U. A. B. T. 2015/2016

Département de Mathématiques

Durée: 90 mn

Corrigé de l'examen final d'analyse numérique 2

Exercice 1

Le problème suivant: $y'(t) = \sqrt{y(t)}, \quad t \in [0,1], \quad y(0) = 0$

admet la solution non triviale $y(t) = \left(\frac{1}{2}t\right)^2$.

1. Déterminer la suite engendrée par la méthode d'Euler appliquée à ce problème.

2. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas la convergence de la méthode d'Euler.

Solution

1. La suite engendrée par la méthode d'Euler appliquée au problème donné est définie par:

$y_0 = 0, \quad y_{n+1} = y_n + h\sqrt{y_n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N = \dfrac{1}{h}$

Il est clair que la suite d'Euler se réduit à $y_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

2. On voit bien que la suite précédente ne converge pas vers la solution non triviale, ceci ne contredit pas la convergence de la méthode d'Euler car la fonction $f(y) = \sqrt{y}$ *n'est pas lipschitzienne sur* $[0,1]$, *puisque pour tout* $y > 0$ $\quad \dfrac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ *n'est pas bornée au voisinage de* $y = 0$.

Exercice 2

Considérons la méthode d'Euler appliquée à $y'(t) = f(t, y(t))$.

On pose $e_i = y_i - y(t_i)$. On suppose que $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de constante L.

$f, \dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues et bornées.

1. Montrer l'inégalité $|e_{i+1}| \leq (1 + hL)|e_i| + O(h^2)$.

2. En déduire une majoration de l'erreur dans la méthode d'Euler.

3. En tenant compte des erreurs d'arrondi, estimer le pas optimal h (qui minimise l'erreur) pour la méthode d'Euler.

On donne: $f(t,y) = ty, \quad t \in [0,2] \quad y(0) = 1$

$\delta = 2^{-23}, \quad \exp(2) \approx 7.4, \quad \dfrac{2^{-11}}{\sqrt{37}} \approx 8.03 \times 10^{-5}$

Solution

1. Sachant que $f, \dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues et bornées il vient que* $y''(t) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$ *est continue et bornée.*

On pose $M = \max\limits_{t \in [a,b]} |y''(t)|$.

D'après la formule de Taylor appliquée à la solution $y(t)$ *du problème différentiel on a:*

$$(1) \qquad y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(t_i + \theta h), \qquad \theta \in]0,1[$$

la formule d'Euler donne:

$$(2) \qquad y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)$$

En soustrayant membre à membre (1) et (2) on obtient

$$y(t_{i+1}) - y_{i+1} = y(t_i) - y_i + h\left(f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)\right) + \frac{h^2}{2}y''(t_i + \theta h), \qquad \theta \in]0,1[$$

Comme f est $L-$lipschitienne par rapport à y alors

$$|e_{i+1}| \leq (1+hL)\,|e_i| + M\frac{h^2}{2}$$

D'où l'inégalité demandée.

2. Remarquons d'abord que $e_0 = 0$. Nous avons

$$|e_1| \leq M\frac{h^2}{2}$$
$$|e_2| \leq M\frac{h^2}{2}\,[1+(1+hL)]$$
$$|e_3| \leq M\frac{h^2}{2}\left[1+(1+hL)+(1+hL)^2\right]$$
$$\vdots$$
$$|e_i| \leq M\frac{h^2}{2}\left[1+(1+hL)+\cdots+(1+hL)^{i-1}\right]$$

En utilisant la formule de la somme partielle de la série géométrique on a

$$|e_i| \leq M\frac{h^2}{2}\frac{(1+hL)^i-1}{(1+hL)-1} = \frac{Mh}{2L}\,[(1+hL)^i-1]$$

finalement, sachant que $h = \dfrac{t_i - t_0}{i}$ et que la suite $\left(1+\dfrac{(t_i-t_0)\,L}{i}\right)^i$ est croissante et a pour limite $e^{(t_i-t_0)L}$, alors

$$|e_i| \leq \frac{Mh}{2L}\left[e^{(t_i-t_0)L}-1\right]$$

3. Le pas optimal est $h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$

$y(t) = \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right) \Rightarrow y''(t) = (t^2+1)\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right).$

Il s'en suit que $y'''(t) = te^{\frac{1}{2}t^2}\,(t^2+3)$ et $y''(.)$ est une fonction positive et strictement croissante sur $[0,2]$ donc $M = y''(2) = 5\times 7.4 = 37$.

De ce fait $h = \sqrt{\frac{2^{-22}}{37}} = \dfrac{2^{-11}}{\sqrt{37}} \approx 8.03\times 10^{-5}$

Exercice 3

On considère le problème autonome $y'(t) = F(y)$ et le schéma numérique

$$y_{i+1} = y_i + ahF(y_i) + bhF(y_i + chF(y_i)) \qquad (S)$$

1. Déterminer les coefficients a, b, c pour que le schéma (S) soit d'ordre 2.
2. Déterminer l'intervalle de l'absolue stabilité du schéma (S) (d'ordre 2).

Solution

1. On pose $\phi(y,h) = aF(y) + bF(y+chF(y))$. Le schéma (S) est d'ordre 2 si et seulement si:

$$\begin{cases} \phi(y,0) = F(y) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial h}(y,0) = \frac{1}{2}F^{[1]}(y) \end{cases}$$

Or $\dfrac{\partial\phi}{\partial h}(y,h) = bcF(y)F'(y+chF(y)) \Rightarrow \dfrac{\partial\phi}{\partial h}(y,0) = bcF(y)F'(y)$

et $F^{[1]}(y) = F(y)F'(y)$.

