

Epreuve de Logique mathématique

20 Janvier 2016

Durée : 1 h 30 mn

N.B. 2 points pour la rédaction et la présentation de la copie.

Questions de cours (10 points)

1. Citer un exemple familier qui explique la définition de l'implication matérielle.
2. Citer un exemple de proposition logique vraie dans un cadre mathématique donné et fausse dans un autre cadre.
3. Citer un des axiomes de Peano.
4. Enoncer le principe du tiers exclu.
5. Citer la définition de la barre de Pierce.
6. Quel est le connecteur logique qui permet de traduire la différence symétrique entre ensembles ?
7. A quelle année environ remonte la théorie abstraite des ensembles ? Qui en est l'auteur ?
8. Quelle différence y a-t-il entre une démonstration par récurrence simple et une démonstration par récurrence généralisée ?
9. Enoncer le paradoxe de « Achille et la tortue ».

Exercice 1 (5,5 points)

I. Soit la formule propositionnelle

$$P := a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$$

où a et b sont des atomes.

1. Citer une construction de la formule P.
 2. Représenter la construction précédente en arbre.
 3. Quel est l'ordre de la formule P ? Citer clairement la définition de l'ordre.
 4. Dresser la table des valeurs de A. Conclusion ?
- II. Etant données deux formules propositionnelles quelconques A et B, établir que
- i- $\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 - ii- $A \vdash B \Rightarrow A$

Tournez la page s.v.p

Exercice 2 (4,5 points)

Soit $A(.)$ un ion à une place. Considérons la formule prédicative

$$P := A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$$

1. Etudier la nature des diverses occurrences de variable.
2. Sachant que le domaine de l'ion $A(.)$ est $\Omega := \{a, b, c\}$.
 - i- Enumérer en détail, les entrées de la table des valeurs de la formule P .
 - ii- De combien de lignes la TV de la formule P , est-elle formée ? Expliquer pourquoi.
3. Montrer que la formule P est valide.
4. Que peut-on dire de cette formule ?