Solutions des exercices de la série n° 1

EXERCICE 1 :

1°)

(1) L'enfant sait lire et écrire

(2) l'enfant sait lire mais il ne sait pas écrire

(3) si l'enfant sait écrire alors il sait lire

(4) l'enfant ne sait pas lire ou il ne sait pas écrire

(5) l'enfant ne sait pas lire et il ne sait pas écrire

2°)

(1) L'Homme est mortel ou éternel

(2) l'Homme n'est pas mortel, ou il n'est pas éternel

(3) il est faux que « l'Homme est mortel et éternel »

(4) l'Homme est mortel mais pas éternel

(5) si l'Homme est mortel alors il n'est pas éternel

EXERCICE 2 :

1. $p \wedge \neg q$
2. $p \wedge q$
3. $\neg p \wedge \neg q$
4. $p \wedge \neg q$
5. $\neg\neg p \wedge \neg\neg q$

EXERCICE 3 :

Soit 1 = Vrai et 0 = Faux.

(1) $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) = (1 \vee (1 \wedge 0)) \wedge (1 \vee 0) = (1 \vee 0) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1$

(2) $(y \rightarrow x) \vee \neg(x \leftrightarrow y) \wedge (z \wedge \neg x) = (1 \rightarrow 1) \vee \neg(1 \leftrightarrow 1) \wedge (0 \wedge \neg 1)$

$= 1 \vee \neg(1) \wedge (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 \wedge 0 = 0$

EXERCICE 4 :

Formule (a) :

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	(a)
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

La formule (a) n'est ni une tautologie ni une contradiction.

Formule (b) : soient les sous-formules : $A = p \to (q \to r)$, $B = (p \to q)$, $C = (p \to r)$, $D = B \to C$; on a bien sûr $(b) = A \to D$.

p	q	r	$q \to r$	A	B	C	D	(b)
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

La formule (b) est une tautologie.

Formule (c) : soient la sous-formule : $A = \neg(p \wedge r) \vee q$; on a bien $(c) = (p \wedge q) \vee (A \to r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$\neg(p \wedge r)$	A	$A \to r$	(c)
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1

La formule (c) n'est ni un tautologie ni une contradiction.

Formule (d) : soient les sous-formules : $A = (x \vee y \vee z)$, $B = (u \vee x) \to u$, $C = B \leftrightarrow (y \vee z)$; on a la formule $(d) = A \leftrightarrow x \vee C$.

x	y	z	u	A	$(u \vee x)$	B	$(y \vee z)$	C	$(x \vee C)$	(d)
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

La formule (d) est une tautologie.

EXERCICE 5 :

1°) Table de vérité de f :

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2°) Forme normale disjonctive de f :

f.n.d = $(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg t) \vee$
$(\neg x \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t) \vee (x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t) \vee$
$(x \wedge \neg y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t) \vee (x \wedge y \wedge \neg z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge \neg t) \vee$
$(x \wedge y \wedge z \wedge t)$

Forme normale conjonctive de f : (obtenue comme $\neg$(f.n.d de $\neg$f))

f.n.c = $(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \neg t) \wedge (x \vee y \vee \neg z \vee t) \wedge (x \vee \neg y \vee z \vee t) \wedge$
$(\neg x \vee y \vee z \vee t)$

EXERCICE 6 :

1) Il pleut donc il y a des nuages ;
2) il pleut implique qu'il y a des nuages ;
3) s'il peut alors il y a des nuages ;
4) il pleut à condition qu'il y ait des nuages ;
5) qu'il y ait des nuages est une condition nécessaire pour qu'il pleuve.

EXERCICE 7 :

(a) $p \wedge q$

(b) $p \vee q$

(c) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(d) $\neg p \wedge \neg r$

(e) $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

(f) $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

(g) $\equiv$ (f)

(h) $p \rightarrow q$

(i) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

(j) $p \rightarrow r$

(k) $p \rightarrow r$

(l) $r \rightarrow p$

(m) $p \leftrightarrow r$

(n) $p \rightarrow ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

(o) $p \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$

EXERCICE 8 :

Soient P, J et M trois variables propositionnelles symbolisant :

P : « Pierre est rentré chez lui » ; J : « Jean est allé au cinéma » ; M : « Marie est à la bibliothèque »

Les formules qu'on obtient, en formalisant les énoncés, sont : $A = P \rightarrow J$; $B = M \vee P$;

$C = J \rightarrow (M \vee P)$; $D = \neg M \wedge J$; $E = P$.

