

Chapitre II

Logique des prédicats du premier ordre

F. BOUDJERIDA Univ de Jijel 2015– 2016

Introduction

► *Les limites de la logique propositionnelle*

Exp 1 : Prenons la proposition suivante : « $x^2=1$ » est ce que cette proposition est vraie ou faux ?

- On ne peut pas dire que la proposition $x^2=1$ est vraie ou faux tant qu'on ne sait pas ce que vaut x , cette proposition vraie quand $x=1$ ou $x=-1$ et faux dans les autres cas

Introduction

Exp 2 : prenons le raisonnement suivant

Tout homme est mortel,
Socrate est un homme,
donc Socrate est mortel.

► En logique propositionnel

p : “Tout homme est mortel”,

q : “Socrate est un homme”,

r : “donc Socrate est mortel”.

$$p \wedge q \neq r$$

donc on ne peut pas prouver r à partir de $p \wedge q$

Introduction

► nouvelle représentation

“**Pour tout x, si x est un homme alors x est mortel**”,

“Socrate est un homme”,

“donc Socrate est mortel”.

x est un homme est représenté par **H(x)**

x est mortel est représenté par **M(x)**

en logique des prédicats

$$\forall x (H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(\text{Socrate}) \rightarrow M(\text{Socrate})$$

Introduction

- Une telle proposition, dont les valeurs de vérité sont fonction d'une ou plusieurs variables s'appelle **un prédicat**
- On utilise ces propositions dont la valeurs de vérité dépend de variables, qu'on veut manipuler des propriétés générales un peu compliquées et des relations entre variables

Définition 1 : d'un prédicat

fonction propositionnelle qui conduit à une proposition
lorsque les variables sont instanciées
 $P(x_1, \dots, x_n)$ où x_1, \dots, x_n : n variables
indépendantes

Exemple d'un prédicat

- ▶ dans la proposition « Mohamed est grand » on a
 - une variable: Mohamed
 - le prédicat : est grand
- ▶ Dans la proposition « Maya mange une pomme » on a
 - une variable : Maya et un complément pomme
 - le prédicat : mange

Exemple d'un prédicat

- ▶ On pourrait réécrire les propositions précédentes sous une forme qui met en évidence le prédicat, soit :

est grand(Mohamed)

mange(Maya, pomme)

Exemple d'un prédicat

- Suivant ce modèle, la logique des prédicats représente les propositions élémentaires (atomiques) sous la forme :

nom-prédicat(variable 1 , variable 2 , . . .)

où variable 1 , variable 2, . . . sont les variables sur lesquels porte le prédicat (la variable et ses éventuels compléments)

- Un prédicat peut avoir un ou plusieurs arguments qui peuvent être des constantes ou des fonctions

Le langage de la logique des prédicats

une langage L des prédicats du 1^{er} ordre est caractérisé par :

- un ensemble infini dénombrable de symboles **de prédicats**
- un ensemble infini dénombrable de symboles **fonctionnels**
- un ensemble infini dénombrable de **variables**
- un ensemble infini dénombrable de **constantes**
- les connecteurs : \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- les **quantificateurs** \forall , \exists
- les parenthèses

Les expressions du langage

- ▶ L'ensemble des expressions bien formés d'un langage des prédicats du 1^{ere} ordre est formé de termes et de formules

Définition 2 (termes)

- (a) toute variable est un terme*
 - (b) toute constante est un terme*
 - (c) si f est un symbole de fonction d'arité n et si t_1, t_2, \dots, t_n sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un terme.*
 - (d) Rien d'autre n'est un terme, s'il n'est obtenu en vertu des règles (a), (b), et (c)*
- **Exemple** : Les expressions : $f(x)$, $f(g(x))$, $f(x,y)$ sont des termes

Définition 3 (formules)

- a) une formule atomique est une formule
- b) si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ sont des formules
- c) si A est une formule et x une variable alors $\forall x A$, $\exists x A$ sont des formules
- d) Rien d'autre n'est une formule, s'il n'est obtenu en vertu des règles (a), (b), (c) ou (d)

Définition 4 (formule atomique)

- ▶ si t_1, \dots, t_n sont des termes et P est un prédicat alors $P(t_1, \dots, t_n)$ est une formule atomique

