Chapitre 1

Eléments de Logique

Dr. SEBA

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Boumerdèsï, 35000, Boumerdès, Algérie

Laboratoire des Systèmes Dynamiques, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, B.P. 32 El Alia, 16111 Bab-Ezzouar Alger, Algérie

1 Calcul propositionnel ou calcul assertionnel

1.1 But du calcul assertionnel

Dans le cadre d'une théorie mathématique $\mathfrak{T}$ donnée (par exemple, la théorie des groupes, la théorie des espaces vectoriels, ...), une assertion est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité, à savoir vrai (V en abrégé) ou faux (F en abrégé).

Toutes les phrases d'une théorie ne sont pas des assertions ; il en existe auxquelles il est impossible d'attacher une valeur de vérité ; elles sont dites indécidables.

Une assertion P vraie est appelée proposition ; on dit alors qu'on a P, ou que P est vraie. Selon l'importance qu'on donne à la proposition au sein de la théorie, celle-ci pourra aussi porter le nom de : théorème, corollaire, lemme, ...

Remarque 1.1 ***Dans la plupart des exemples que nous donnerons, ici et dans la suite, $\mathfrak{T}$ sera la théorie des nombres réels.***

Exemples 1.2

- $(3$ ***est un nombre*** $> 0)$ ***est une proposition.***
- $(3$ ***est un nombre*** $< 0)$ ***est une assertion fausse.***
- $(\sqrt{3})$ ***n'est pas une assertion car*** $(\sqrt{3})$ ***n'est même pas une phrase.***
- x ***étant un réel donné,*** $(\sqrt{x} > 0)$ ***est une assertion seulement si*** $x \geq 0$ ***; car si*** $x < 0$, $(\sqrt{x})$ ***n'existe pas et*** $(\sqrt{x} > 0)$ ***n'a donc pas de signification (de sens).***
- ***x étant un réel donné,*** $(x + 5 > 0)$ ***est une proposition si*** $x > -5$***, une assertion fausse si*** $x \leq -5$.

1.2 Assertions équivalentes

Soit $\mathfrak{T}$ une théorie mathématique quelconque ; on appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des assertions de cette théorie.

Soient P et R deux assertions de $\mathcal{A}$. On dit que P est équivalente à R, ou que P et R sont équivalentes, si P et R ont la même valeur de vérité.

Exemples 1.3

- $(5 > 0)$ ***est équivalente à*** $(5$ ***est un nombre*** $> 0)$ ***; par simple réécriture.***
- x ***étant un réel positif ou nul,*** $(x = \sqrt{x}+3)$ ***est équivalente à*** $(x-3 = \sqrt{x})$ ***; par simple transformation.***
- $(5 > 0)$ ***est équivalente à*** $(-7 < O)$ ***; plus généralement deux propositions*** P ***et*** R ***sont toujours équivalentes, et deux assertions fausses le sont également.***
- $(5 > 0)$ ***n'est pas équivalente à*** $(7 < O)$.

1.3 Négation d'une assertion

Si $P \in \mathcal{A}$ la négation de P est l'assertion notée $\neg P$ ou non P ; elle est vraie si et seulement si P est fausse, comme le montre la table de vérité du connecteur $\neg$:

P	$\neg P$
V	**F**
F	**V**

Exemples 1.4

- ***La négation de*** $(3$ ***est un entier*** $> 0)$ ***est*** $(3$ ***n'est pas un entier*** $> 0)$.
- ***La négation de (tout réel*** x ***vérifie l'inégalité*** $x+4 > 0$***) n'est pas (tout réel*** x ***ne vérifie pas l'inégalité*** $x+4 > 0$***), (les deux assertions sont fausses !), mais l'assertion (il existe un réel*** x ***ne vérifiant pas l'inégalité*** $x+4 > 0$***).***

1.4 Connecteurs binaires usuels

Le connecteur $\neg$, introduit dans le paragraphe précédent, est dit unaire car il opère sur une assertion.

Les connecteurs binaires opèrent eux sur deux assertions : ils permettent d'associer à deux assertions P et R de $\mathcal{A}$ de nouvelles assertions de $\mathcal{A}$.

