

Partiel d'Algèbre 3

Exercice n°1

Soient x, a_0, \dots, a_n des éléments de \mathbb{R} et D_n le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & x & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & -1x \end{vmatrix}$$

(X)

1/ Montrer que $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$.

2/ Calculer D_n .

Exercice n°2

Soit $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$). et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

A est elle diagonalisable, si on détermine une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice n°3

Soient v_1, \dots, v_r vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants ($\Leftrightarrow A = [v_1, \dots, v_r]$ et S un mineur d'ordre r non nul extrait de A).
Montrer que :

$w \in [v_1, \dots, v_r] \Leftrightarrow$ tous les bordants de S dans la matrice $B = [v_1, \dots, v_r, w]$ sont nuls.

Exercice n°4

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de a, b, c, d le système

$$\begin{cases} x+y = a \\ y+z = b \\ z+t = c \\ x+t = d \end{cases}$$

est-il compatible.

Partiel d'Algèbre 3

durée: 2 heures.

Exercice 3°(1)Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

Calculer $\det A$ Exercice 3°(2)Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $t^r A = -A$ 1/ Montrer que $\det A = 0$ 2/ Ce résultat est-il vrai si A est d'ordre pair XExercice 3°(3)Résoudre selon le paramètre réel m le système

$$\begin{cases} x & + y & + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x & - y & + 2z = 0 \\ 2x & - my & + 3z = m+2 \end{cases}$$

Exercice 3°(4)Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que si $\operatorname{rg} A = 2$ on peut extraire 5 dans A dont tous les bordants de A au mineur 5 d'ordre 2 non nul et tous les bordants de A sont nuls.Exercice 3°(5)Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

① $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

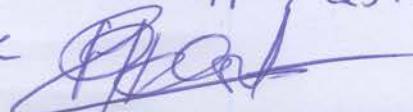
② $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

③ $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

④ $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Indication: montrer que ① \Rightarrow ② \Rightarrow ③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ①

Ex1: 3 pts ; Ex2: 3 pts ; Ex3: 5 pts ; Ex4: 4 pts ; Ex5: 5 pts .

Bon courage 

Partiel d'Algèbre 3

durée: 2 heures.

Exercice n° ①

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E , F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que:

$$F \subset f(F) \implies f(F) = F$$

Exercice n° ②

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f$.
 Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice n° ③

Calculer le déterminant d'ordre n suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & & & \\ x & 1+x^2 & x & & & \\ 0 & x & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & x & & \\ & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

NB: sur la diagonale il y'a $1+x^2$, sur les parallèles à la diagonale il y'a x et ailleurs 0

Exercice n° ④

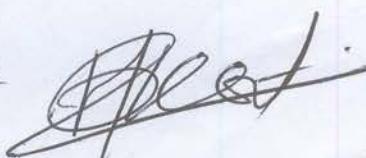
Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}(P_{1,2}(K))$, montrer que si $\operatorname{rg} A = 2$, alors on peut extraire de A un mineur Δ d'ordre 2 non nul et tous les cofacteurs de Δ dans A sont nuls.

Exercice n° ⑤

Répondre selon le paramètre a , le système suivant :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ a^2x + ay + z = 0 \end{cases}$$

Bon courage



Partiel d'Algèbre 3.Exercice n°①

durée : 2 heures.

Soient v_1, \dots, v_r vecteurs de K^n et la matrice $A = [v_1, \dots, v_r]$.
 Montrer que si on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul, alors la famille $\{v_1, \dots, v_r\}$ est libre.

Exercice n°②

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, f un endomorphisme de E .

- 1/ Montrer que la famille $\{I_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}, f^n\}$ est linéaire ($f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$)
- 2/ Montrer que si $\text{Im } f = Kf$ alors n est pair.

Exercice n°③

Soit $A \in M_{(n+1)}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t A = -A$

1/ Montrer que $\det A = 0$

Exercice n°④

Soient $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ des déterminants d'ordre n

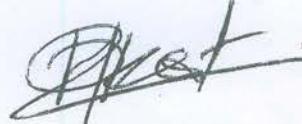
1/ Montrer que $D_n = (n-1)\Delta_n$; 2/ Montrer que $\Delta_n = -\Delta_{n-1}$

3/ En déduire le calcul de D_n en fonction de n .