Quantifieur existentiel/ Universel

$\exists \rightarrow$ se lit « il existe (en moins) un »

$\forall \rightarrow$ se lit « pour tout », « pour chaque », « pour tous les », « quelque soit »

Exercice

Représentation en logique des prédicats des énoncés suivants :

- ▶ Quelqu'un arrive
- ▶ Personne n'est venu
- ▶ Quelques champignons sont comestibles
- ▶ Tous les petits oiseaux volent
- ▶ Tous les enfants aiment les bonbons
- ▶ Aucun enfant ne déteste les bonbons
- ▶ Tout ce qui brille n'est pas en or ni les chats, ni les chiens ne sont tolérés
 - ▶ chats et chiens doivent avoir une autorisation

Priorité des connecteurs

Pour éviter les ambiguïtés on fixe une priorité des connecteurs logiques

\forall et $\exists > \neg > \wedge > \vee > \Rightarrow > \Leftrightarrow$

- ▶ $\neg a \vee b \Rightarrow g$ signifie $((\neg a) \vee b) \Rightarrow g$
 $\forall x b \Rightarrow g$ signifie $(\forall x b) \Rightarrow g$ qui est différent de
- ▶ $\forall x (b \Rightarrow g)$

Variables libres et liées

Une occurrence d'une variable x dans une formule F est une occurrence liée si cette occurrence apparaît dans une sous-formule de F qui commence par un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$. Sinon, on dit que l'occurrence est libre.

- Une variable est libre dans une formule si elle possède au moins une occurrence libre dans la formule.
- Une formule F est close(fermée) si elle ne possède pas de variables libres.

Variables libres et liées

Exemple1.

Dans la formule $p(x) \vee q(y)$ x et y sont libres.

Dans $\forall x(p(x) \wedge r(y, x))$ x est liée, y est libre

Dans $\exists x(p(x) \vee q(x)) \wedge r(x)$ la variable x joue deux rôles différents, elle est liée dans la partie à gauche de \wedge et libre dans la partie de droite.

- ▶ Bien que cette formule soit syntaxiquement correcte, il est fortement déconseillé de l'écrire ainsi, mieux vaut renommer x en y dans l'une des deux parties.

Variables libres et liées

Exemple2

Dans la formule $\forall x P(x, y, f(x)) \Rightarrow E(g(x, y), x)$,
les deux premières occurrences de x sont
liées, les deux dernières sont libres.

Dans la formule $\forall x (P(x, y, f(x)) \Rightarrow E(g(x, y), x))$,
toutes les occurrences de x sont liées.

Variables libres et liées

ensemble des variables liées: si A est une formule, l'ensemble $\text{Varlie}(A)$ des variables liées de A est défini par :

- ▶ si $A = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ alors $\text{Varlie}(A) = \emptyset$
- ▶ si A est de la forme $B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \rightarrow C$ ou $B \leftrightarrow C$ alors $\text{Varlie}(A) = \text{Varlie}(B) \cup \text{Varlie}(C)$
- ▶ si A est de la forme $\neg B$ alors $\text{Varlie}(A) = \text{Varlie}(B)$
- ▶ si A est de la forme $\forall x B$ ou $\exists x B$ alors $\text{Varlie}(A) = \text{Varlie}(B) \cup \{x\}$

Variables libres et liées

ensemble des variables libres: si A est une formule, l'ensemble $\text{Varlib}(A)$ des variables libres de A est défini par :

- ▶ si $A = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ alors $\text{Varlib}(A) = \text{Var}(A)$
- ▶ si A est de la forme $B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \rightarrow C$ ou $B \leftrightarrow C$ alors $\text{Varlib}(A) = \text{Varlib}(B) \cup \text{Varlib}(C)$
- ▶ si A est de la forme $\neg B$ alors $\text{Varlib}(A) = \text{Varlib}(B)$
- ▶ si A est de la forme $\forall x B$ ou $\exists x B$ alors $\text{Varlib}(A) = \text{Varlib}(B) - \{x\}$

