Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
A.U. 2018/2019
Licence L3

Partiel : Equations Différentielles
03 décembre 2018

1h30

Exercice 1:

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x+\ln y')-y=0.$$

Cette solution est-elle complète?

Exercice 2 :

I) Considérons l'équation différentielle scalaire

$$(E)\quad dx/dt=2t(1+x).$$

1. Sans résoudre, expliquer pourquoi (E) admet une solution unique locale pour toute condition initiale fixée.

2. Par la méthode des k-isoclines, esquisser quelques courbes intégrales de (E) dans un repère orthonormé $(t0x)$.

Mettre en évidence la courbe intégrale $\{x=\phi_0(t)\}$ qui passe par l'origine et la courbe intégrale $\{x=\phi_1(t)\}$ qui passe par le point $(0,-2)$.

II) 1. Transformer le problème suivant

$$(P_u)\quad u'=2(t+2)(u+2),\ u(-2)=-1,$$

en un problème de Cauchy (P_x) à condition initiale nulle à l'origine de variable inconnue x et de variable indépendante t.

2. Définir pour (P_x) un cylindre de sécurité $S_{h,r}$ dans lequel vous définirez la suite des itérations de Picard. Quelle est la plus grande valeur de h que vous pouvez obtenir par cette méthode?

3. Montrez en quoi cette méthode est restrictive, d'abord en examinant votre suite de Picard, ensuite en résolvant soigneusement le problème (P_x).

4. Connaissant à présent la solution $x=\phi_0(t)$ de (P_x), déduire de la première partie de cet exercice, sans intégrer, la solution $x=\phi_1(t)$ telle que $\phi_1(0)=-2$.

Citation : Il n'y a pas de recherche appliquée, mais des applications de la recherche.
Louis Pasteur (1822-1895)

Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2018/2019*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Licence L3

Corrigé du Partiel : Equations Différentielles
du *3 décembre 2018*

Exercice 1: [**6 pts**]
Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x+\ln y') - y = 0.$$

Cette solution est-elle complète?

Solution : L'équation peut-être écrite sous la forme d'une équation de Clairaut

$$(C) \quad \begin{array}{l} y = xy' + \psi(y') \\ \text{où } \psi(y') = y' \ln y'. \end{array}$$

On pose $p := y'$. L'équation (C) devient

$$(C_p) \ \ y = xp + p\ln p.$$

On dérive cette dernière par rapport à x, d'où, après calculs,

$$p'(x + \ln p + 1) = 0.$$

La solution $p' = 0$, i.e. $p = K$ constante arbitraire, conduit, en remplaçant dans (C_p), à la solution générale de (C) : *2 pts*

$$y_g(x) = xK + K\ln K,\ K \in \mathbb{R}_+^*, \text{ (Droites de pente } K).$$

La solution $x + \ln p + 1 = 0$ donne $p = e^{-x-1}$ et conduit, en remplaçant dans (C_p) , à la solution

$$y_s(x) = -e^{-x-1}.$$

C'est une solution singulière, enveloppe de la famille à un paramètre des courbes de la solution générale. *2 pts*

Elle n'est donc obtenue pour aucune valeur de K. La solution générale **n'est pas complète**. *2 pts*

Exercice 2 : [**5.5**+**8.5 pts**]
I) Considérons l'équation différentielle scalaire

$$(E) \quad dx/dt = 2t(1+x).$$

1. Sans résoudre, expliquer pourquoi (E) admet une solution unique locale pour toute condition initiale fixée.

2. Par la méthode des k-isoclines, esquisser quelques courbes intégrales de (E) dans un repère orthonormé $(t0x)$.

Mettre en évidence la courbe intégrale $\{x = \phi_0(t)\}$ qui passe par l'origine et la courbe intégrale $\{x = \phi_1(t)\}$ qui passe par le point $(0, -2)$.

Solution de la partie (I) :

1. Second membre $2t(1+x)$ de (E) étant de classe au moins C^1 par rapport à x et continue par rapport à t, le théorème d'existence et d'unicité permet de conclure. *1pt*

2. Soit $k \in$ R. Le lieu des points de l'espace des phases élargi $(t0x)$ où les courbes intégrales de (E) ont pour pente k est donné par la solutuion de $dx/dt = k$, c'est-à-dire $2t(1+x) = k$.

D'abord, on voit que si $t = 0$ ou $x = -1$, alors $k = 0$ (~~les axes~~). *1pt*

Ensuite on peut voit que les autres isoclines sont données par les hyperboles *1pt*

$$t = \frac{k}{2(1+x)} \text{ (ou si vous préférez } x = \frac{k}{2t} - 1)$$

Sur la figure en dernière page de ce corrigé, on représente quelques isoclines et quelques courbes intégrales. *1pt*

En rouge, sont tracées les solutions qui passent par $(t, x) = (0, 0)$ et $(0, -2)$. *1.5 pts*

II) 1. Transformer le problème suivant

$$(P_u) \;\; u' = 2(t+2)(u+2), \; u(-2) = -1,$$

en un problème de Cauchy (P_x) à condition initiale nulle à l'origine de variable inconnue x et de variable indépendante t.

