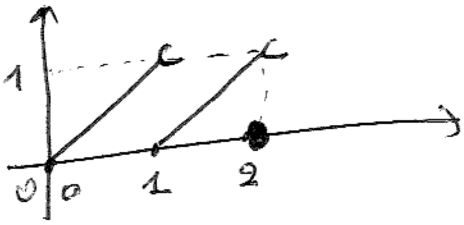
Analyse 2 - 1ère année - M.I - 2017/2018.

Fiche de T.D N°2 - Corrigé.

(Quelques indications sur les réponses).

EX 1: 1°/ $f(x) = x - [x]$ est Riemann-intégrable sur $[0,2]$.

Soit Δ_ε une subdivision de $[0,2]$ (avec $1 \notin \Delta_\varepsilon$) avec $\rho_{\Delta_\varepsilon} < \varepsilon$. (C'est toujours possible de la construire).



$\exists!\, i_0$ tq $1 \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ et $2 \in [x_{n-1}, x_n]$ car $x_n = 2$.

$\forall i \in \{0,1,2,\dots,n-1\} - \{i_0, n-1\}$, $M_i - m_i = x_{i+1} - x_i$

On a aussi $M_{i_0} - m_{i_0} = 1$, $M_{n-1} - m_{n-1} = 1$. D'où

$$S_{\Delta_\varepsilon} - s_{\Delta_\varepsilon} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0, n-1}}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) + (x_n - x_{n-1})$$

$$\leq \rho_{\Delta_\varepsilon} \underbrace{\left[\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0, n-1}}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + 1 + 1\right]}_{\leq 2+1+1}$$

$$\leq 4\rho_{\Delta_\varepsilon} < 4\varepsilon.$$

Reste juste à changer : $\varepsilon' = 4\varepsilon$.

2°/ Soit Δ une subdivision qcq de $[0,1]$. Sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ il existe des pts de $\mathbb{Q}$ et des points de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Donc $M_i = 1$ et $m_i = 0$ donc $M_i - m_i = 1$.

Alors $S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) = 1$: On n'arrivera pas à la rendre aussi petite qu'on veut. Donc f n'est pas Riemann-intégrable.

Ex 2 : a/ $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$. On peut faire d'abord le changement d'indice : $k = n+j$, $j = 0, \dots, n-1$, d'où

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2n+j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n(2+j/n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2+j/n}$$

C'est une somme de Riemann sur $[0,1]$, avec $f(x) = \frac{1}{2+x}$ et $\xi_j = j/n$, $x_j = j/n$ et $h = 1/n$ (pas constant).

Comme f est intégrable sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{2+x} = \Big[\ln(2+x)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(3/2)}$$

b/ $v_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{1/n}$. Pour passer à une somme, il faut introduire le Logarithme. $\ln(v_n) = -2\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\ln(n^2+k^2)\right)$

$$\ln(v_n) = -2\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \cancel{-2\ln(n)} + \cancel{2\ln n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + k^2/n^2)$$

C'est une somme de Riemann sur $[0,1]$, avec $f(x) = \ln(1+x^2)$, $x_k = k/n$, $\xi_k = x_{k+1}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$.

$$= \ln 2 - \int_0^1 \left(2 + \frac{-2}{1+x^2}\right) dx = \ln 2 - 2 + 2\Big[\arctan x\Big]_0^1$$

$$= \ln 2 - 2 + 2\cdot\pi/4 \text{, donc.}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\,e^{\left(\frac{\pi}{2}-2\right)}}$$

c/ $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2a^2}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}a\right)^2}$ c'est une somme de Riemann

avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2a^2}$, $h = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $\xi_k = \frac{k+1}{n}$, $k=0,\dots,n-1$

Comme f est intégrable sur $[0,1]$ car continue, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2a^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(x\,a)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\operatorname{arctg} a}{a}}$$

<u>Ex 3</u> : * $f_1(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-4}$; on a $x^2-3x-4 = (x+1)(x-4)$

d'où $f_1(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{-1/5}{x+1} + \frac{6/5}{x-4}$

et $\boxed{\int f_1(x)\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + k}$

* $f_2(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$; on a $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

On peut faire le changement $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}\,y-1}{2}$

et $\int f_2(x)\,dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}\,y-1}{2}-1}{\frac{3}{4}(y^2+1)} \frac{\sqrt{3}}{2}\,dy = \int \frac{y-\sqrt{3}}{y^2+1}\,dy$

$$= \int \left(\frac{y}{y^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{y^2+1}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg} y + k$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k'}$$

* $f_3(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; on pose $y = \ln x$, alors

$$\int f_3(x)\,dx = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + k = \boxed{\arcsin(\ln x) + k}$$

* $f_4(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; on pose $t = tg(x/2)$, d'où $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

et $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

alors $\displaystyle\int f_4(x)\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + k$

$$= \boxed{\ln|tg(x/2)| + k}.$$

* $f_5(x) = \dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$; on pose $t = tg(x/2)$, d'où $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Alors $\displaystyle\int f_5(x)\,dx = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+2t+3} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2+2} = \int \frac{dt}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + k = \boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+tg(x/2)}{\sqrt{2}}\right) + k}.$$