Variables libres et liées

Exemples

- ▶ $A = (p(f(x, y)) \vee \forall z r(a, z))$
- ▶ $\text{Var}(A) ? \text{Varlie}(A) ? \text{Varlib}(A) ?$
- ▶ $B = (\forall x p(x, y, z) \vee \forall z (p(z) \rightarrow r(z)))$
- ▶ $\text{Var}(B) ? \text{Varlie}(B) ? \text{Varlib}(B) ?$
- ▶ $C = \forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow \forall z r(x, y, z))$
- ▶ $\text{Var}(C) ? \text{Varlie}(C) ? \text{Varlib}(C) ?$

Exercices

- ▶ Parmi les formules suivantes lesquelles sont des formules closes ?
- ▶ $\forall i (\text{pluie}(i) \wedge \neg \text{sortir}(i))$
- ▶ $\exists i (\neg \text{pluie}(i) \wedge (\forall i (\text{different}(i, j) \rightarrow \text{pluie}(j))))$
- ▶ $\forall x P(x, y) \wedge \forall y Q(y)$
- ▶

Standardisation des variables

- ▶ Une formule est dite *propre* ou *rectifiée* lorsque l'ensemble de ses variables liées est disjoint de celui des variables libres, et que toutes les occurrences d'une variable liée appartiennent à une même sous-formule de liaison.
- ▶ Pour transformer une formule non propre en une formule propre, il suffit de *standardiser* les variables en les renommant de la manière suivante :
 - renommer les occurrences liées de toute variable libre,
 - donner des noms différents à toutes les variables liées se trouvant dans des sous-formules de liaison différentes.

Standardisation des variables

Exemple Soit la formule non propre

$$A = \forall x (\exists y P(x, y) \Rightarrow \forall z Q(x, y, z) \wedge \forall y \exists x R(f(x), y)).$$

Elle se transforme en la formule propre

$$A' = \forall x (\exists u P(x, u) \Rightarrow \forall z Q(x, y, z) \wedge \forall v \exists w R(f(w), v)).$$

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des variables libres d'une formule propre A . La formule close $\forall x_1 (\dots (\forall x_n A) \dots)$ est appelée *clôture universelle* de A .

Substitution d'une variable par un terme

Soient A une formule dont x est une variable libre et t un terme. La *substitution* de t à x dans A , notée $A(x/t)$, est la formule obtenue en remplaçant chaque occurrence libre de x dans A par t

- a) Si A est une formule atomique, $A(x/t)$ est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de x par t
- b) $A = \neg B$ alors $A(x/t) = \neg B(x/t)$
- c) $A = B_1 \circ B_2$ alors $A(x/t) = B_1(x/t) \circ B_2(x/t)$
- d) $A = QyB$ où $Q = \{\exists, \forall\}$ alors
$$A(x/t) = \begin{cases} QyB & \text{si } x=y \\ QyB(x/t) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Exemple

Soit $A = P(x) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$ et $t = f(y,u)$.

Pour obtenir $A(x / t)$, on renomme d'abord les occurrences liées de x et y , ce qui donne

$$P(x) \vee \forall z_1 \exists z_2 Q(z_1, z_2),$$

puis on effectue la substitution, ce qui donne

$$P f(y,u) \vee \forall z_1 \exists z_2 Q(z_1, z_2)$$

Termes libre pour une variable

Un terme t est libre pour une variable x dans une formule A ssi :

- ▶ t ne contient pas de variable
- ▶ A est une formule atomique
- ▶ $A = \neg B$ et t est libre pour x dans B
- ▶ $A = B1 \circ B2$ et t est libre pour x dans $B1$ et dans $B2$, avec $\circ = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- ▶ $A = QyB$ et $x = y$ ou bien $x \neq y$ et y ne figure pas parmi les variables de t et t est libre pour x dans B , avec $Q = \{\exists, \forall\}$

Exemple

Dans l'exemple $A = \forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$ et $t = f(x, y)$

$$\begin{aligned} A(x/t) &= (\forall x P(x, y))(x/t) \rightarrow (\exists y Q(x, y))(x/t) \\ &= \forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(f(x, y), y) \end{aligned}$$

la variable y de $f(x, y)$ étant liée par le quantifieur \exists après la substitution, le terme $f(x, y)$ n'est pas libre pour x

- ▶ $A(y/t) = (\forall x P(x, y))(y/t) \rightarrow (\exists y Q(x, y))(y/t)$
 $= \forall x P(x, f(x, y)) \rightarrow \exists y Q(x, y)$
- ▶ c'est la variable x de $f(x, y)$ qui va se trouver dans le champ du quantifieur $\forall x$ après la substitution de $f(x, y)$ à y .

