Université Abou bekr Belkaid Tlemcen — **2017/2018**

Faculté des sciences — **Cours : statistiques**

Département de mathématiques — **MI**

Durée 1h30

Contrôle en statistiques
08/03/2018

Exercice N°1 (8pts)

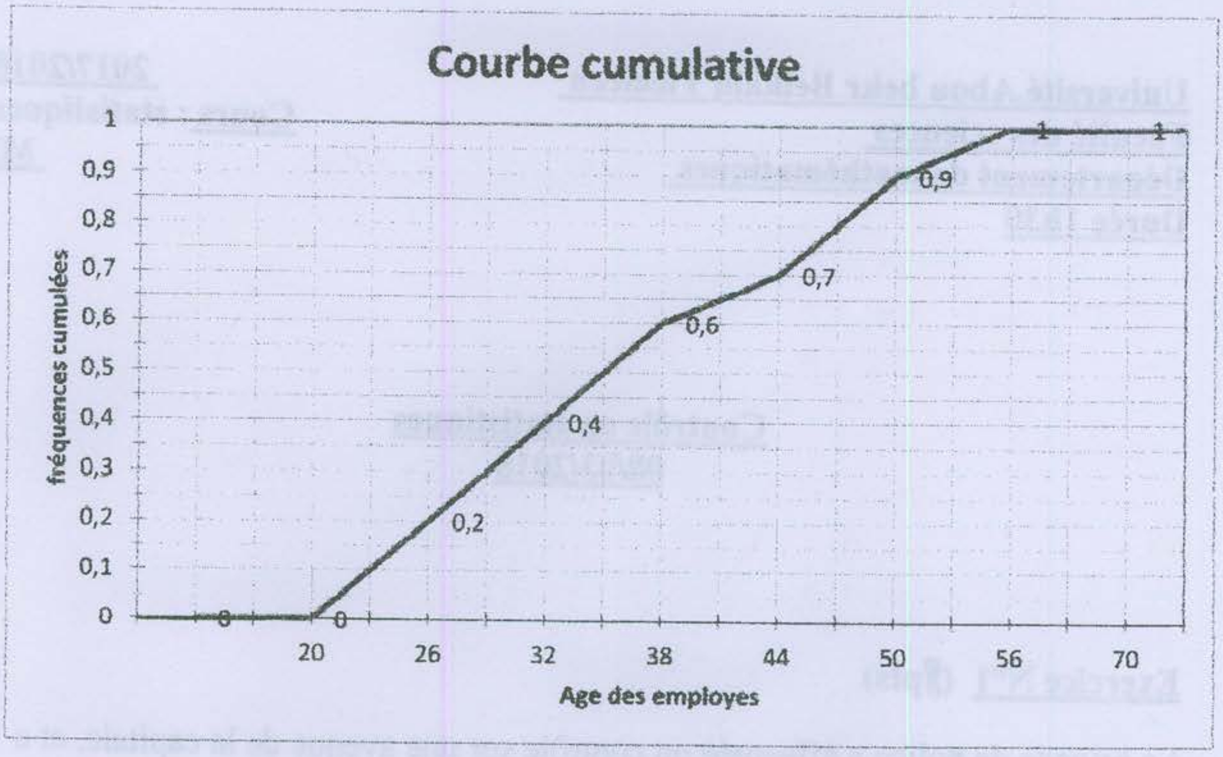
La brigade de police a effectuée un contrôle sur une avenue de la capitale, et a relevé les infractions commises par les conducteurs contrôlés.

Nombre d'infractions	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de conducteurs	100	45	50	55	150	65	35

1. Déterminer la population, la variable X et son type. En déduire les modalités.
2. Soit F la fonction de répartition ou fonction cumulative. Déterminer F. Tracer son graphe.
3. Déterminer à partir du tableau puis à partir du graphe la valeur de la médiane Me.
4. Calculer le mode Mo et la moyenne arithmétique $\overline{X}$.
5. Calculer la variance, en déduire l'écart-type.

