Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2011/2012
$2^{ième}$ année Licence Informatique
module : Logique Mathématique

Série d'exercices n° 1

EXERCICE 1 : 1°) Soit p désignant la proposition « l'enfant sait lire » et q désignant la proposition « l'enfant sait écrire ».

Donner la traduction dans le langage courant des propositions suivantes :

(1) $p \wedge q$; (2) $p \wedge (\neg q)$; (3) $(q \rightarrow p)$; (4) $(\neg p) \vee (\neg q)$; (5) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

2°) Même question avec p la proposition « l'homme est mortel » et q désignant la proposition « l'homme est éternel » et les propositions :

(1) $(p \vee q)$; (2) $(\neg p) \vee (\neg q)$; (3) $\neg(p \wedge q)$; (4) $p \wedge (\neg q)$; (5) $(p \rightarrow (\neg q))$

EXERCICE 2 : Soit p la proposition « X estime Y » et q la proposition « Y estime X ».

Ecrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime ;
2. X et Y s'estiment ;
3. X et Y se détestent ;
4. Y est estimé par X mais X est déteste par Y ;
5. X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre.

EXERCICE 3 : Sachant que x,y sont vrais et z est faux, trouver les valeurs de vérité des propositions :

(1) $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z)$;

(2) $(y \rightarrow x) \vee \neg(x \leftrightarrow y) \wedge (z \wedge \neg x)$.

EXERCICE 4 : Pour chacune des formules suivantes,

1°) construire sa table de vérité ;

2°) indiquer si c'est une tautologie, une contradiction ou ni l'une ni l'autre :

(a) $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$; (b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$;

(c) $(p \wedge q) \vee (\neg(p \wedge r) \vee q \rightarrow r)$; (d) $(x \vee y \vee z) \leftrightarrow x \vee (((u \vee x) \rightarrow u) \leftrightarrow (y \vee z))$.

EXERCICE 5 : Soit une fonction logique f à 4 variables logique, telle que f = 1 si et seulement si le nombre de variables de f qui sont à '1' est supérieur ou égal à 2.

1°) Etablir la table de vérité de f.

2°) Donner la forme normale conjonctive de f et la forme normale disjonctive de f.

EXERCICE 6 : Soient A et B deux variables propositionnelles désignant respectivement « il pleut » et « il y a des nuages ».

Donner, en Français, cinq phrases différentes ayant le même sens que la formule $A \rightarrow B$.

EXERCICE 7 : En associant les énoncés élémentaires « Paul est étudiant », « Quentin est étudiant », « René est étudiant » aux propositions p, q, r, respectivement ; associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement :

(a) Paul et Quentin sont étudiants.
(b) Paul ou Quentin est étudiant.
(c) Exactement un seul parmi Paul et Quentin est étudiant.
(d) Ni Paul ni René ne sont étudiants.
(e) Au moins l'un des trois n'est pas étudiant.
(f) Un seul parmi les trois n'est pas étudiant.
(g) Seulement deux, parmi les trois, sont étudiants.
(h) Si Paul est étudiant, Quentin l'est.
(i) Si Paul est étudiant, Quentin l'est ; sinon Quentin ne l'est pas.
(j) Paul est étudiant à condition que René le soit.
(k) Que René soit étudiant est une condition nécessaire pour que Paul le soit.
(l) Que René soit étudiant est une condition suffisante pour que Paul le soit.
(m) Que René soit étudiant est une condition nécessaire et suffisante pour que Paul le soit.
(n) Paul n'est étudiant que si exactement l'un des deux autres l'est.
(o) Si Paul est étudiant alors au moins l'un des deux autres ne l'est pas.

EXERCICE 8 : On considère les énoncés suivants :

(A) Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.
(B) Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
(C) Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
(D) Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.
(E) Pierre est rentré chez lui.