Aspect syntaxique

Système formel du calcul des prédicats

- L'alphabet et l'ensemble des fbf sont, respectivement, F' définis précédemment.
- L'ensemble des axiomes est l'ensemble des formules de F' de l'une des formes suivantes :

$$A\ 1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A\ 2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A\ 3 : (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A\ 4 : \forall x A(x) \rightarrow A(t)$$

$$A\ 5 : \forall x (D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow \forall x B)$$

où A , B et C sont des formules quelconques de F' , x une variable, t un terme et D une formule n'ayant pas x comme variable libre.

Aspect syntaxique

Système formel du calcul des prédicats

L'ensemble des règles de déduction est

$A, A \rightarrow B \vdash B$ (*modus ponens*)

$A \vdash \forall x A$ (*généralisation*)

pour toutes formules A, B de F' et pour toute variable x .

Proposition 1

Pour toute formule A du calcul des prédicats du premier ordre, la formule $(A \rightarrow A)$ est un théorème.

Proposition 2 (*Théorème de déduction.*)

Soient A_1, \dots, A_{n-1}, A_n des formules closes et B une formule quelconque, du calcul des prédicats du premier ordre.

si $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B$. alors $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$

Exemple:

Montrer que

sémantique de la logique des prédicats

- ▶ On définit un domaine d'interprétation (un domaine où on interprète les entités syntaxiques),

$I = (D, I_c, I_v)$ où

- D ensemble non vide, domaine d'interprétation

- ▶ A chaque symbole de prédicat on lui attribue une relation dans ce domaine,
- ▶ A chaque symbole de foncteur (fonction) on lui attribue une fonction dans ce domaine,
- ▶ A chaque symbole de constante on lui attribue une constante dans ce domaine,

- I_c la fonction :

$$\begin{array}{ll} D^n & \rightarrow D \\ f & \rightarrow I_c(f) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D^m & \rightarrow \{0, 1\} \\ P & \rightarrow I_c(P) \end{array}$$

- I_v la fonction :

$$\begin{array}{ll} \text{Var} & \rightarrow D \\ x & \rightarrow I_v(x) \end{array}$$

Interprétation d'une formule de la logique des prédicats

A une formule de \mathcal{L}_{PT} , association d'une valeur de vérité $I(A)$ à A

- si x est une variable libre alors $I(x) = I_v(x)$
- $I(f(t_1, \dots, t_n)) = (I_c(f))(I(t_1), \dots, I(t_n))$
- $I(P(t_1, \dots, t_m)) = (I_c(P))(I(t_1), \dots, I(t_m))$
- si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ s'interprètent comme dans la logique propositionnel
- si A est une formule et x une variable alors $I(\forall x A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour tout élément $d \in D$
- si A est une formule et x une variable alors $I(\exists x A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour au moins un élément $d \in D$

F1 : *Masculin*(Jean) **F2** : *Feminin*(Marie)

F3 : *Masculin*(Pierre) **F4** : *Frere*(Jean, Marie)

F5 : $\forall x (Feminin(x) \rightarrow (Masculin(x) \rightarrow \perp))$

F6 : $\forall x (\forall y (Frere(x, y) \rightarrow Masculin(x)))$

F7 : $\forall x (Frere(x, x) \rightarrow \perp)$

Soit $I = (D, I_c, I_v)$ avec $D = \{a, b, c\}$

$I_c(Jean) = a, I_c(Marie) = b, I_c(Pierre) = c$

$I_c(Masculin) = f_{Ma}$ tq si $x = b$ alors $f_{Ma}(x) = 0$ sinon $f_{Ma}(x) = 1$

$I_c(Feminin) = f_{Fe}$ tq si $x = b$ alors $f_{Fe}(x) = 1$ sinon $f_{Fe}(x) = 0$

$I_c(Frere) = f_{Fr}$ tq si $x = a$ et $y = b$ alors $f_{Fr}(x, y) = 1$ sinon $f_{Fr}(x, y) = 0$