D'où (S) est d'ordre 2 au moins si et seulement si

$$\begin{cases} a+b=1 \\ bc=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ c=\dfrac{1}{2b}, \end{cases} \quad b\in\mathbb{R}^*$$

(S) est-il d'ordre 3?

$F^{[2]}(y) = F(y)(F^{[1]}(y))' = F(y)\left(F'(y)\right)^2 + \left(F(y)\right)^2 F''(y)$

$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(y,h) = bc^2\left(F(y)\right)^2 F''(y+chF(y)) \Rightarrow \dfrac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(y,0) = bc^2\left(F(y)\right)^2 F''(y) \neq \frac{1}{3}\left[F(y)\left(F'(y)\right)^2 + \left(F(y)\right)^2 F''(y)\right]$

En conclusion, (S) ne peut pas être d'ordre 3.

3. Soit $F(y) = -\lambda y, \lambda > 0$

(S) *s'écrit* $y_{i+1} = y_i - (1-b)h\lambda y_i - bh\lambda(y_i - \dfrac{1}{2b}\lambda h y_i) = (1-\lambda h + \dfrac{(\lambda h)^2}{2})y_i$

Par récurrence on obtient

$$y_{i+1} = (1-\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2})^i y_0$$

Par conséquent $\lim\limits_{i\to+\infty} y_i = 0$ *si et seulement si* $\left|1-\lambda h + \dfrac{(\lambda h)^2}{2}\right| < 1$

On pose $x = \lambda h > 0, g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$, *une étude de cette fonction permet d'affirmer que* $|g(x)| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

L'intervalle de stabilité du schéma (S) *est* $h \in \left]0, \dfrac{2}{\lambda}\right[$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y), t\in[0,b] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

où b est un réel > 0 et $f : [0,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t,y) = y$.

1. Montrer que (E) admet une solution unique $y(t)$, donner son expression.

Pour résoudre (E) on propose le schéma suivant:

$$(S) \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}f(t_i,y_i) + \dfrac{h}{2}f(t_i+h, y_i + hf(t_i,y_i)), \qquad i \geq 0 \end{cases}$$

2. Montrer que le schéma (S) est convergent.
3. Montrer que le schéma est d'ordre (au moins) 2.
4. Donner l'expression de y_i en fonction de h et de i.
5. On prend $b = 0.4$. Calculer, en utilisant le schéma (S), une approximation de $y(b)$ pour $h = 0.2$ et $h = 0.1$. Commenter le résultat trouvé.

$$\exp(0.4) \approx 1.4918; (1.105)^4 \approx 1.4909; (1.22)^2 = 1.4884$$

Solution

1. La fonction $f(t,y) = y$ *est continue sur* $[0,b]\times\mathbb{R}$, *lipchitzienne de Constante* $L = 1$ *par rapport à* y, *le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution du problème* (E).

Cette solution est $y(t) = e^t$.

2. On pose $\phi(t,y,h) = \dfrac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$

Remarquons que $\phi(t,y,0) = \dfrac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t,y)\right] = f(t,y)$ *ce qui est équivalent à la consistance du schéma* (S).

$$\begin{aligned}|\phi(t,y_1,h) - \phi(t,y_2,h)| &\leq \frac{1}{2}\left|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right| + \frac{1}{2}\left|f(t+h, y_1 + hf(t,y_1)) - f(t+h, y_2 + hf(t,y_2))\right| \\ &\leq (1 + \frac{1}{2}h)\left|y_1 - y_2\right| \leq (1 + \frac{1}{2}h^*)\left|y_1 - y_2\right| \qquad \forall h \in \left]0, h^*\right[, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donc ϕ *est une fonction lipschitzienne par rapport à* y *et le schéma* (S) *est stable.*
Puisque (S) *est un schéma consistant et stable il est convergent.*
3. (S) *étant consistant, il est d'ordre supérieur ou égal à 1.*
Pour montrer que le schéma (S) *est d'ordre au moins 2, il suffit de vérifier que :*

$$\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,0) = \frac{1}{2}f^{[1]}(t,y)$$

Or $\dfrac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,t) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) + f(t,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right] = \dfrac{1}{2}f^{[1]}(t,y)$
Donc le schéma (S) *est d'ordre au moins 2.*
4. De la définition de (S) *on a*

$$y_{i+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2})y_i$$

alors $\qquad y_i = (1 + h + \dfrac{h^2}{2})^i y_0 = (1 + h + \dfrac{h^2}{2})^i$

5. Pour $h = 0.2$, $\qquad y(0.4) = \exp(0.2) \approx y_2 = (1 + h + \dfrac{h^2}{2})^2 = (1.22)^2 = 1.4884$
L'erreur absolue commise est: $|y(0.4) - y_2| = |1.4918 - 1.4884| = 0.0034$
Pour $h = 0.1$, $\qquad y(0.4) = \exp(0.2) \approx y_4 = (1 + h + \dfrac{h^2}{2})^4 = (1.105)^4 \approx 1.4909$
L'erreur absolue commise est: $|y(0.4) - y_4| = |1.4918 - 1.4909| = 0.0009$
Nous voyons bien que les rapports des erreurs absolues par h^2 *donnent respectivement* $0.0034/0.04 = 0.085$ *et* $0.0009/0.01 = 0.09$ *ce qui confirme que le schéma est d'ordre 2.*