Exercice N°2 (6pts)

On réalise une enquête relative à l'âge de chacun des employés d'une entreprise. On obtient la courbe des fréquences cumulées suivante :



1. Déterminer la variable X et son type puis donner le tableau statistique associé. (classes et fréquences)
2. Calculer la médiane.
3. Déterminer la proportion des employés dont l'âge est inférieur ou égal 40 ans.
4. Calculer l'âge moyen des employés de cette entreprise.

Question de cours (6pts)

- Soit la variable statistique discrète qui prend pour valeurs
  2, 2, 4, 4, 5, 13, 13, 13, 14, 14, 14.

Déterminer son 1^{ére} quartile.

- Démontrer que $V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2$ rappel $V(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{X})^2$
- Donnez la formule de la fréquence conditionnelle $f_{i/j}$ et la relation entre la moyenne marginale et moyennes conditionnelles.
- Démontrez que si X et Y sont des variables indépendantes alors cov(X,Y)=0

Bon courage

Solution Proposée du controle de Statistique

08/03/2018

Exercice N°1

1) $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\omega_i \longmapsto x_i = X(\omega_i)$

la Population (Ω) ⟶ les conducteurs
la variable (X) ⟶ le nombre d'infractions (0,5)
type ⟶ quantitatif discret
modalités (x_i) ⟶ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (0,5)

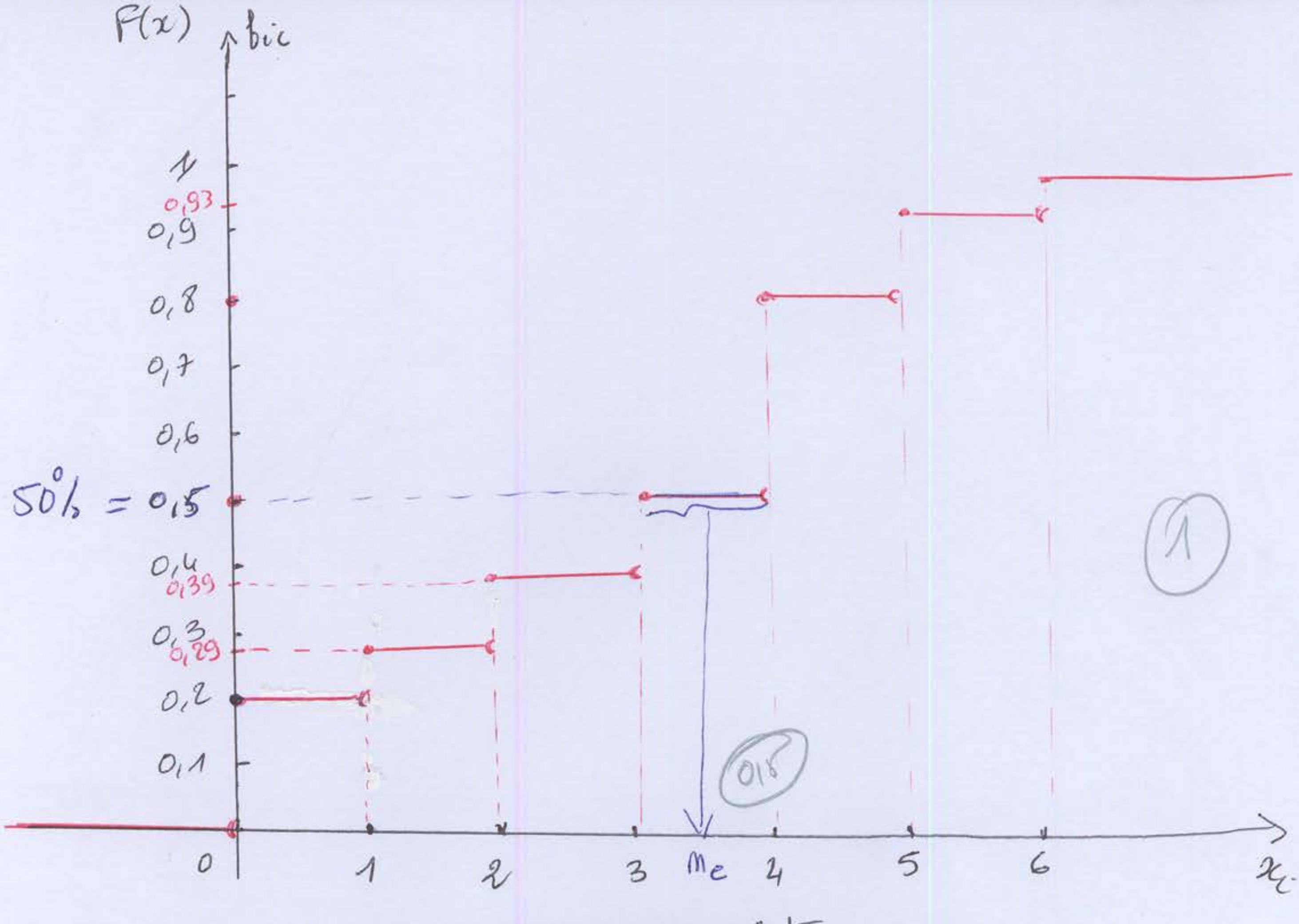
2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	Σ
n_i	100	45	50	55	150	65	35	$N = 500$
f_i	0,2	0,09	0,1	0,11	0,3	0,13	0,07	1
n_{ic}	100	145	195	250	400	465	500	—
f_{ic}	0,2	0,29	0,39	0,5	0,8	0,93	1	—
$n_i \times x_i$	0	45	100	165	600	325	210	1445
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	—
$n_i \times x_i^2$	0	45	200	495	2400	1625	1260	6025