Les principaux connecteurs binaires sont :

- ◇ **le connecteur $\wedge$ de conjonction qui fournit l'assertion $P \wedge R$, appelée P et R (ou conjonction de P et R).**
- ◇ **le connecteur $\vee$ de disjonction (inclusive) qui fournit l'assertion $P \vee R$, appelée P ou R (ou disjonction de P et R).**
- ◇ **le connecteur $\Rightarrow$ d'implication qui fournit l'assertion $P \Rightarrow R$, appelée P implication R, ou encore assertion "P Implique R ".**
- ◇ **le connecteur $\Leftrightarrow$ d'équivalence (logique) qui fournit l'assertion $P \Leftrightarrow R$, appelée P équivalence R, ou encore assertion "P équivalente à R".**

Chacun des connecteurs précédents est défini au moyen de sa table de vérité qui se trouve dans le tableau suivant :

P	R	$P \wedge R$	$P \vee R$	$P \Rightarrow R$	$P \Leftrightarrow R$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Commentaires :

- ◇ **$P \wedge R$ est vraie si et seulement si P et R sont toutes deux vraies ; le "et" est donc pris au sens ordinaire.**
- ◇ **$P \vee R$ est vraie si et seulement si l'une (au moins) des deux assertions est vraie (si l'une des deux assertions est fausse alors l'autre est vraie) ; le "ou" n'est donc pas utilisé au sens exclusif : il n'a pas la signification de "ou bien". On notera encore que $P \vee R$ est fausse si et seulement si P et R sont toutes deux fausses.**
- ◇ **$(P \Rightarrow R)$ est fausse si et seulement si P est vraie et R fausse ; remarquons également que si P est fausse alors $(P \Rightarrow R)$ est vraie.**
- ◇ **($P \Leftrightarrow R$) est vraie si et seulement si P et R sont équivalentes.**

Exemples 1.5

- ○ $(5 > 0et3 > 0)$ ***est vraie ;*** $(5 > 0et3 < 0)$ ***et*** $(5 < 0et3 < 0)$ ***sont fausses.***
- ○ ***L'assertion*** $(5 > 0$ ***et*** $5 = 0)$ ***, qui peut s'écrire plus rapidement*** $(5 \geq 0)$***, est vraie car*** $(5 > 0)$ ***est vraie. Par contre l'assertion*** $(5 < 0$ ***ou*** $5 = 0)$ ***est fausse puisque*** $(5 < 0)$***, et*** $(5 = 0)$ ***sont deux assertions fausses.***
- ○ ***les trois assertions*** $(\sqrt{3} > 0 \Rightarrow 2 > 0)$, $(\sqrt{3} < 0 \Rightarrow 2 > 0)$, $(\sqrt{3} < 0 \Rightarrow 2 < 0)$ ***sont vraies. Par contre l'assertion*** $(\sqrt{3} > 0 \Rightarrow 2 < 0)$ ***est fausse car*** $(\sqrt{3} > 0)$ ***est vraie et*** $(2 < 0)$ ***est fausse.***

Remarque 1.6 ***pour montrer que ($P \Rightarrow R$) est vraie. il suffit de montrer que si P est vraie alors R est vraie (puisque si P est fausse, l'implication sera vraie quelle que soit la valeur de vérité de R). c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que si on a P alors on a R.***

Donc. en pratique, pour montrer que ($P \Rightarrow R$) est vraie dans une théorie. on se place dans le cas où P est vraie. c'est-à-dire on suppose qu'on a P (on dit qu'on prend P comme hypothèse), et on en déduit que R (la conclusion) est vraie ; c'est-à-dire on montre R.

1.5 Quelques règles logiques

Voici quelques résultats très utiles ; ils sont valables pour toutes assertions P, R, S de la classe $\mathcal{A}$ des assertions d'une théorie mathématique quelconque.

(1) $(P \wedge \neg P)$ **est une assertion fausse (loi de non contradiction).**

Les 17 assertions suivantes sont toutes vraies, c'est-à-dire sont des propositions pour toute valeur de vérité de P, R, S (on les appelle des tautologies ou règles logiques).

