Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: Déterminer la solution générale pour chacune des équations différentielles suivantes:

$$x\,(x-1)\,y'(x) - (3x-1)\,y(x) = 0 \quad \text{(à variables séparables)}$$

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0 \quad \text{(homogène)}$$

Exercice 2: Déterminer la solution générale pour chacune des équations différentielles suivantes:

$$xy'(x) - 2(x+1)y(x) = 2e^{2x}$$

$$x(x^2+1)y'(x) - 2y(x) = x^3(x-1)^2e^{-x}$$

Exercice 3: Résoudre les problèmes de Cauchy suivants et indiquer le plus grand intervalle d'existence :

$$(P_1)\begin{cases} y'(t) + (\tan t)y(t) = \sin t \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} x(1+\ln^2 x)y'(x) + (2\ln x)y(x) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4: Déterminer toutes les fonctions appartenant à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifiant

$$f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

(Indication : poser $C = \int_0^1 f(t)\,dt$ car c'est une constante...)

Exercice 5: Le nombre d'individus d'une population est désigné par $P(t)$ à l'instant t. L'accroissement relatif est modélisé par $P'(t)$. On suppose que cet accroissement est proportionnel à $P(t)$. Si on sait que cette population double en 50 ans, en combien de temps triple-t-elle? (l'unité de temps est l'année).

Exercice 6: Trouver toutes les fonctions $y(.) \in C^1(\mathbb{R})$ solutions de l'équation

$$y'(x) = |y(x) - xy^2(x)|$$

Indication : on peut commencer par utiliser les changements de fonctions comme dans une équation de Bernoulli.

Analyse 2 - 1ère année M.I - 2017/2018

Fiche de T.D N° 3 - Corrigé.

(Quelques indications sur les réponses).

Ex 1: 1°/ Résoudre : $x(x-1)y'(x)-(3x-1)y(x)=0$.

On peut l'écrire sous la forme : $\dfrac{y'(x)}{y(x)}=\dfrac{3x-1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}$

$\Rightarrow \ln|y(x)|=\ln|x|+2\ln|x-1|+k$

$\Rightarrow \boxed{y(x)=C\,x(x-1)^2}$, C constante réelle.

2°/ Résoudre $x^2+y^2-2xyy'=0$

On peut la transformer en :

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f(x,y).$$

La fonction f vérifie la condition d'homogénéité :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}{2\lambda^2xy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f(x,y),\ \forall\lambda\neq 0.$$

Posons alors $y=xz$ (z la nouvelle fonction de x).

D'où $xz'+z=\dfrac{x^2+x^2z^2}{2x^2z}=\dfrac{1+z^2}{2z}$

$\Rightarrow xz'=\dfrac{1+z^2}{2z}-z=\dfrac{1-z^2}{2z}$

$\Rightarrow \dfrac{2zz'}{1-z^2}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow \ln|1-z^2|=-\ln|x|+k$

$\Rightarrow 1-z^2=\dfrac{C}{x}\Rightarrow x^2-x^2z^2=Cx$

ou bien $x^2-y^2=Cx\Rightarrow y^2=x^2-Cx$.

et donc $\boxed{y(x)=\pm\sqrt{x^2-Cx}}$ C : constante réelle.

Ex2 : 1°/ $x y' - 2(x+1)y = 2 e^{2x}$.

$$\Rightarrow y' + \left(-2 - \frac{2}{x}\right) y = \frac{2}{x} e^{2x}$$

Cherchons une primitive de la fonction $x \longmapsto -2 - \frac{2}{x}$; on peut voir facilement que $-2x - 2\ln x$ en est une. Multiplions la dernière équation par $e^{-2x-2\ln x} = \frac{1}{x^2} e^{-2x}$:

(Cette méthode est celle du facteur intégrant qui est ici $\frac{1}{x^2} e^{-2x}$)

$$\frac{1}{x^2} e^{-2x} y' + \left(-2 - \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{-2x} y = \frac{2}{x^3} e^{-2x+2x} = \frac{2}{x^3}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} e^{-2x} y\right)' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} e^{-2x} y = \frac{-1}{x^2} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C x^2 e^{2x} - e^{2x}}$$

2°/ $x(x^2+1) y' - 2y = x^3 (x-1)^2 e^{-x}$

* l'éq. homogène associée : $x(x^2+1) y_0' - 2y_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{y_0'}{y_0} = \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \ln|y_0(x)| = 2\ln|x| - \ln(x^2+1) + k$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = C \frac{x^2}{x^2+1}}$$