2. Définir pour (P_x) un cylindre de sécurité $S_{h,r}$ dans lequel vous définirez la suite des itérations de Picard. Quelle est la plus grande valeur de h que vous pouvez obtenir par cette méthode?

3. Montrez en quoi cette méthode est restrictive, d'abord en examinant votre suite de Picard, ensuite en résolvant soigneusement le problème (P_x).

4. Connaissant à présent la solution $x = \phi_0(t)$ de (P_x), déduire de la première partie de cet exercice, sans intégrer, la solution $x = \phi_1(t)$ telle que $\phi_1(0) = -2$.

Solution de la partie (II) :

1. On pose d'abord $y = u + 1$ i.e. $u = y - 1$, d'où $y' = dy/dt = du/dt = 2(+2)(y+1)$ avec $y(-2) = u(-2) + 1$. Le problème (P_u) devient *1pt*

$$(P_y) \;\; dy/dt = 2(t+2)(y+1), \; y(-2) = 0.$$

On change ensuite la variable indépendante en posant $\tau = t + 2$, i.e. $t = \tau - 2$. Soit $x(\tau) := y(t) = y(\tau - 2)$. Sachant que $\frac{dt}{d\tau} = 1$, on a $dx/d\tau = 2\tau(x(\tau) + 1)$. De plus $x(0) = y(-2)$. En renommant t la variable indépendante, on obtient le problème demandé

$$(P_x) \;\; dx/dt = 2t(1+x), \; x(0) = 0,$$

qui n'est autre qu'un problème de Cauchy associé à l'équation différentielle (E) de la première partie. *1pt*

2. Considérons l'ensemble $S_{h,r} = [-h, +h] \times [-r, +r]$. Soit $f(t, x) = 2t(1+x)$.

Pour tout $(x, y) \in S_{h,r}$, $\|f(t, x)\| \leq 2h(1+r) =: M$. L'ensemble $S_{h,r}$ est un cylindre de sécurité si $0 < h \leq \frac{r}{M}$ c'est-à-dire si *0.5 pt*

$$0 < h \leq \sqrt{\frac{r}{2(1+r)}}.$$

Itérations de Picard : Charles Émile Picard, né le 24 juillet 1856 à Paris et mort le 11 décembre 1941 à Paris

$$\Phi_0(t) = 0;\ \Phi_1(t) = 0 + \int_0^t f(s,\Phi_0(s))ds = \int_0^t 2s(1+0)ds = t^2;$$
$$\Phi_2(t) = 0 + \int_0^t f(s,\Phi_1(s))ds = \int_0^t 2s(1+s^2)ds = t^2 + \frac{t^4}{2};$$
$$\Phi_3(t) = 0 + \int_0^t f(s,\Phi_2(s))ds = \int_0^t 2s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}\right)ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6};$$
$$\Phi_4(t) = 0 + \int_0^t f(s,\Phi_3(s))ds = \int_0^t 2s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}+\frac{s^6}{6}\right)ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24}.$$ *1 pt~~s~~*

Nous sommes amenés à vérifier, par récurrence, que *0.5 pt~~s~~*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_n(t) = \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \ldots + \frac{t^{2n}}{n!}$$

C'est clairement vérifié pour $n = 1$. En supposant que cela est vrai pour un certain n, on a

$$\Phi_{n+1}(t) = 0 + \int_0^t f(s,\Phi_n(s))ds = \int_0^t 2s\left(1+\frac{s^2}{1!}+\frac{s^4}{2!}+\frac{s^6}{3!}+\frac{s^8}{4!}+\ldots+\frac{s^{2n}}{n!}\right)ds$$
$$= \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \ldots + \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!}.$$ *0.5 pt~~s~~*

Notez que le calcul est plus rigoureux en écrivant $\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k}}{k!}$,

d'où $\Phi_{n+1}(t) = \int_0^t 2s(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{s^{2k}}{k!})ds = t^2 + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t \frac{2s^{2k+1}}{k!})ds$

$= t^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{2k+2}}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^{2k}}{k!}$.

Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard, la suite des itérations de Picard converge dans le cylindre de sécurité $S_{h,r}$, défini plus haut, vers une la solution unique locale $\Phi(t)$, limite uniforme de la suite.