(2) $(P \vee \neg P)$ **(loi du tiers exclu)**

(3) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ **(double négation)**

(4) $\neg(P \wedge R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg R$ **(négation d'une conjonction)**

(5) $\neg(P \vee R) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg R$ **(négation d'une disjonction)**

(6) $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$, $(P \vee P) \Leftrightarrow P$ **(idempotence de $\wedge$ et de $\vee$)**

(7) $(P \wedge R) \Leftrightarrow (R \wedge P)$, $(P \vee R) \Leftrightarrow (R \vee P)$ **(commutativité de $\wedge$ et de $\vee$)**

(8) $(P \wedge (R \wedge S)) \Leftrightarrow ((P \wedge R) \wedge S)$ **(associativité de $\wedge$)**

$(P \vee (R \vee S)) \Leftrightarrow ((P \vee R) \vee S)$ **(associativité de $\vee$)**

(9) $(P \wedge (R \vee S)) \Leftrightarrow ((P \wedge R) \vee (P \wedge S))$

$(P \vee (R \wedge S)) \Leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (P \vee S))$ **(distributivité)**

(10) $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg R \Rightarrow \neg P)$ **(loi de contraposition)**

l'assertion $(\neg R \Rightarrow \neg P)$ **est appelée contraposée de l'assertion** $(P \Rightarrow R)$

(11) $(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg P \vee R)$

(12) $\neg(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg R)$ **(négation de $(P \Rightarrow R)$)**

(13) $((P \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow S)$ **(transitivité de l'implication)**

(14) $(P \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P))$

(15) $((P \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow S)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow P))$

(16) $(P \wedge (P \Rightarrow R)) \Rightarrow R$ **(règle du détachement ou règle d'inférence)**

(17) $(P \Rightarrow (R \Rightarrow S)) \Leftrightarrow ((P \wedge R) \Rightarrow S))$

(18) $((P \vee R) \Rightarrow S)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow S) \wedge (R \Rightarrow S))$

Ces résultats peuvent s'obtenir à partir des tables de vérité des assertions étudiées. Par exemple, pour montrer (1)**, il suffit de tracer la table de vérité de** $(P \wedge \neg P)$ **et de vérifier qu'il n'y a que des "F" dans la colonne finale.**

P	$\neg P$	$(P \wedge \neg P)$
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**

Montrons maintenant (18) **; il y aura** $2^3 = 8$ **lignes puisque les valeurs de vérité possibles de chacune des** 3 **assertions sont au nombre de** 2**.**

P	R	S	$(P \vee R)$ Ⓡ	Ⓡ $\Rightarrow S$ Ⓢ	$(P \Rightarrow S)$ $\boxdot$	$(R \Rightarrow S)$ $\boxtimes$	$(\boxdot \wedge \boxtimes)$ $\circledast$	Ⓢ $\Leftrightarrow \circledast$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

2 Notion de prédicat ou d'"assertion"

2.1 Définitions et exemples

Dans tout problème mathématique on étudie des propriétés ou prédicats d'objets x, y, $\cdots$, **; plus précisément on a la définition suivante :**

Définition 2.1 ***Soit*** E ***un ensemble ; un prédicat*** A ***d'une variable*** $x \in E$ ***est une application définie sur une partie de*** E ***notée*** $\mathfrak{D}(A)$***, appelée ensemble de définition de*** A***, et à valeurs dans*** $\mathcal{A}$***.*** A ***porte encore le nom de fonction assertionnelle de la variable*** x ***ou, plus rapidement, d'assertion*** $A(x)$ ***(de la variable*** x***).***

Ainsi si a **est un élément de** $\mathfrak{D}(A)$**, en remplaçant** x **par** a**, on obtient une assertion, l'assertion** $A(a)$**.**

Pour simplifier le langage, le prédicat A sera appelé "assertion" $A(x)$ ou encore "assertion" A ; on notera la présence des guillemets.

Définition 2.2 ***On appelle domaine de validité de A, l'ensemble, noté $\mathcal{V}(A)$, des x de $\mathfrak{D}(A)$ pour lesquels $A(x)$ est une proposition. Si F est une partie du domaine de validité de A, on dit que $A(x)$ est vraie sur F ou encore qu'on a $A(x)$ sur F.***

On prendra garde de ne pas confondre $\mathfrak{D}(A)$ et $\mathcal{V}(A)$.