la Fonction cumulative

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i < x} f_i = f_{ic}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,29 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,39 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,5 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,8 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,93 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$ (1)



courbe cumulative
ou courbe des fréquences cumulées

3) Me graphiquement : Voir courbe cumulative 0,5

Me analytiquement ; $Rg(M_e) = \frac{N+1}{2} = \frac{501}{2} = 250,5$
(le rang de la médian

donc $x_{250} \leq M_e \leq x_{251}$ 0,25

$\Rightarrow M_e = \frac{x_{250} + x_{251}}{2} = \frac{3+4}{2} = 3,5$ 0,25 0,5

4) Le mode : $\boxed{M_o = 4}$ car il a le grand effectif 0,5

$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_i n_i \times x_i = \sum_i f_i \times x_i$

$= \frac{1}{500} (0 \times 100 + \dots + 6 \times 35) = \frac{1445}{500} = 2,89$ 0,5

0,25

5) la Variance

$$V(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \quad 0{,}25$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{N} \sum_i n_i \times x_i^2 = \sum_i f_i \times x_i^2$$

$$= \frac{1}{500} (0^2 \times 100 + \dots + 6^2 \times 35)$$

$$= \frac{6025}{500} = 12{,}05 \quad 0{,}5$$

donc $V(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

$$= 12{,}05 - (2{,}89)^2$$

$$= 3{,}698 \quad 0{,}5$$

l'écart-type $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

cl : $\sigma_X = 1{,}922$ $0{,}5$

Exercice N°2/

1) Variable X ⟶ Âge
type ⟶ quantitatif continu) 0,25

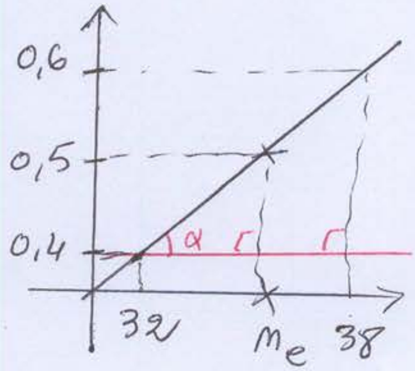
le Tableau :

0,25 c_i	[20, 26[	[26, 32[	[32, 38[	[38, 44[	[44, 50[	[50, 56[
0,5 f_{ic}	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1
0,5 f_i	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1
0,25 x_i	23	29	35	41	47	53
$f_i \times x_i$	4,6	5,8	7	4,1	9,4	5,3