On peut inférer (*déduire*) la conclusion E des prémisses (*hypothèses*) A, B, C, D si et seulement si

(**I**) $(A \wedge B \wedge C \wedge D) \rightarrow E$ est une tautologie.

Table de vérité :

Soit F la sous-formule $F = A \wedge B \wedge C \wedge D$

P	J	M	A	B	C	D	E	$A \wedge B \wedge C \wedge D$	$F \rightarrow E$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1

On en déduit que $\models (A \wedge B \wedge C \wedge D) \rightarrow E$

Raisonnement en français : Pour montrer que (**I**) est une tautologie on suppose que la sous-formule F est vraie et on doit déduire que E est vraie.

Supposons, donc, que F soit vraie ; par conséquent D est vraie donc Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma. B est aussi vraie donc ou bien Marie est à la bibliothèque ou alors Pierre est rentré chez lui. Comme on sait déjà que Marie n'est pas à la bibliothèque, alors forcément que Pierre est rentré chez lui.

Donc E est vraie. On en déduit que $F \rightarrow E$ est une tautologie.

EXERCICE 9 :

1) Formalisation :

(I) : $\neg J \wedge S$ (II) : $\neg B \rightarrow \neg S$ (III) : $S \wedge (\neg J \vee \neg B)$

2) Tables de vérité :

B	J	S	¬B	¬J	¬S	(I)	(II)	(III)
0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0

3) D'après la table de vérité, on remarque que lorsque B = 1, J = 0, S = 1, les trois formules (I), (II) et (III) sont simultanément satisfiables.

4) D'après la table de vérité, on remarque que (I) → (III) est une tautologie, c'est-à-dire (I) $\models$ (III) ce qui veut dire que le témoignage de Smith découle de celui de Brown. C'est l'unique cas car : (I) → (II), (II) → (I), (II) → (III), (III) → (II) et (III) → (I) ne sont pas des tautologies.

5) S'ils sont tous innocents alors B = J = S = 1 $\Rightarrow$ (I) = 0 et (III) = 0 ; donc Brown et Smith ont fait un faux serment.

EXERCICE 10 :

Moe : « Nous sommes Pires tous les trois » (I)

Jon : « Il y a exactement un Pire parmi nous » (II)

- Si Moe est pur alors il dit la vérité, donc (I) est vraie et cela engendre une contradiction car Moe est pur, donc ils ne peuvent pas être pires tous les trois.
- Si Moe est pire, alors (I) est fausse donc la vérité c'est qu'il y a un pire seulement ou deux pires seulement.
- Si Jon est pure alors (II) est vraie et le pire est Moe et donc Will est pur.
- Si Jon est pire alors (II) est fausse et il y a deux pires : ce sont Moe et Jon et donc Will est pur.

En conclusion, ce que l'on peut déduire des déclarations c'est que Moe est pire et Will est pur.

EXERCICE 11 :

Soient K, S, D les variables propositionnelles dénotant :

K : « Katia a mangé le quart du gâteau »

S : « Saliha a mangé le quart du gâteau »

D : « Djamal a mangé le quart du gâteau »

Les déclarations des quatre enfants sont :

Chabane : K

Saliha : $\neg S$

Katia : D

Djamal : $\neg D$

Sachant que seulement une de ces quatre propositions est vraie, les différents cas de vérité sont les suivants :

Chabane :	K	$\neg$K	$\neg$K	$\neg$**K**
Saliha :	S	$\neg S$	S	**S**
Katia :	$\neg$D	$\neg$D	D	$\neg$**D**
Djamal :	D	D	D	$\neg \boldsymbol{D}$

Les trois premières combinaisons mènent à des contradictions ; la quatrième n'engendre aucune contradiction, elle sera donc retenue : c'est Saliha qui a mangé le quart du gâteau.

EXERCICE 12 :

On a : α. (A chirurgien $\Rightarrow$ B dentiste),

β. (A dentiste $\Rightarrow$ B pharmacien),

γ. (B non chirurgien $\Rightarrow$ C dentiste).

α, β et γ sont vraies simultanément et A, B, C ont chacun une profession différente parmi pharmacien, dentiste et chirurgien.