Exemples 2.3

- ***Soit $E = \mathbb{R}$, l'"assertion" $(\sqrt{x} > 2)$ de la variable x est définie sur $[0, +\infty[$ (sauf précision supplémentaire car l'ensemble de définition peut toujours être restreint) ; $(\sqrt{x} > 2)$ n'est pas une assertion si x est un réel < 0. Le domaine de validité de l'"assertion" est $[4, +\infty[$.***
- ***L'"assertion" $(\sqrt{x} > 2)$ supposée définie sur $[5, +\infty[$ n'est vraie que sur $[5, +\infty[$.***
- ***Ici $E = \mathbb{R}^2$. L'"assertion" $A(x)$: $(\sqrt{x+2y} > 2)$, des variables x et y, a pour ensemble de définition le demi-plan fermé $\mathfrak{D}(A) = \{(x, y)/\ x+2y \geq 0\}$ et pour domaine de validité le demi-plan ouvert $\{(x, y)/\ x + 2y > 4\}$.***

Remarque 2.4 ***Toute assertion peut être considérée comme une "assertion" constante d'une variable x quelconque.***

Remarque 2.5 ***$P(x)$ étant une "assertion" d'une variable x, l'"assertion" $\neg P(x)$ (c'est l'"assertion" $x \to \neg P(x)$ est définie elle aussi sur $\mathfrak{D}(P)$; $R(x)$ étant aussi une "assertion" de la variable x, l'"assertion" $P(x) \vee R(x)$ est définie sur $\mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(R)$; il en est de même des "assertions" $P(x) \wedge R(x)$, $P(x) \Rightarrow R(x)$ et $P(x) \Leftrightarrow R(x)$.***

Exemples 2.6

- ***a étant un réel fixé et x une variable réelle, $(\sqrt{x-a} = \sqrt{-x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2})$ est une "assertion" P définie sur $\{x/\ (x-a) \geq 0$ et $-x \geq 0\} \cap \mathbb{R}$. Donc $\mathfrak{D}(P) = [a, 0]$ si $a < 0$, $\mathfrak{D}(P) = 0$ si $a = 0$, et $\mathfrak{D}(P) = \emptyset$ si $a > 0$. P est donc une "assertion" vraie sur $\mathfrak{D}(P)$ pour toutes les valeurs de a.***

  Prenons maintenant pour R l'"assertion" $(\sqrt{x-a} = \sqrt{-x})$, on a $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{D}(R)$. R n'est pas vraie sur $\mathfrak{D}(R)$ si $a < 0$ (par exemple si $x = 0$, $(\sqrt{x-a} \neq \sqrt{-x})$, et est vraie sur $\mathfrak{D}(R)$ si $a \geq 0$.

◯ ***L'"assertion"*** $A(x, y)$ ***des deux variables*** x ***et*** y ***:***

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 = x \ \textbf{\textit{et}}\ y \geq 0),$$

est définie sur $\mathfrak{D}(A) = [0, +\infty[\times\mathbb{R}$ ***; elle est vraie sur*** $\mathfrak{D}(A)$ ***car pour tout*** (x, y) ***de*** $\mathfrak{D}(A)$ ***on a bien l'équivalence :***

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 = x \ \textbf{\textit{et}}\ y \geq 0);$$

on a donc $((y = \sqrt{x}) \Leftrightarrow (y^2 = x \ \textbf{\textit{et}}\ y \geq 0))$ ***sur*** $\mathfrak{D}(A)$***. Par contre l' "assertion"*** $B(x, y)$ ***:***

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x,$$

définie sur le même ensemble que A ***n'est pas une "assertion" vraie sur*** $\mathfrak{D}(B)$ ***; il suffit pour le voir de trouver un couple*** $(x\,, y)$ ***de*** $\mathfrak{D}(B)$***, tel que*** $B(x, y)$ ***soit faux; le couple*** $(x = 1, y = -1)$ ***en est un, car on a bien*** $y^2 = 1 = x$***, mais*** $y = -1 \neq x$***.***