$I(\mathbf{F1}), I(\mathbf{F2}), I(\mathbf{F3}), I(\mathbf{F4}), I(\mathbf{F5}), I(\mathbf{F6}), I(\mathbf{F7}) ?$

quelques définitions

$A \in \mathcal{L}_{Pr}$, $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$,

\mathcal{W} : ensemble des interprétations

- A est une tautologie, $\models A$, si $\forall I \in \mathcal{W}$, $I(A) = 1$
- B est une conséquence de A si $\forall I \in \mathcal{W}$ tq $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $A \models B$
- B est une conséquence de \mathcal{F} si $\forall I \in \mathcal{W}$ tq $\forall A \in \mathcal{F}$, $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $\mathcal{F} \models B$
- A est satisfaisable si $\exists I \in \mathcal{W}$ tq $I(A) = 1$
- \mathcal{F} est satisfaisable si $\exists I \in \mathcal{W}$ tq $\forall A \in \mathcal{F}$, $I(A) = 1$
- A est insatisfaisable ou incohérente si $\forall I \in \mathcal{W}$, $I(A) = 0$
- \mathcal{F} est insatisfaisable si $\forall I \in \mathcal{W}$, $\exists A \in \mathcal{F}$ tq $I(A) = 0$

Équivalence. Formes normales

1 – Formules équivalentes

- **Proposition 1** Soit F une formule. On a les équivalences suivantes :

$$\neg(\forall x F) \equiv \exists x \neg F$$

$$\neg(\exists x F) \equiv \forall x \neg F$$

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

Équivalence. Formes normales

1 – Formules équivalentes

Proposition 2 Soit F une formule, la variable x et G la formule dans la quelle ne contient pas x .. On a alors les équivalences suivantes :

- 1) $\forall xG \equiv \exists xG \equiv G$
- 2) $(\forall xF \vee G) \equiv \forall x(F \vee G)$
- 3) $(\forall xF \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G)$
- 4) $(\exists xF \vee G) \equiv \exists x(F \vee G)$
- 5) $(\exists xF \wedge G) \equiv \exists x(F \wedge G)$

- 6) $(G \wedge \forall xF) \equiv \forall x(G \wedge F)$
- 7) $(G \vee \forall xF) \equiv \forall x(G \vee F)$
- 8) $(G \wedge \exists xF) \equiv \exists x(G \wedge F)$
- 9) $(G \vee \exists xF) \equiv \exists x(G \vee F)$
- 10) $(\forall xF \Rightarrow G) \equiv \exists x(F \Rightarrow G)$
- 11) $(\exists xF \Rightarrow G) \equiv \forall x(F \Rightarrow G)$
- 12) $(G \Rightarrow \forall xF) \equiv \forall x(G \Rightarrow F)$
- 13) $(G \Rightarrow \exists xF) \equiv \exists x(G \Rightarrow F)$

Forme normale prénexe

Définition (Forme prénexe) Une formule F est dite en forme prénexe si elle est de la forme

$$Q_1 x_1 \ Q_2 x_2 \ \dots \ Q_n x_n \ F'$$

où chacun des Q_i est soit un quantificateur \forall , soit un quantificateur \exists , et F' est une formule qui ne contient aucun quantificateur.

Proposition *Toute formule F est équivalente à une formule prénexe G .*

Démonstration : Par induction structurelle sur F .

Forme normale prénexe

algorithme

- élimination des connecteurs d'implication et d'équivalence
- renommage des variables (plus de variable libre et liée en même temps)
- suppression des quantificateurs inutiles
- transfert du connecteur de négation immédiatement devant les atomes
- transfert des quantificateurs en tête des formules

Forme normale prénexe

Proposition 3 *Toute formule F est équivalente à une formule prénexe G , où G' est en FNC*

Proposition 4 *Toute formule F est équivalente à une formule prénexe G , où G' est en FND.*

Exercice

Déterminer une formule prénexe équivalente à

1. $(\exists x P(x) \wedge \forall x (\exists y Q(y) \rightarrow R(x)))$.
2. $(\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(x, z) \rightarrow (R(y, z) \vee E(y, z))))$
3. $\forall x \forall y (R(x, y) \wedge \neg E(x, y)) \rightarrow \exists z (E(y, g(x, h(z, z))))$