Dans notre cas,

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(t^2)^k}{k!} = e^{t^2} - 1,\ t \in [-\alpha,\alpha]$$
$$\alpha = \min(\sqrt{\tfrac{r}{2(1+r)}}, 1/K),$$

où $K = 2\sqrt{\frac{r}{2(1+r)}}$ est la constante de Lipschitz. *1 pt*

Rappelons que

$$0 < h \leq \sqrt{\frac{r}{2(1+r)}}$$

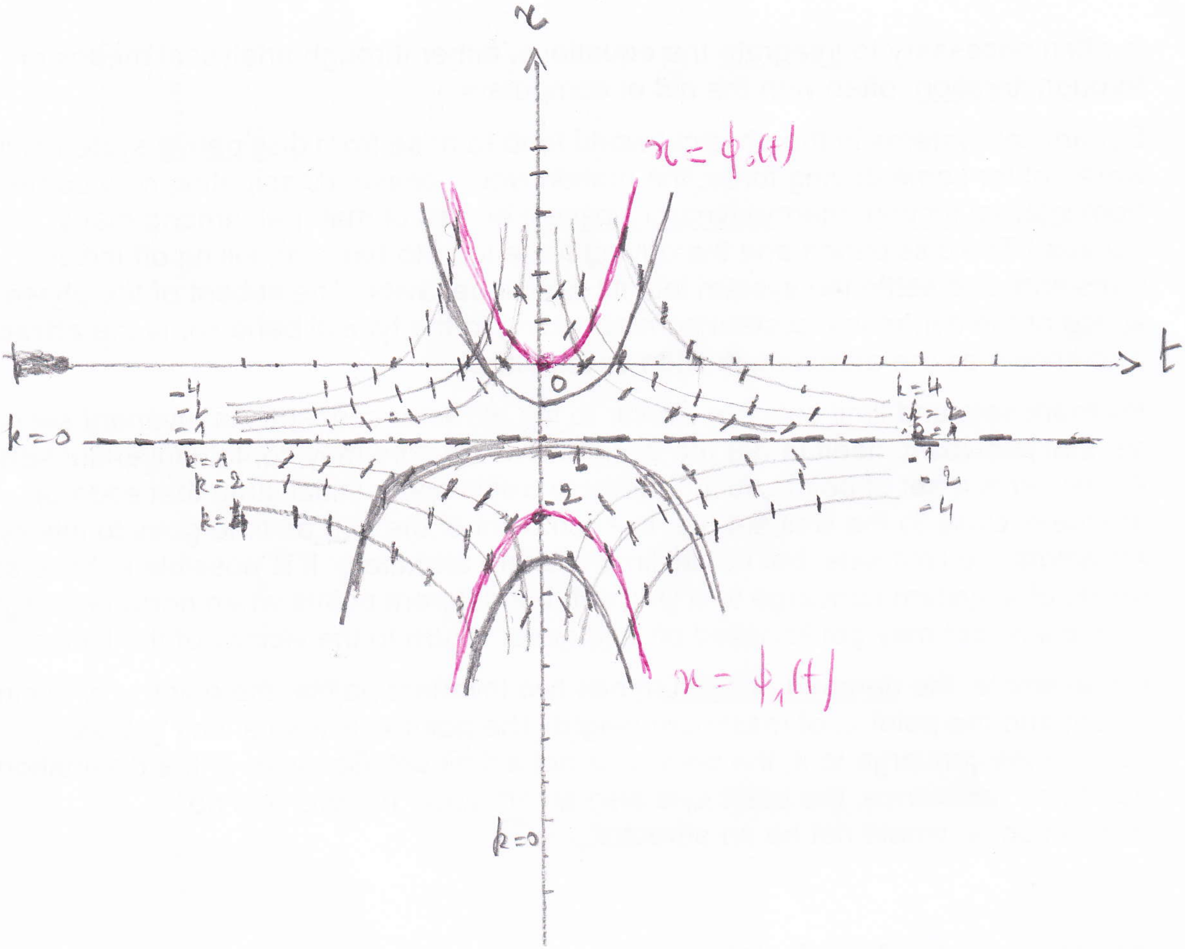
Comme $\frac{d}{dr}\sqrt{\frac{r}{2(1+r)}} > 0$, la plus grande valeur de h est obtenue asymptotiquement quand $r \to +\infty$, i.e. $h = 1/\sqrt{2}$. *0.5 pt*

3. La méthode précédente est restrictive dans le sens où le théorème donne un intervalle local d'existence. Dans ce cas, on voit bien que la suite de Picard converge pour tout t et donne la solution globale $e^{t^2} - 1$. *0.5 pt*

Même si nous ne l'avions pas vu dans la méthode de Picard, dans ce cas le problème de Cauchy ,(P_x) se résoud par simple séparation des variables et on trouve la solution maximale $x(t) = e^{t^2} - 1$, pour tout $t \in$ R. *0.5 pt*

4. D'après la figure des isoclines, la courbe intégrale de la solution $x = \phi_1(t)$ de (E) telle que $\phi_1(0) = -2$ est la symétrique de la solution $x = \phi_0(t) = e^{t^2} - 1$ de (P_x) par rapport à la droite $x = -1$. *1 pt*

D'où $\phi_1(t) = -\phi_0(t) - 2 = -e^{t^2} + 1 - 2 = -e^{t^2} - 1$ ce qui se vérifie par intégration. *0.5 pt*



x
t
$x = \phi_1(t)$
k=0
k=4
k=2
k=1
-1
-2
-4
0
k=0
$x = \phi_1(t)$