2.2 Quantificateurs

Notation : **Soit une "assertion"** $A(x)$ **et soit** D **une partie de** $\mathfrak{D}(A)$ **; l'assertion**

$$P: \quad \textbf{pour tout} \quad x \in D, \quad \textbf{on a } A(x)$$

est notée :

$$\forall x \in D, \quad A(x) \tag{1}$$

ou

$$\forall x \in D, \quad A$$

ou encore

$$\forall x \in D, \quad (A)$$

Le symbole $\forall$ **est appelé quantificateur universel.**

Si $D = \mathfrak{D}(A)$**,** P **s'écrit plus simplement :**

$$\forall x, \quad A(x) \tag{2}$$

ou

$$\forall x, \quad A.$$

Remarque 2.7

- P ***est une véritable assertion (sans guillemets) donc*** $P \in \mathcal{A}$ ***;*** x ***n'est pas une variable au sens de la définition 2.1, on dit que*** x ***est une variable liée. (1) n'est pas fonction de*** x ***mais plutôt de tout l'ensemble*** D ***décrit par*** x ***; on pourrait aussi bien noter (1) sous la forme :*** $\forall y \in D,\ A(y)$***.***

- $\diamond$ $\forall \cdots, \cdots$ ***se lit : pour tout ... on a ...***
- $\diamond$ ***Notons que dans (1) le quantificateur précède l'"assertion"*** $A(x)$***, qui est appelée portée du quantificateur.***

Remarque 2.8

Il faut également veiller à contrôler dans (1) la partie $A(x)$ ***sur laquelle porte la quantification, par exemple l'assertion***

$$\forall x, \quad \sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$$

est l'assertion

$$\forall x, \quad (\sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0),$$

qui ne doit pas être confondue avec l'assertion

$$(\forall x, \quad \sqrt{x+2} = \sqrt{-x}) \Rightarrow x = 0;$$

la première est fausse, alors que la seconde est vraie puisque l'assertion

$$(\forall x, \quad \sqrt{x+2} = \sqrt{-x})$$

est fausse.

Reprenons l'assertion

$$P: \quad \textbf{pour tout} \;\; x \in D \;\; \textbf{on a} \;\; A(x);$$

sa négation étant :
il existe (au moins un) x **de** D **tel qu'on a** $\neg A(x)$**,**
on introduit le quantificateur existentiel "$\exists$**" qui permet d'écrire cette négation sous la forme :**

$$\exists x \in D, \quad \neg A(x)$$

précisons cela dans les notations qui suivent.

Notations : **Soit une "assertion"** $A(x)$ **et soit** D **une partie de** $\mathfrak{D}(A)$ **; l'assertion**
R **: il existe** x **dans** D **tel qu'on a** $A(x)$
est notée :

$$\exists x \in D, \quad A(x) \tag{3}$$

ou plus simplement

$$\exists x \in D, \quad A$$

ou encore

$$\exists x \in D, \quad (A)$$

Si $D = \mathfrak{D}(A)$**,** R **s'écrit plus simplement**

$$\exists x \quad A(x) \tag{4}$$

ou

$$\exists x \quad A.$$

Remarque 2.9

> $\exists \cdots , \cdots$ ***peut se lire :***
> ***pour au moins ... on a ....***
> ***ou encore***
> ***il existe ... tel qu'on a ...***

Proposition 2.10 ***Pour toute "assertion"*** $A(x)$***, si*** D ***est inclus dans*** $\mathfrak{D}(A)$***, on a :***

$$\neg(\forall x \in D, \ \ A) \Leftrightarrow (\exists x \in D, \ \ \neg A) \tag{5}$$

$$\neg(\exists x \in D, \ \ A) \Leftrightarrow (\forall x \in D, \ \ \neg A) \tag{6}$$

Exemples 2.11

- ***La négation de***

  $$\exists x \in [0,\, 1], \ \ \sqrt{x} > x,$$

  est

  $$\forall x \in [0,\, 1], \ \ \sqrt{x} \leq x;$$

  la première assertion est vraie, la seconde est donc fausse.