* Solution particulière par "variation de la constante" : $y_p(x) = C(x) \frac{x^2}{x^2+1}$

$$y_p'(x) = C'(x) \frac{x^2}{x^2+1} + C(x) \left(\frac{+2x}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow x(x^2+1) y_p' - 2y_p = x^3 C'(x) + \cancel{C(x) \frac{2x^2}{x^2+1}} - \cancel{2C(x) \frac{x^2}{x^2+1}} = x^3 (x-1)^2 e^{-x}.$$

$$\Rightarrow \boxed{C'(x) = (x-1)^2 e^{-x}} \Rightarrow C(x) = -e^{-x}(x^2+1)$$

* Solution générale : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$\boxed{y(x) = C \frac{x^2}{x^2+1} - x^2 e^{-x}}$$

Ex3 : 1°/ (P_1) $\begin{cases} y'(t) + (\tan(t))\, y(t) = \sin t \\ y(0) = 0 . \end{cases}$

Rappelons que $tg(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ et donc $\int tg(t)dt = -\ln|\cos t| + k$

Multiplions l'équation par le facteur intégrant $e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{|\cos t|}$.

Remarquons que dans un petit voisinage de 0, $\cos t > 0$. D'où

$$\frac{1}{\cos t} y' + \frac{\sin t}{\cos^2 t} y = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\cos t} y\right)' = \frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow \frac{1}{\cos t} y(t) = C - \ln(\cos t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C \cos t - \cos t \ln(\cos t)$$

qui est la solution générale (dans un petit voisinage de 0).

Avec $y(0)=0$ on aura $0 = C.1 - 1.\ln(1) \Rightarrow C = 0$

Donc la solution cherchée est $\boxed{y(t) = -(\cos t) \ln(\cos t)}$

Le plus grand intervalle d'existence est celui où $\cos t > 0$ càd

$$\boxed{I =]-\pi/2, \pi/2[}$$

2°/ (P_2) $\begin{cases} x(1+\ln^2 x)\, y'(x) + 2(\ln x)\, y(x) = 1 . \\ y(1) = 1 . \end{cases}$

Le facteur intégrant est $(1+\ln^2 x)$; l'équation peut s'écrire :

$$(1+\ln^2 x) y' + \frac{2\ln x}{x} y = \frac{1}{x}.$$

$$\Rightarrow \left[(1+\ln^2 x) y\right]' = \frac{1}{x} \Rightarrow (1+\ln^2 x) y(x) = \ln x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{C + \ln x}{1+\ln^2 x}} \text{ (dans un voisinage de 1).}$$

Avec $y(1)=1$ on aura : $1 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 1$

d'où $\boxed{y(x) = \frac{1+\ln x}{1+\ln^2 x}}$ dans $\boxed{I =]0, +\infty[}$

Ex4 : Cherchons $f \in C^1(\mathbb{R})$ tq $f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$

Posons $C_f = \int_0^1 f(t)\,dt$ (c'est une constante dépendant de f !)

D'où $f'(x) + f(x) = C_f \Rightarrow \left(e^x f(x)\right)' = C_f e^x$

$\Rightarrow e^x f(x) = C_f e^x + k \Rightarrow \boxed{f(x) = C_f + k e^{-x}}$

or : $C_f = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (C_f + k e^{-t})\,dt = C_f + k \int_0^1 e^{-t}\,dt$

$\Rightarrow k(1 - e^{-1}) = 0 \Rightarrow \boxed{k = 0}$

Donc $\boxed{f(x) = C_f}$ càd f est une fonction constante.

Ex5 : L'accroissement (modélisé par $P'(t)$) proportionnel à $P(t)$ veut dire que $P'(t) = \lambda P(t)$ (λ : constante de proportionnalité)

D'où $P(t) = P(t_0) e^{\lambda(t - t_0)}$ où t_0 est un instant initial de recensement.

. La population double en 50 ans veut dire que

$$P(t_0 + 50) = 2 P(t_0)$$

$$\Rightarrow P(t_0) e^{\lambda \cdot 50} = 2 P(t_0) \Rightarrow e^{50\lambda} = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{50}}$$

. Cherchons le temps qu'il faut pour qu'elle triple :

ce temps est ~~x~~ : $P(t_0 + x) = 3 P(t_0)$

donc $P(t_0) e^{\lambda x} = 3 P(t_0) \Rightarrow e^{\lambda x} = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 3}{\lambda}}$

$$\boxed{x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot 50} \qquad x \simeq 79{,}25$$

(79 ans et 03 mois).