Exercice n°⑤

Résoudre, suivant les valeurs du paramètre complexe a , le système :

$$\begin{cases} x & -ay + a^2z = a \\ ax & -a^2y + az = 1 \\ ax & +y - a^3z = 1 \end{cases}$$

Bon Courage 

Département de mathématiquesPartiel d'Algèbre 3duree: 2 heuresexercice n°① : (5 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x)$ et $d_n(x)$ des déterminants d'ordre n définis par

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}; \quad d_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}$$

1/ Montrer que $D_n(x) = x^{n-1}$ 2/ Montrer que $d_n(x) = D_n(x) + x d_{n-1}(x)$ 3/ Déterminer $d_1(x)$, $d_2(x)$ puis $d_n(x)$ en fonction de x .exercice n°② : (6 pts)

Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m , le système :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x + y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

exercice n°③ : (4 pts)

Soient v_1, \dots, v_r r vecteurs de \mathbb{R}^n ($r \leq n$) linéairement indépendants.
 $A = \|v_1, \dots, v_r\|$: s un mineur d'ordre r non nul de A .

Montrer que $w \in [v_1, \dots, v_r]$ si tous les bordants de s dans la matrice $B = \|v_1, \dots, v_r, w\|$ sont nuls.

exercice n°④ : (2 pts)

Soit $A \in M(n(\mathbb{R}))$ telle que $A^2 = -I$ où I est la matrice identité.

Montrer que n est pair.

exercice n°⑤ : (3 pts).

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E ; montrer que :

$$\text{Ker } f = \text{Im } f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \dim \text{Ker } f$$

$$(f^2 = f \circ f)$$

Bon courage 

Département de mathématiques.Partiel d'Algèbre 3Exercice n° 1 (6,5 pt)Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

1/ Calculer les déterminants suivants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

durée : 2 heures

2/ Calculer le déterminant d'ordre n suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{vmatrix}$$

Exercice n° 2 (6 pt)1/ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.Pour quelles valeurs de a, b, c, d ; le système

$$\begin{cases} x+y = a \\ y+z = b \\ z+t = c \\ x+t = d \end{cases}$$

est-il compatible.

2/ Discuter et résoudre suivant les valeurs de m , le

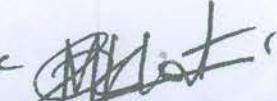
système

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = 1+m. \end{cases}$$

Exercice n° 3 (2,5 pt)Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par :

$$f: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$$

$$P(x) \mapsto f(P(x)) = P(x) + P'(x).$$

(calculer $\det f$)Exercice n° 4 (2 pt)Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie n , F et G 2 sous espaces vectoriels de E ; montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G \neq \{0\}$.Exercice n° 5 (3 pt)Soit la matrice $A = [c_1, c_2, \dots, c_n] \in \mathcal{M}(n, K)$. telle $\det A = 0$, montrer que (c_1, c_2, \dots, c_n) est liéeBon courage 

Département de mathématiques

Partiel "BIS" d'Algèbre 3

Durée: 2 heures; pas de calculatrice, pas de portable.

Exercice n°①

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .

Montrer que la famille $\{I_E, f, \dots, f^{n-1}, \dots, f^{n^2}\}$ est liée.

Exercice n°②

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Calculer ${}^t A \cdot A$, en déduire $\det A$.

Exercice n°③

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; Montrer que $\operatorname{rg} A \geq 2$, pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rg} A = 2$?

Exercice n°④

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & -1 & 0 & \vdots \\ -1 & \vdots & \vdots & 0 \end{vmatrix}$; Montrer que $D_n = D_{n-2}$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Exercice n°⑤

Soit la matrice $A = [c_1, c_2, \dots, c_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\det A = 0$, montrer que $\{c_1, \dots, c_n\}$ est liée.

Exercice n°⑥

Résoudre suivant le paramètre réel m le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (m+1)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

Bon à faire: Ex1: 2 pts ; Ex2: 3 pts, Ex3: 3 pts ; Ex4: 4,5 pts, Ex5: 3 pts, Ex6: 4,5 pts = 20 pts

Exercice n°⑦: Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et Ψ

l'application définie par $\Psi: E \rightarrow E$
 $f \mapsto \Psi(f) = F$ où $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1) Montrer que Ψ est linéaire, injective et non surjective

Ex7: 2 pts

2) Que peut-on dire de $\dim E$?

Bon courage, DeSole's et toutes nos excuses pour ce contre temps.

Dfkhsf