- ***L'assertion : Il existe un unique*** x ***de*** D ***tel qu'on a*** $A(x)$***, (ou encore : pour un et un seul*** x ***on a*** $A(x)$***), est notée :***

  $$P : \quad \exists !\, x \in D, \quad A(x)$$

  Ce qui peut encore s'écrire :

  $$(\exists\, x \in D, \quad A(x)) \ \textbf{\textit{et}} \ (\forall\, (x,\, y) \in D^2, \quad (A(x) \ \textbf{\textit{et}} \ A(y) \Rightarrow x = y))$$

  La négation de P ***est donc***

  $$\neg P : \quad (\forall\, x \in D, \quad \neg A(x)) \ \textbf{\textit{ou}} \ (\exists\, (x,\, y) \in D^2, \quad (A(x) \ \textbf{\textit{et}} \ A(y) \ \textbf{\textit{et}} \ x \neq y))$$

  qui signifie que $A(x)$ ***est fausse pour tout*** x ***de*** D ***ou que*** $A(x)$ ***est vraie pour au moins deux éléments de*** D***.***

Remarque 2.12

Il faut prendre garde dans l'application des propositions précédentes (5) et (6), ainsi que dans (1) et (3), de respecter l'hypothèse $D \subset \mathfrak{D}(A)$.

Par exemple, si on est tenté, à tort, de considérer la phrase

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x} < 0$$

comme une assertion, on aurait tendance à considérer qu'elle est fausse ; donc sa négation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x} \geq 0$$

serait une proposition ; en fait, cette phrase n'a pas de sens.

Remarque 2.13

Si $D \subset \mathfrak{D}(A)$***, on a les propositions*** (3) ***et*** (4) ***suivantes :***

$$(\exists\, x \in D, \;\; A) \Leftrightarrow (\exists\, x, (x \in D \textbf{ et } A)) \tag{7}$$

$$(\forall\, x \in D, \;\; A) \Leftrightarrow (\forall\, x, (x \in D \Rightarrow A)) \tag{8}$$

En effet (7) est évidente ; quant à (8) si on l'écrit sous forme $(P1 \Leftrightarrow P2)$**, il suffit de montrer que** $(\neg P1) \Leftrightarrow (\neg P2)$**. Or**

$$\begin{aligned}
(\neg P1) &\Leftrightarrow (\exists\, x \in D, \;\; \neg A) \\
&\Leftrightarrow (\exists\, x, (x \in D \textbf{ et } \neg A)) \;(\textbf{d'après } (3)) \\
&\Leftrightarrow (\exists\, x, \;\; \neg(x \in D \Rightarrow A)) \;(\textbf{d'après } (12)) \\
&\Leftrightarrow (\neg P2).
\end{aligned}$$

Remarque 2.14 ***(sur l'utilisation des quantificateurs)***

Si on peut intervertir l'ordre d'apparition de deux quantificateurs de même espèce, on ne doit pas intervertir l'ordre d'apparition de $\forall$ ***et*** $\exists$ ***(sous peine de changer le sens de la phrase).***

Ecrivons par exemple qu'une suite numérique est majorée, majorée ; ceci s'exprime par l'assertion

$$P: \quad \exists\, M \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$$

qui n'est pqs vraie pour toute suite u_n.

Or si on remplace l'assertion P par

$$P: \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, M \in \mathbb{R}, \quad u_n \leq M$$

on obtient une assertion vraie pour toute suite $(u_n)_n$.

Exemples 2.15

Soit (un)n une suite numérique ; la suite numérique u_n est convergente s'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ tel que u_n soit aussi proche que l'on veut de l pourvu que n soit assez grand, qui s'écrit aussi

$$\exists\, l \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)$$

sa négation est

$$\forall\, l \in \mathbb{R}, \quad \exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \textbf{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon)$$