Rque : Il est clair que $P(t_0) \neq 0$!

Ex 6 : Résoudre dans $C^1(\mathbb{R})$ l'équation : (E) $y'(x) = |y(x) - x y^2(x)|$.

Remarquons tout d'abord que la fonction $y_0(x) \equiv 0$ est une solution de (E) de classe C^1 et définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous allons montrer que c'est la seule qui répond à toutes ces conditions !

Divisons par $y^2(x)$ (on suppose bien sûr que $y \not\equiv 0$).

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \left| \frac{1}{y(x)} - x \right| .$$

Posons $z(x) = \frac{1}{y(x)} - x$, d'où $z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} - 1$, ou encore

$$\boxed{z'(x) + |z(x)| = -1} \quad \left(\text{et donc } \boxed{y(x) = \frac{1}{x + z(x)}}\right).$$

1/ Supposons $z(x) \geq 0$: (au moins sur un intervalle ouvert non-vide).

L'équation de z devient $z'(x) + z(x) = 1$

$$\Longrightarrow \boxed{z(x) = k_1 e^{-x} - 1}$$

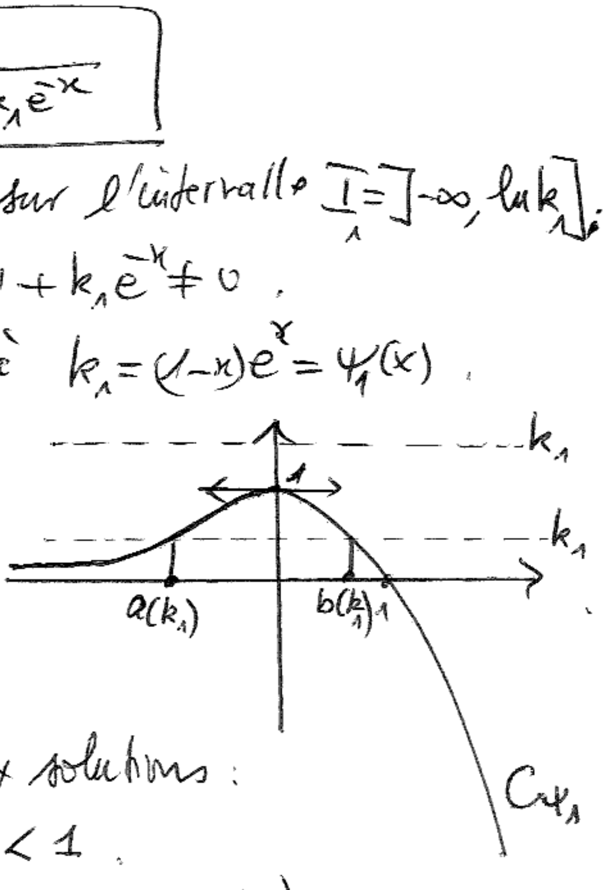
On doit prendre la constante $k_1 > 0$, sinon on sera en contradiction avec $z(x) \geq 0$. ~~Aussi~~ $z(x) \geq 0 \iff x \leq \ln k_1$. Posons

$$\boxed{y_1(x) = \frac{1}{x - 1 + k_1 e^{-x}}}$$

y_1 est une solution de (E) mais seulement sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, \ln k_1]$, bien sûr à condition que sur I_1 on ait $x - 1 + k_1 e^{-x} \neq 0$.

L'équation $x - 1 + k_1 e^{-x} = 0$ est équivalente à $k_1 = (1-x)e^{x} = \psi_1(x)$.

