

Epreuve finale de Algèbre 4.

durée : 2 heures.

Exercice n°①

a/ Soit E un K espace vectoriel et $s: E \times E \rightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, montre que

$$s(x, z) = s(y, z) \quad \forall z \in E \Rightarrow x = y$$

b/ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E ,

① Montre qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que:

$$\langle x, f_s(y) \rangle = s(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

② Montre que si v_i et v_j sont 2 vecteurs propres de f_s orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ alors ils sont orthogonaux pour s .

Exercice n°②

Soit $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

a/ Déterminez une base de \mathbb{R}^3 orthogonale pour q .

b/ Déterminez $\text{rg}(q)$, $\text{sign}(q)$ et $I(q)$.

Exercice n°③

Soit (E, q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q , s sa forme polaire, F et G_1 2 sous-espaces vectoriels de E

1/ Montre que $(F+G_1)^\perp = F^\perp \cap G_1^\perp$

2/ Montre que si q est non dégénérée $F^\perp + G_1^\perp = (F \cap G_1)^\perp$ (Utiliser $A^\perp\perp = A$)

Exercice n°④

Soit $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique de \mathbb{R}^2 par

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1+x_2)^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

a/ Déterminez $A = M(q)_{\mathbb{R}}$

b/ Déterminez les valeurs propres de A

c/ En déduire une condition suffisante pour q soit définie positive.

Exercice n°⑤

Bon courage, bonne continuation pour la suite, j'espère que le

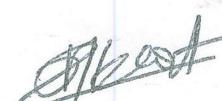
classement que je propose coïncide (c'est le 23) avec la qualification de l'Algérie. Bonnes vacances.

Épreuve finale de "Algèbre 4"Exercice n°(1)

durée: 2 heures.

a/ Soit E un K -space vectoriel et $s: E \times E \rightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, montrer que $[s(x, z) = s(y, z) \quad \forall z \in E] \Rightarrow x = y$.b/ Soit (E, \langle , \rangle) un espace euclidien et q une forme quadratique sur E , on note s la forme polaire de q .① Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que: $\langle x, f_s(y) \rangle = s(x, y) \quad \forall x, y \in E$.② Montrer que si v_i et v_j sont 2 vecteurs propres de f_s orthogonaux pour \langle , \rangle alors ils sont orthogonaux pour s .Exercice n°(2)Soit $q: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto q(x) = \text{Tr}(x)$$

a/ Montrer que q est une forme quadratique, déterminer $M(q)_e$, $\text{sgn}(q)$ et $N(q)$. (e étant la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$).b/ Déterminer une base (v_i) de $M_2(\mathbb{R})$ orthogonale pour q , ainsi qu'une base orthonormée pour q (si elle existe).c/ Déterminer $M(q)v_i$ et vérifier que $M(q)v_i = {}^t P M(q)_e P$ où $P = P_{e \rightarrow v}$.Soit $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.1/ Déterminer e_3 utilisant 2 méthodes différentes $\text{sgn}(q)$ et trouvez $I(q)$.2/ Soit F le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer F^\perp .Exercice n°(3)Construire une matrice symétrique, non diagonale $A \in M_3(\mathbb{R})$ ayant une valeur propre strictement positive et 2 valeurs propres strictement négatives.Exercice n°(4)Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.Bon courage et bonnes vacances 

N.B: Ex1, Ex2, Ex3, Ex4 sur 20 pts; Ex5 sur 1,5 pt.