3 Exercices

1. **Préciser, selon la valeur du réel x, si les phrases suivantes définissent des assertions, des assertions vraies (c'est-à-dire des propositions) ou des assertions fausses.**
   (1) $cos^2(tanx) \geq 0$
   (2) $\frac{1}{1+x} \leq 1$
   (3) La restriction de la fonction sinus à l'interval $[0, x]$ est injective.
2. **En utilisant une méthode analogue à celle employée dans la preuve de la règle logique (18), vérifier les règles logiques (4), (8), (12) et (16).**
3. **Prouver, sans construire les tables de vérité, la règle logique suivante (donc valable pour toutes assertions P et R de $\mathcal{A}$)**

$$P \Leftrightarrow ((R \Rightarrow P) \wedge (\neg R \Rightarrow P))$$

4. **Ecrire l'expression de $(P \Rightarrow (R \Rightarrow \neg S))$ en fonction des seuls connecteurs $\neg$ et $\vee$.**
5. **Donner la table de vérité des connecteurs binaires suivants :**
   - **l'alternative (ou disjonction exclusive) w, qui se lit ou bien ... , ou bien ... ou encore soit ... , soit .. : (c'est le ou exclusiF) ;**
   - **l'incompatibilité (ou connecteur de Sheffer) $|$, qui se lit ... exclut ... ;**

– **le rejet(ou connecteur de Peirce) $\|$, qui se lit ni ... , ni ...**

En automatique, le connecteur de Sheffer (H. M. Sheffer, $1882-1964$) porte également le nom "d'opérateur NAND ("non et")" on pourra vérifier que $(P|R \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg R))$, ce qui justifie la traduction de "|" par "exclut". Le connecteur de Peirce (C. S. Peirce, $1839-1914$) porte le nom "d'opérateur NOR ("non ou")".

6. **Le calcul assertionnel peut se construire en utilisant un unique connecteur, comme le connecteur de Peirce ou encore le connecteur de Sheffer. Montrer, par exemple, que l'on a pour toutes assertions P et R de $\mathcal{A}$)**
(i) $\neg P \Leftrightarrow (P \parallel P)$.
(ii) $P \vee R \Leftrightarrow ((P \parallel R) \parallel (P \parallel R))$.
Déterminer alors l'expression de $(\neg P \wedge \neg R)$ et de $(P \Rightarrow R)$ en fonction du connecteur $\|$.

7. **Vérifier l'exactitude des affirmations suivantes :**
(1) non $(P$ et $R)$ signifie (non P ou non R), ou encore signifie (P exclut R) ;
(2) non (P si et seulement si R) signifie (ou bien P, ou bien R).
8. **Donner la négation de $P \Leftrightarrow R$.**

9. **Soit P une fonction assertionnelle d'une variable réelle x, que l'on suppose définie sur $\mathbb{R}$. ($P(x)$ est donc une assertion pour tout réel x).**
(1) Déterminer l'ensemble G des x tels que l'on ait $P(x) \vee \neg P(x)$.
(2) Déterminer l'ensemble H des x tels que l'on ait $P(x) \wedge \neg P(x)$.
10. **Soient x et α deux réels ; on suppose $\alpha \leq \frac{1}{3}$. Montrer que :**

$$|x-1| \leq \alpha \Rightarrow |x^2-1| \leq 1.$$

11. **Donner le domaine de définition $\mathfrak{D}$, puis le domaine de validité $\mathcal{V}$ de chacune des "assertions" suivantes.**
(1) $x+2=4+x$
(2) $P(x) \vee \neg P(x)$
(3) $\sqrt{xy} > 4 \Rightarrow (\sqrt{x} > 2$ **et** $\sqrt{x} > 2)$.
12. **Ecrire en langage "ordinaire" chacune des assertions quantifiées suivantes. puis écrire sa négation en langage quantifié.**
(1) $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $\exists (b,\, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $a = bc$.
(2) $\forall x$,$\exists y$, $\forall z$, $(x \leq y \Rightarrow z \leq x+1)$.
13. **Ecrire en langage quantifié chacune des assertions suivantes**
(1) On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
(2) Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
(3) f est strictement croissante ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application donnée).
14. **Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E (c'est-à-dire une application $i \mapsto A_i$ de I dans l'ensemble des parties de E) ; on considère**

les deux parties suivantes de E :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E/ \ \exists i \in I, \quad x \in A_i\}$$

et

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E/ \ \forall i \in I, \quad x \in A_i\}$$

1° **Compléter :**

$$\forall x \in E \quad (x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow ......)$$

$$\forall x \in E \quad (x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow ......)$$

2° **Montrer que pour tout x de E on a**

$$x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

3° **Que dire de**

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

et de

$$\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}?$$