Traçons le graphe de ψ_1 :



Donc : • si $k_1 > 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi_1(x) \neq k_1$

• si $k_1 = 1$, alors $\psi_1(x) = 1 \iff x = 0$

• si $0 < k_1 < 1$, alors $\psi_1(x) = k_1$ possède deux solutions :

$$a(k_1) < 0 \quad \text{et} \quad 0 < b(k_1) < 1 .$$

(Remarquons que $\ln k_1 < b(k_1)$)(et $a(k_1) < \ln k_1$)

Ainsi : • Si $k_1 > 1$: $y_1(\cdot)$ est solution de (E) sur $I_1 =]-\infty, \ln k_1]$

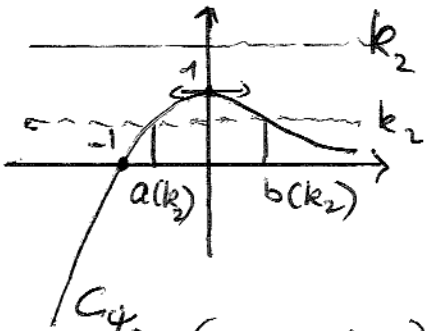
• Si $k_1 = 1$: $y_1(\cdot)$ " " " $I_1 =]-\infty, 0[$

• Si $0 < k_1 < 1$: $y_1(\cdot)$ " " " $\tilde{I}_1 =]-\infty, \ln k_1] \setminus \{a(k_1)\}$

Conclusion de cette étude : on ne peut fabriquer une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier uniquement avec $z(x) \geq 0$.

2°/ Supposons $z(x) \leq 0$: l'équation de z est : $z'(x) - z(x) = -1$
et donc $z(x) = 1 - k_2 e^{x}$ $(k_2 > 0)$

Posons $\boxed{y_2(x) = \dfrac{1}{x+1-k_2 e^{x}}}$



Même étude que pour y_1 : $k_2 = (x+1)e^{-x} = \varphi_2(x)$

$\left(a(k_2) < -\ln k_2\right)$

• Si $k_2 > 1$: $y_2(\cdot)$ est sol. de E sur $I_2 = [-\ln k_2, +\infty[$

• Si $k_2 = 1$: " " " $I_2 =]0, +\infty[$

• Si $0 < k_2 < 1$: " " " $\tilde{I}_2 = [-\ln k_2, +\infty[\setminus \{b(k_2)\}$.

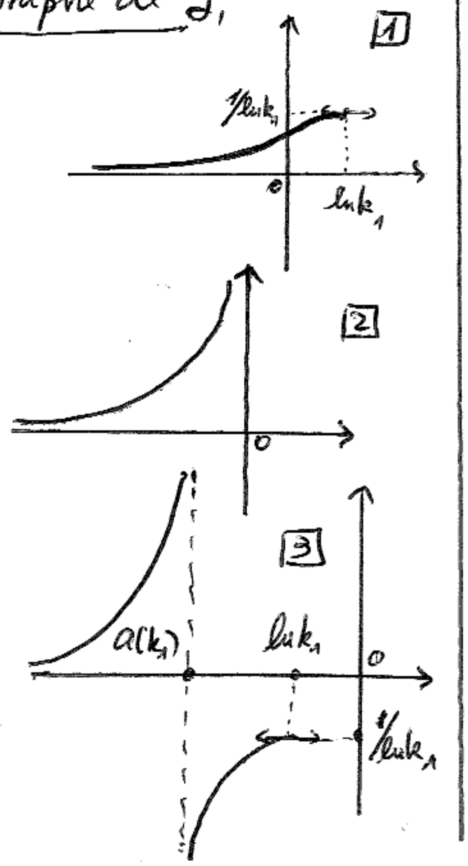
Ainsi, la même conclusion est valable pour y_2.

