Université de Tlemcen A.U. 2009/2010

Département de mathématiques.

2ème année MI (Semestre 3).

Partiel d'Algèbre 3

Exercice n°1

Soient $x, a_0, \dots a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ et D_n le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1/ Montrer que $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$.

2/ Calculer D_n.

Exercice n°2

Soit $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$. et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

A est elle diagonalisable, si oui déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice n°3

Soient $v_1, \dots, v_r$ r vecteurs de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants ($r \le$
$A = \| v_1, \dots, v_r \|$ et δ un mineur d'ordre r non nul extrait de A.

Montrer que :

$w \in [v_1, \dots, v_r] \iff$ tous les bordants de δ dans la matrice $B = \| v_1, \dots, v_r, w \|$ sont nuls

Exercice n°4

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de a, b, c, d le système

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = c \\ x + t = d \end{cases}$$

est il compatible.

le 15/01/2009

Bon Courage

Université de Tlemcen

Département de mathématiques

le 21/01/2010

Partiel d'Algèbre 3

durée : 2 heures.

Exercice n° 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calculer $\det A$

Exercice n° 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$

1/ Montrer que $\det A = 0$

2/ Le résultat est il vrai si A est d'ordre pair.

Exercice n° 3

Résoudre selon le paramètre réel m le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

Exercice n° 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $\operatorname{rg} A = r$ on peut extraire de A un mineur δ d'ordre r non nul et tous les bordants de δ dans A sont nuls.

Exercice n° 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

① $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

② $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$

③ $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$

④ $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Indication : montrer que ① ⇒ ② ⇒ ③ ⇒ ④ ⇒ ①

Ex1 : 3pts ; Ex2 : 3pts, Ex3 : 5pts ; Ex4 : 4pts ; Ex5 : 5pts.

Bon Courage

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques.

le 09/01/2013.

Partiel d'Algèbre 3

durée : 2 heures.

Exercice n° 1

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E, F un sous espace vectoriel de E, montrer que :

$$F \subset f(F) \Longrightarrow f(F) = F$$

Exercice n° 2

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f$.

Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice n° 3

Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$

NB : sur la diagonale il y'a $1+x^2$, sur les parallèles à la diagonale il y'a x et ailleurs 0

Exercice n° 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, montrer que si $\operatorname{rg} A = r$, alors on peut extraire de A un mineur δ d'ordre r non nul et tous les bordants de δ dans A sont nuls.

Exercice n° 5

Résoudre selon le paramètre a, le système suivant :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ a^2 x + ay + z = 0 \end{cases}$$

Bon Courage

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques

le 10/12/2013.

Partiel d'Algèbre 3.

Exercice n° ①

durée : 2 heures.

Soient $v_1, \dots, v_r$ r vecteurs de K^n et la matrice $A = \|v_1, \dots, v_r\|$.
Montrer que si on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul, alors la famille $\{v_1, \dots, v_r\}$ est libre.

Exercice n° ②.

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, f un endomorphisme de

1/ Montrer que la famille $\{Id_E, f, f^2, \dots, f^n, \dots, f^{n^2}\}$ est liée ($f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$).

2/ Montrer que si $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$ alors n est pair.

Exercice n° ③.

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$

1/ Montrer que $\det A = 0$

Exercice n° ④.

Soient $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ des déterminants d'ordre n

1/ Montrer que $D_n = (n-1)\Delta_n$; 2/ Montrer que $\Delta_n = -\Delta_{n-1}$

3/ En déduire le calcul de D_n en fonction de n.

Exercice n° ⑤.

Résoudre, suivant les valeurs du paramètre complexe a, le système :

$$\begin{cases} x - ay + a^2 z = a. \\ ax - a^2 y + az = 1 \\ ax + y - a^3 z = 1 \end{cases}$$

Bon Courage

Université de Tlemcen. Le 23/11/2014.

Département de mathématiques.

Partiel d'Algèbre 3

durée : 2 heures

Exercice n° 1 : (5 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x)$ et $d_n(x)$ des déterminants d'ordre n définis par

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix} \quad ; \quad d_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \\ & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix}$$

1°/ Montrer que $D_n(x) = x^{n-1}$

2°/ Montrer que $d_n(x) = D_n(x) + x\, d_{n-1}(x)$

3°/ Déterminer $d_1(x)$, $d_2(x)$ puis $d_n(x)$ en fonction de x.

Exercice n° 2 : (6 pts)

Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m, le système :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

Exercice n° 3 : (4 pts)

Soient $v_1, \dots, v_r$ r vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($r \leq n$) linéairement indépendants.

$A = \| v_1, \dots, v_r \|$; δ un mineur d'ordre r non nul de A.

Montrer que $w \in [v_1, \dots, v_r]$ ssi tous les bordants de δ dans la matrice $B = \| v_1, \dots, v_r, w \|$ sont nuls.

Exercice n° 4 : (2 pts)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$ où I est la matrice identité.

Montrer que n est pair.

Exercice n° 5 : (3 pts).

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E ; montrer que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg} f \qquad (f^2 = f \circ f)$$

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 01/12/2015.

Département de mathématiques.

Partiel d'Algèbre 3

durée : 2 heures.

Exercice n° 1 (6,5 pts)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

1/ Calculer les déterminants suivants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

2/ Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}$$

Exercice n° 2 (6 pts)

1/ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de a, b, c, d ; le système $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = c \\ x + t = d \end{cases}$ est il compatible.

2/ Discuter et résoudre suivant les valeurs de m, le système $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = 1+m. \end{cases}$

Exercice n° 3 (2,5 pts).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P(X) \longmapsto f(P(X)) = P(X) + P'(X).$$

Calculer $\det f$

Exercice n° 4 (2 pts)

Soit E un $\mathbb{R}$ space vectoriel de dimension finie n, F et G 2 sous espaces vectoriels de E ; montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice n° 5 (3 pts).

Soit la matrice $A = \|c_1, c_2, \dots, c_n\| \in \mathcal{M}_n(K)$. telle $\det A = 0$, montrer que $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ est liée

Bon Courage

Université de Tlemcen

Département de mathématiques

Partiel "BIS" d'Algèbre 3

Durée : 2 heures ; pas de calculatrice, pas de portable

Exercice n°1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Montrer que la famille $\{Id_E, f, \dots, f^n, \dots f^{n^2}\}$ est liée.

Exercice n°2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Calculer ${}^tA.A$, en déduire $\det A$

Exercice n°3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; Montrer que $\operatorname{rg} A \geq 2$, pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rg} A = 2$?

Exercice n°4

Soit $D_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$; Montrer que $D_n = D_{n-2}$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Exercice n°5

Soit la matrice $A = \| c_1, c_2, \dots, c_n \| \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\det A = 0$, montrer que $\{c_1, \dots, c_n\}$ est liée.

Exercice n°6

Résoudre suivant le paramètre réel m le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

Barème : Ex1 : 2pts ; Ex2 : 3pts, Ex3 : 3pts ; Ex4 : 4,5pts, Ex5 : 3pts, Ex6 : 4,5pts = 20pts.

Exercice n°7 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur [0,1] et φ l'application définie par $\varphi : E \longrightarrow E$, $f \longmapsto \varphi(f) = F$ où $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1°) Montrer que φ est linéaire, injective et non surjective.

2°) Que peut on dire de dim E ?

Ex7 : 2pts.

Bon Courage, Désolés et toutes nos excuses pour ce contretemps.