Formaliser cette famille d'énoncés en calcul propositionnel. On notera A, B, C, D, E les cinq formules obtenues. Montrer que l'on peut inférer E des prémisses A, B, C, D :

- en utilisant les *tables de vérité* ;
- en écrivant un *raisonnement en Français*.

EXERCICE 9 : Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante : BROWN : Jones est coupable et Smith est innocent. (I)

JONES : Si Brown est coupable alors Smith aussi. (II)

SMITH : Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable. (III)

Soient B, J et S les énoncés « Brown est innocent », « Jones est innocent » et « Smith est innocent ».

1) Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique.
2) Calculer les valeurs de vérités des trois formules obtenues.
3) Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles (simultanément satisfiables) ?
4) Le témoignage de l'un des suspects s'ensuit il de celui d'un autre suspect ? Desquels deux témoignages s'agit-il ?
5) En supposant que tous sont innocents, lequel aurait commis un faux serment ?

<u>EXERCICE 10 :</u> On se trouve sur une île dont les habitants sont répartis en deux catégories : les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité, tandis que les Pires mentent toujours.
On rencontre trois habitants de l'île : Moe, Jon et Will. Moe déclare : « Nous sommes Pires tous les trois ». Jon déclare : « Il y a exactement un Pire parmi nous ».
Que peut-on déduire de ces déclarations ?

<u>EXERCICE 11 :</u> Après avoir préparé un gâteau pour ses quatre enfants, la Maman laisse le gâteau refroidir sur la table de la cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre enfants n'était à la maison ce jour là, la Maman demande à chacun des ses enfants qui a mangé le gâteau. Les quatre « suspects » disent ceci :

Chabane : Katia a mangé le quart du gâteau ;

Saliha : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau ;

Katia : Djamal a mangé le quart du gâteau ;

Djamal : Katia a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si seulement une de ces quatre propositions est vraie et seulement un des quatre enfants est coupable, qui des quatre a effectivement mangé le quart du gâteau ?

<u>EXERCICE 12 :</u> Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien.
Sachant que les implications suivantes sont vraies, retrouver leur profession :
(A chirurgien $\Rightarrow$ B dentiste),
(A dentiste $\Rightarrow$ B pharmacien),
(B non chirurgien $\Rightarrow$ C dentiste).

EXERCICE 13 : On rappelle que $\perp$ désigne une constante propositionnelle toujours fausse, et $\top$ une constante propositionnelle toujours vraie. On désigne par **If** le connecteur ternaire « Si …alors …sinon » dont voici la table de vérité :

X	**A**	**B**	**If (X, A, B)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1. On appelle littéraux les atomes X, A, B et leurs négations. Donner un équivalent de If(X, A, B) qui est :

a. une forme normale disjonctive, puis une forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune ;

b. une forme normale conjonctive, puis une forme normale conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune ;

c. une conjonction de deux implications entre littéraux.

Chacun des équivalents doit être justifié.

2. Donner pour chacune des formules $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, un équivalent utilisant une seule occurrence de chacun des connecteurs If, $\perp$, $\top$ (justifier).

En déduire que { If, $\perp$, $\top$ } est un système complet de connecteurs.

EXERCICE 14 : On dit qu'un ensemble de formules du calcul propositionnel est indépendant si et seulement si, pour toute formule $F \in E$, F n'est pas conséquence logique de $E - \{ F \}$.

Les ensembles suivants sont-ils indépendants ?

$E = \{ (A \rightarrow B), (B \rightarrow C), (C \rightarrow A) \}$; $G = \{ (A \rightarrow B), (B \rightarrow C), (A \rightarrow C) \}$.

EXERCICE 15 : On considère les formules de la logique des propositions :

$A = ((p \rightarrow r) \vee (\neg q \vee s \vee (s \wedge q))) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (r \vee s))$

$B = (p \rightarrow s) \vee (q \rightarrow r)$

En utilisant les équivalences remarquables, montrez que $A \leftrightarrow B$.

---------------------------------Fin Série 1---------------------------------