Graphe de y_1

$k_1 > 1$

$k_1 = 1$

$0 < k_1 < 1$

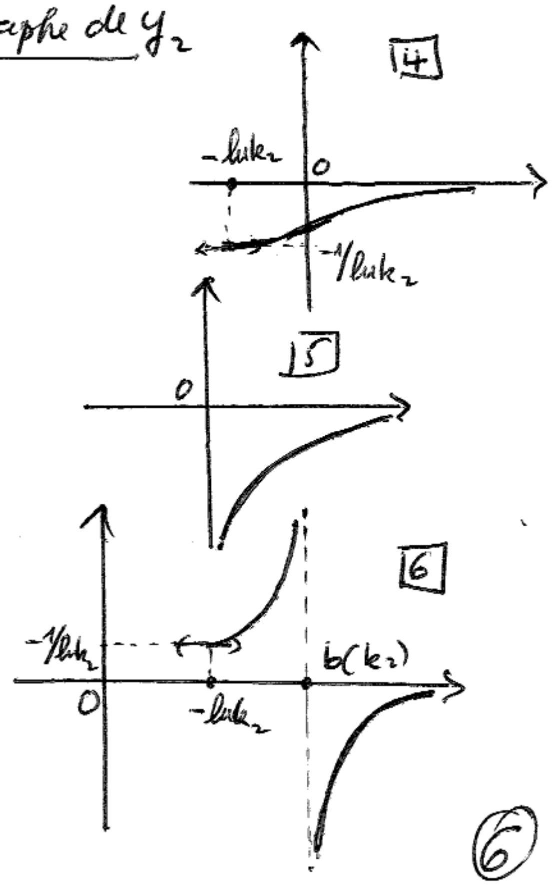


Graphe de y_2

$k_2 > 1$

$k_2 = 1$

$0 < k_2 < 1$



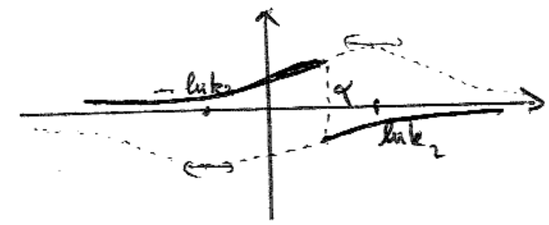
3°/ On peut essayer de voir si on peut recoller des "morceaux" de y_1 et y_2 afin de fabriquer une solution de (E) qui serait définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On voit bien d'après les graphes $\boxed{1}$ à $\boxed{6}$ que ceci est impossible !

Cela montre donc que l'unique solution dans $C^1(\mathbb{R})$ est bien $y_0(x) = 0$!

Néanmoins, on peut fabriquer des solutions ayant un <u>seul</u> point de discontinuité, noté par exemple α, càd définies sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. En voici quelques cas.

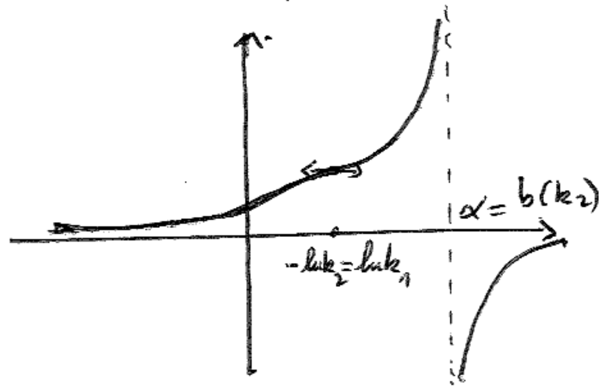
* Choisir k_1, k_2 tels que $-\ln k_2 \leq \alpha \leq \ln k_1$ et utiliser $\boxed{1}$ et $\boxed{4}$.

$$y_{\alpha,k_1,k_2}(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \leq \alpha \\ y_2(x) & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$



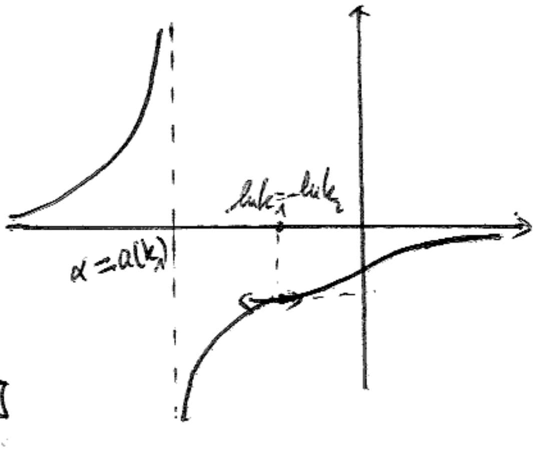
* Choisir k_2 tq $b(k_2) = \alpha$ et $k_1 k_2 = 1$ pour recoller $\boxed{1}$ et $\boxed{6}$:

$$y_{\alpha,k_1,k_2}(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \leq \ln k_1 \\ y_2(x) & \text{si } x \geq \ln k_1 \text{ et } x \neq \alpha \end{cases}$$



* choisir k_1 tq $a(k_1) = \alpha$ et $k_1 k_2 = 1$ pour recoller $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$:

$$y_{\alpha,k_1,k_2}(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \leq \ln k_1 \ (x \neq \alpha) \\ y_2(x) & \text{si } x \geq \ln k_1 \end{cases}$$



* Si $k_1 = k_2 = 1$ on peut utiliser $\boxed{2}$ et $\boxed{5}$ avec $\alpha = 0$