Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2011/2012
2ième année Licence Informatique
module : Logique Mathématique

Série d'exercices n° 2

EXERCICE 1 : Trois touristes font chacun une déclaration :

1er touriste : « Nous avons visité le musée du Bardo et le jardin d'essais mais pas le musée des beaux arts »

2ème touriste : « Nous avons visité les beaux arts et le jardin d'essais mais pas le Bardo »

3ème touriste : « Nous avons visité le Bardo et les beaux arts mais pas le jardin d'essais »

Sachant que chaque touriste ment une et une seule fois dans sa déclaration, qu'est ce qu'ils ont réellement visité ?

EXERCICE 2 : Soit le raisonnement suivant

« - Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.
- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris.
Donc si je mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris. »

1°) Formaliser ce raisonnement en utilisant les variables suivantes :

s : il fait soleil, l : je mets mes lunettes, m : je reste à la maison.

2°) Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct (valide) :

a. en utilisant la table de vérité ;
b. en utilisant une mise en forme normale par le calcul (algébriquement).

EXERCICE 3 : Donner la forme normale disjonctive et la forme normale conjonctive de la fonction logique définie par : g(A,B,C) = IF A THEN B ELSE C

EXERCICE 4 : Soit P l'ensemble des variables propositionnelles. Parmi toutes les expressions de longueur inférieure ou égale à 11 construites sur $P \cup \{V, F, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$, caractériser celles qui sont des formules bien formées. Utiliser la définition de formule bien formée donnée en cours.

EXERCICE 5 : Monter que $\neg p$ est une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg m$.

Montrer que $\neg m$ n'est pas une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg p$.

EXERCICE 6 : Pour chacune des formules ci-dessous, indiquer une formule logiquement équivalente et telle que :

- les seules variables propositionnelles utilisées sont p et q ;
- les seules connecteurs sont $\neg$ et $\vee$.

1. $p \wedge q$ 2. $p \rightarrow q$ 3. $p \leftrightarrow q$ 4. $\neg(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

EXERCICE 7 : Trois étudiants, d'une même section, font chacun une déclaration sur les cours qu'ils ont eu le jour du récit :

1er étudiant : « Aujourd'hui nous avons eu : Analyse numérique, Logique et SI. »
2ème étudiant : « Aujourd'hui nous avons eu : SI, mais pas Analyse numérique, ni Logique. »
3ème étudiant : « Aujourd'hui nous avons eu : Analyse numérique, mais pas SI, ni Logique. »

Sachant que chaque étudiant a menti exactement deux fois, dans sa déclaration ; qu'est ce qu'ils ont eu réellement comme cours le jour du récit ?

EXERCICE 8 : Soit A une formule propositionnelle bien formée complètement parenthèsée. On note n(A) le nombre d'occurrences du connecteur $\neg$ ($n(A) \geq 0$) et b(A) le nombre d'occurrences de connecteurs binaires ($b(A) \geq 0$). Soit L(A) la longueur de la formule A définie comme le nombre de ses symboles. Ainsi par exemple, pour $A = ((\neg p) \vee q)$, on a $L(A) = 8$.
Démontrer par récurrence sur le nombre de connecteurs de A, que $L(A) = 4 \times b(A) + 3 \times n(A) + 1$.

EXERCICE 9 : Considérons l'extension du langage du calcul propositionnel par les deux symboles $\perp$ et $\top$ représentant respectivement les contradictions et les tautologies du calcul propositionnel.

1) Construire les tables de vérité des formules propositionnelles :
$(A \rightarrow (B \wedge \top))$, $(A \rightarrow (B \vee \perp))$ et $(A \rightarrow (B \rightarrow \perp))$.

2) Monter que dans cette extension, les ensembles $\{\vee, \rightarrow\}$ et $\{\rightarrow\}$ forment chacun un ensemble complet de connecteurs.

EXERCICE 10 : Soit le système d'axiomes du calcul propositionnel :

Ax1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ax3 : $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
et la règle du Modus Ponens : si $\vdash A$ et $\vdash A \rightarrow B$ alors $\vdash B$.

Montrer que l'on a :

$$\frac{A}{B \rightarrow A} \qquad \frac{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)}{(A \rightarrow C)} \qquad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

EXERCICE 11 : En utilisant éventuellement les résultats de l'exercice précédent, montrer que les formules suivantes sont des théorèmes du C.P :

1) $p \to p$
2) $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
4) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (p \to (q \to r))$

EXERCICE 12 : Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes :

a) $\neg \neg B \to B$
b) $B \to \neg \neg B$
c) $\neg A \to (A \to B)$
d) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$
e) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
f) $A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$
g) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$
h) $((A \to B) \to A) \to A$

EXERCICE 13 : Même question pour les formules suivantes :

1) $(p \to \neg p) \to \neg p$
2) $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
3) $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
4) $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$

----------------------------------Fin Série 2----------------------------------