- Si A est chirurgien alors d'après α, B est dentiste donc B non chirurgien est vraie ce qui implique C est dentiste d'après γ $\Rightarrow$ contradiction car B et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.
- Si A est dentiste alors d'après β B est pharmacien donc B non chirurgien est vraie ce qui implique C est dentiste d'après γ $\Rightarrow$ contradiction car A et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.

D'où : A est pharmacien.

- Si B est dentiste alors B non chirurgien est vraie donc d'après γ C est dentiste ce qui implique une contradiction car B et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.

D'où : B est chirurgien.

Conclusion :

A est pharmacien,

B est chirurgien,

C est dentiste.

EXERCICE 13 :

1. a. Forme normale disjonctive :

   $If(X, A, B) = (\neg X \wedge \neg A \wedge B) \vee (\neg X \wedge A \wedge B) \vee (X \wedge A \wedge \neg B) \vee (X \wedge \neg A \wedge B)$

   Simplification :

   $If(X, A, B) = ((\neg X \wedge B) \wedge (\neg A \vee A)) \vee ((X \wedge A) \wedge (\neg B \vee B))$

   $= ((\neg X \wedge B) \wedge \top) \vee ((X \wedge A) \wedge \top)$

   nous obtenons ainsi :

   la forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune :

   $If(X, A, B) = (\neg X \wedge B) \vee (X \wedge A)$

   b. Forme normale conjonctive :

   f.n.d de $\neg If$:

   $\neg If(X, A, B) = (\neg X \wedge \neg A \wedge \neg B) \vee (\neg X \wedge A \wedge \neg B) \vee (X \wedge \neg A \wedge \neg B) \vee (X \wedge \neg A \wedge B)$

   d'où la f.n.c de If : (égale à $\neg$(f.n.d de $\neg$If))

   $If(X, A, B) = (X \vee A \vee B) \wedge (X \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg X \vee A \vee B) \wedge (\neg X \vee A \vee \neg B)$

   Simplification :

   $If(X, A, B) = ((X \vee B) \vee (\neg A \wedge A)) \wedge ((\neg X \vee A) \vee (B \wedge \neg B))$

   $= ((X \vee B) \vee \bot) \wedge ((\neg X \vee A) \vee \bot)$

   nous obtenons ainsi :

   la forme normale conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune :

   $If(X, A, B) = (X \vee B) \wedge (\neg X \vee A)$

   c. Conjonction de deux implications entre littéraux : à partir de l'écriture précédente on déduit :

   $If(X, A, B) = (\neg X \rightarrow B) \wedge (X \rightarrow A)$

2. $\neg A = If(A, \bot, \top)$

   $A \vee B = If(A, \top, B)$

   $A \wedge B = If(A, B, \bot)$

   $A \rightarrow B = If(A, B, \top)$

   Comme on a exprimé les connecteurs usuels en fonction des éléments de $\{If, \bot, \top\}$, on en déduit que cet ensemble est un système complet de connecteurs.

EXERCICE 14 :

L'ensemble E est un ensemble de formules indépendant car $A \rightarrow B$ n'est pas une conséquence logique de $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow A$ ($((B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ n'est pas une tautologie) ; de même $B \rightarrow C$ n'est pas une conséquence logique de $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow A$ ($((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow C)$ n'est pas une tautologie) et il en aussi de même pour $C \rightarrow A$ qui n'est pas une conséquence logique de $B \rightarrow C$ et $A \rightarrow B$ ($((B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow (C \rightarrow A)$ n'est pas une tautologie).

L'ensemble G n'est pas un ensemble indépendant de formules parce que $A \rightarrow C$ est une conséquence logique de $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ ($((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ est une tautologie)

EXERCICE 15 :

On a $A = ((p \to r) \vee (\neg q \vee s \vee (s \wedge q))) \wedge ((p \wedge q) \to (r \vee s))$

$= (\neg p \vee r \vee \neg q \vee s \vee (s \wedge q)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s)$

comme $s \vee (s \wedge q) = s$, on aura :

$A = (\neg p \vee r \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s)$

et par idempotence on aura :

$A = (\neg p \vee r \vee \neg q \vee s) = (\neg p \vee s \vee \neg q \vee r)$ qui est équivalent à : $(p \to s) \vee (q \to r) = B$.

----------------------------------Fin Corrigé Série 1----------------------------------