Ex4: * $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Posons $x = tg\,\theta$, $0 \le \theta \le \pi/4$

alors $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+tg^2\theta}{(1+tg^2\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1+tg^2\theta} = \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta)\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi+2}{8}}$$

* $I_2 = \int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 \, dx$, on peut poser $t = \arccos x$, alors

$$I_2 = \int_{\pi}^{0} t^2 (-\sin t)\, dt = \int_0^{\pi} t^2 \sin t \, dt$$, on fait deux

intégrations par parties : $u = t^2 \longrightarrow u' = 2t$

$v' = \sin t \longrightarrow v = -\cos t$

Alors $I_2 = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t \cos t \, dt$, puis $u = t \longrightarrow u' = 1$

$v' = \cos t \longrightarrow v = \sin t$

$$I_2 = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + 2\left[t \sin t\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin t \, dt$$

$$= \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + 2\left[t \sin t\right]_0^{\pi} + 2\left[\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{I_2 = \pi^2 - 4}$$

* $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\sin x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin x}} dx$

On peut faire le changement $\sin x = t$, alors

$$I_3 = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2-t}} dt = \int_0^1 \frac{2(2-(2-t))}{\sqrt{2-t}} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt{2-t}} - 2\sqrt{2-t}\right) dt.$$

$$= \left[-8\sqrt{2-t} + \frac{4}{3}(2-t)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \left(-8 + \frac{4}{3}\right) - \left(-8\sqrt{2} + \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{I_3 = \frac{4}{3}(4\sqrt{2} - 5)}$$

Ex5 : * $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$.

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx$$

Faisons une intégration par parties : $u = f(x) \longrightarrow u' = f'(x)$

$v' = \sin nx \longrightarrow v(x) = -\frac{1}{n} \cos nx$

Alors $I_n = \left[-\frac{1}{n} f(x) \cos nx \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx)\, dx.$

$$= \frac{f(a) \cos na - f(b) \cos nb}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx)\, dx.$$

Comme $f \in C^1$, alors $\sup_{[a,b]} |f(x)| = M_1$ et $\sup_{[a,b]} |f'(x)| = M_2$

existent, d'où

$$|I_n| \leq \frac{2M_1}{n} + \frac{(b-a) M_2}{n}, \text{ d'où } \lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

* Considérons à présent une fonction en escalier :

fixons une subdivision de $[a,b]$, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b\}$

alors $f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \mathbb{1}_{[x_i, x_{i+1}[}(x)$, c_i : constante.

Donc $I_n = \int_a^b f(x) \sin nx\, dx = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx\, dx$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} c_i \left(\frac{\cos nx_i - \cos nx_{i+1}}{n} \right)$$

et $|I_n| \leq \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{p} |c_i| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

Ex6 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$, $x \neq 0$.

<u>Continuité de g</u> : On a montré dans le cours que $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ était continue dès que f l'est. Donc g est continue en tout point $x_0 \neq 0$. Reste le point $x_0 = 0$. D'après la première formule de la moyenne on a : $g(x) = f(c_x)$ où $|c_x| \leq |x|$. Donc $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(c_x) \underset{\text{continuité de } f}{=} f(0)$.

Ainsi g admet un prolongement par continuité en 0 donné par

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

<u>Dérivabilité de $\tilde{g}$</u> : Toujours d'après le cours, $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$, donc g est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$ et de là $\tilde{g}$ aussi (en tout point $x_0 \neq 0$). Reste la dérivabilité en $x_0 = 0$. Pour $x \neq 0$, on a (puisque f' continue)

$$\int_0^x f(t)dt = [t f(t)]_0^x - \int_0^x t f'(t)dt, \text{ (intégration par parties)}$$
$$= x f(x) - \int_0^x t f'(t) dt, \text{ d'où}$$

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x t f'(t)dt. \text{ Donc}$$

$$\frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x} = \frac{g(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x t f'(t)dt.$$

D'après la deuxième formule de la moyenne $\int_0^x t f'(t)dt = f'(c_x)\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 f'(c_x)$.

D'où $\frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{1}{2}f'(c_x)$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x} = \frac{1}{2} f'(0)}$$

Ainsi $\tilde{g}$ est dérivable partout et on a :

$$\tilde{g}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\,dt, & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} f'(0) & \text{, si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons à présent que $\tilde{g}'$ est continue en 0 (la continuité en dehors de 0 est évidente).

Nous avons déjà établi que :

$$\int_0^x f(t)\,dt = x f(x) - \int_0^x t f'(t)\,dt$$

Donc si $x \neq 0$, $\tilde{g}'(x) = \cancel{\frac{1}{x} f(x)} - \cancel{\frac{1}{x} f(x)} + \frac{1}{x^2} \int_0^x t f'(t)\,dt$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x t f'(t)\,dt$$

$$= \frac{f'(c_x)}{x^2} \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2} f'(c_x), \ |c_x| \leq |x|$$

par la deuxième formule de la moyenne ;

d'où $\lim_{x \to 0} \tilde{g}'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} f'(c_x) = \frac{1}{2} f'(0)$

car f' est continue.