1) La médiane

$tg\,\alpha = \dfrac{0,6-0,4}{38-32} = \dfrac{0,2}{6} = 0,033$ 0,25

$tg\,\alpha = \dfrac{0,5-0,4}{M_e-32} = \dfrac{0,1}{M_e-32}$ 0,5



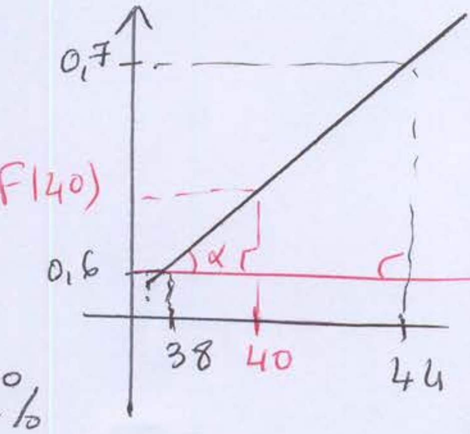
$tg\,\alpha = tg\,\alpha \iff \dfrac{0,1}{M_e-32} = 0,033$

$\Rightarrow M_e = 32 + \dfrac{0,1}{0,033} = 35,03$ (ans) 0,5

2) Déterminer $P(X \leq 40) = F(40)$

$tg\,\alpha = \dfrac{0,7-0,6}{44-38} = \dfrac{0,1}{6} = 0,016$ 0,5

$tg\,\alpha = \dfrac{F(40)-0,6}{40-38} = \dfrac{F(40)-0,6}{2}$ 0,25



$tg\,\alpha = tg\,\alpha \iff \dfrac{F(40)-0,6}{2} = 0,016$

$\Rightarrow F(40) = 0,632 \simeq 63,2\%$

0,5

4) l'âge moyen

$\overline{X} = \sum_i f_i \times x_i = (4,6 + \dots + 5,3) = 36,2$ ans 0,5

Questions de cours

1/ le rang du 1er quartile $Rg(Q_1) = \frac{(N+1)}{4}$ 0,5

$Rg(Q_1) = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow Q_1 = x_3$

$\Rightarrow \boxed{Q_1 = 4}$ 0,5

2/ Mq $V(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

$V(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{X})^2$

0,25 $= \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i^2 - 2x_i\overline{X} + (\overline{X})^2)$

cste 0,25

0,25 $= \sum_i f_i x_i^2 - \sum_i 2 f_i x_i \overline{X} + \sum_i f_i (\overline{X})^2$ cste

def

0,5 $= \overline{X^2} - 2\overline{X} \sum f_i x_i + (\overline{X})^2 \sum_i f_i$

def $= 1$ 0,25

0,5 $= \overline{X^2} - 2\overline{X} . \overline{X} + (\overline{X})^2$

$= \overline{X^2} - 2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ C.Q.F.D

3) $f_{i/j} = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}}$ 0,5

$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_j n_{.j} \overline{X}_{/j}$ ou $\overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_i n_{i.} \overline{Y}_{/i}$

ou

0,5

4) $\underline{m}q$ X et Y indep $\Rightarrow$ $\text{cov}(X,Y) = 0$

$\underline{\underline{hyp}}$ X et Y indep $\Leftrightarrow$ $\forall i,j$ $f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j}$ 0,5

$\underline{Pb}$ $\underline{m}q$ $\text{cov}(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \overline{XY} - \overline{X}.\overline{Y} = 0$ 0,5

$$\text{cov}(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}.\overline{Y}$$

0,5 $$= \sum_i \sum_j f_{ij}\, x_i y_j - \overline{X}.\overline{Y}$$

0,125 hyp

$$\overset{hyp}{=} \sum_i \sum_j f_{i.} \times f_{.j}\, x_i y_j - \overline{X}.\overline{Y}$$

0,125 côté

$$= \left(\sum_i f_{i.}\, x_i\right)\left(\sum_j f_{.j}\, y_j\right) - \overline{X}.\overline{Y}$$

$$= \overline{X}.\overline{Y} - \overline{X}.\overline{Y}$$

$$= 0 \quad \text{CQFD}$$