Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Epreuve de rattrapage du contrôle.
Dimanche 15/04/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (07pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + x^3\varepsilon(x)$$

avec des coefficients à déterminer. On suppose que f vérifie l'équation

$$f(f(x)) = f(x - x^2)$$

1. A quelle condition sur les coefficients peut-on déduire le développement de $f(f(x))$ à partir du développement de f.
2. Utiliser ce qui précède pour calculer a, b, c, d.
3. En déduire, selon les solutions trouvées, l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f. Etudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 2: (06pts) Soient $\alpha, \beta > 0$ deux paramètres réels. Calculer, en discutant suivant les valeurs des paramètres, la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}$$

Exercice 3: (07pts) On considère la fonction

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + x + 1}$$

A l'aide d'un développement asymptotique de g au voisinage de $\pm\infty$, déterminer l'équation de l'asymptote oblique ainsi que la position de la courbe de g par rapport à cette asymptote.

On donne le développement suivant au voisinage de 0 :

$$\ln(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 2. (2017/2018)

Module: « Analyse 2 » - Rattrapage du Contrôle.

Corrigé.

Exercice 1: (07pts) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty$.

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + x^3 \varepsilon_0(x), \quad x \in V(0).$$

1°/ Pour déduire le DL_0 de $f(f(x))$ à partir de celui de $f(x)$ il faut que $f(0) = 0$ càd $\boxed{a = 0}$. 0,1

2°/ Calcul de b, c, d : $f(f(x)) = f(x - x^2)$.

Calculons les $DL_0(3)$ pour chacun des membres de cette équation.

$$f(f(x)) = b(bx + cx^2 + dx^3) + c(bx + cx^2 + dx^3)^2 + d(bx + cx^2 + dx^3)^3 + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$= b^2 x + (bc + cb^2)x^2 + (bd + 2bc^2 + db^3)x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$ 1

$$f(x - x^2) = b(x - x^2) + c(x - x^2)^2 + d(x - x^2)^3 + x^3 \varepsilon_3(x)$$

$$= bx + (-b + c)x^2 + (-2c + d)x^3 \varepsilon_4(x)$$ 1

L'unicité du DL implique que:

$$\begin{cases} b^2 = b \\ bc + cb^2 = -b + c \\ bd + 2bc^2 + db^3 = -2c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \downarrow \\ c = 0 \\ \downarrow \\ d = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 1 \\ \downarrow \\ c = -1 \\ \downarrow \\ d = 0 \end{cases}$$ 0,1 0,1 0,1

On aura donc deux solutions:

$$\boxed{f(x) = x^3 \varepsilon(x)} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{f(x) = x - x^2 + x^3 \varepsilon(x)}$$

3°/ Eq. de la dte tangente:

1^{er} cas: $f(x) = x^3 \varepsilon(x)$, l'équation de la dte tangente en 0 est $\boxed{y = 0}$.

Mais on ne peut pas étudier la position de C_f par rapport à cette droite tangente car on n'a aucune idée sur le signe de $\varepsilon(x)$. 1,5

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: $f(x) = x - x^2 + x^3 \varepsilon(x)$.

l'équation de la dte tangente en 0 est $\boxed{y = x}$ 1,5

On a $f(x) - x = -x^2 + x^3 \varepsilon(x) = -x^2(1 - x\,\varepsilon(x))$.

Pour x petit $1 - x\,\varepsilon(x) > 0$ et donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $-x^2 \leq 0$. Donc C_f se situe en <u>dessous</u> de la tangente.

<u>Exercice 2</u> : (06 pts) $\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\beta} = e^{n^\beta \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)}$ 1

D'après le DL de $\ln(1+t)$, on peut écrire :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \frac{1}{3n^{3\alpha}} + \frac{1}{n^{3\alpha}}\varepsilon\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n \to +\infty)$$ 1

$$\Rightarrow n^\beta \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = n^{\beta - \alpha}\left(1 - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{1}{3n^{2\alpha}} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\varepsilon\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$ 1

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\beta \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^{\beta - \alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > \alpha \\ 1 & \text{si } \beta = \alpha \\ 0 & \text{si } 0 < \beta < \alpha \end{cases}$ 1,5

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > \alpha \\ e & \text{si } \beta = \alpha \\ 1 & \text{si } 0 < \beta < \alpha \end{cases}}$ 1,5

<u>Exercice 3</u> : (07 pts) $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + x + 1}$

Pour déterminer le développement asymptotique en $\pm\infty$, on commence par poser $x = 1/t$ pour ramener le développement à 0.

$$g(1/t) = \frac{\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} - 1}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} = \frac{1 + 2t^2 - t^3}{t(1 + t + t^2)}$$ 1

Notre but étant de déterminer l'équation de l'asymptote, et la position de C_g par rapport à cette asymptote ; on doit calculer le DL_0 de $t\,g(1/t)$ à l'ordre ≥ 2 : on s'arrête à l'ordre 2 si le coefficient de t^2 est $\neq 0$, sinon on continue.

$$\begin{array}{r|l} 1+2t^2-t^3 & 1+t+t^2 \\ \hline -(1+t+t^2) & 1-t+2t^2 \\ \hline -t+t^2-t^3 & \\ -(-t-t^2-t^3) & \\ \hline 2t^2 & \\ -(2t^2+2t^3+2t^4) & \\ \hline -2t^3-2t^4 & \end{array}$$ 1,5

Donc $t\,g(1/t) = 1-t+2t^2+t^2\varepsilon(t)$, $t \in V(0)$

$\Rightarrow g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - 1 + 2t + t\,\varepsilon(t)$

et donc $\boxed{g(x) = x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x)}$ 1,5

. L'équation de l'asymptote oblique ~~est~~ $\boxed{y = x-1}$ car

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) - (x-1) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x)\right) = 0.$ 1

. Pour la position, on étudie le signe de $g(x)-(x-1)$.

$g(x) - (x-1) = \frac{1}{x}\left(2 + \varepsilon(1/x)\right).$

Pour $|x|$ assez grand, on aura $\text{sign}[g(x)-(x-1)] = \text{sign}\left(\frac{1}{x}\right).$ 1

donc * si $x \to +\infty$, C_g est au dessus de l'asymptote. 0,5
فوق

* si $x \to -\infty$, C_g est en dessous de l'asymptote. 0,5
تحت