Solutions des exercices de la série n° 2

EXERCICE 1 :

Soient B, J et A trois variables propositionnelles symbolisant :

- B : visite du musée du Bardo
- J : visite du Jardin d'essais
- A : visite du musée des baux Arts

Les déclarations des trois touristes peuvent être formalisées comme suit :

1er touriste : $B \wedge J \wedge \neg A$

2ème touriste : $\neg B \wedge J \wedge A$

3ème touriste : $B \wedge \neg J \wedge A$

Sachant que chaque touriste a menti une et une seule fois dans sa déclaration, la réalité de ce qu'ils ont réellement visité peut être :

1er touriste : $\{\neg B \wedge J \wedge \neg A, \quad B \wedge \neg J \wedge \neg A, \quad B \wedge J \wedge A\}$

2ème touriste : $\{B \wedge J \wedge A, \quad \neg B \wedge \neg J \wedge A, \quad \neg B \wedge J \wedge \neg A\}$

3ème touriste : $\{\neg B \wedge \neg J \wedge A, \quad B \wedge J \wedge A, \quad B \wedge \neg J \wedge \neg A\}$

La proposition commune à ces ensembles de propositions est $B \wedge J \wedge A$; donc les trois touristes ont visité le musée du bardo, le jardin d'essais et le musée des beaux arts.

Vérification : à partir de la réalité $B \wedge J \wedge A$, on peut retrouver les déclarations des trois touristes : le 1er a menti en A, le 2ème en B et le 3ème en J.

EXERCICE 2 :

1°) Avec les variables s, l et m dénotant : s : il fait soleil ; l : je mets mes lunettes ; m : je reste à la maison ; on peut formaliser le raisonnement donné avec une formule du calcul propositionnel :

$((s \rightarrow (l \vee m)) \wedge (m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s))) \rightarrow (\neg l \rightarrow \neg s)$ (**A**)

2°) Le raisonnement considéré est valide car la formule (**A**) est une tautologie ; voyons cela par *la table de vérité* : soient les sous formules : I = $s \rightarrow (l \vee m)$, II = $m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s)$, III = $(\neg l \rightarrow \neg s)$

s	l	m	$l \vee m$	I	$\neg l \wedge \neg s$	II	III	$I \wedge II$	(**A**)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1

((**A**) s'écrit comme $(I \wedge II) \rightarrow III$)

par *une méthode algébrique* : $I = \neg s \vee l \vee m = (l \vee \neg s) \vee m = (\neg l \rightarrow \neg s) \vee m$

Puisque $m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s)$ alors $I \rightarrow (\neg l \rightarrow \neg s) \vee (\neg l \wedge \neg s)$

or $(\neg l \rightarrow \neg s) \vee (\neg l \wedge \neg s) = (\neg l \rightarrow \neg s)$ (car $(A \rightarrow B) \vee (A \wedge B) = (A \rightarrow B)$)

on aura donc $(I \wedge II) \rightarrow (\neg l \rightarrow \neg s) \vee (\neg l \wedge \neg s) = (\neg l \rightarrow \neg s)$,

c'est à dire $(I \wedge II) \rightarrow III$ est une tautologie.

EXERCICE 3 :

Voir exercice 13 de la série n° 1.

EXERCICE 4 :

Soit A_n = ensemble des formules bien formées (f.b.f) de longueur inférieure ou égale à n.

A_{11} peut être caractérisé comme suit :

• tout élément de P est un élément de A_n,

• V et F sont des élément de A_n,

• si E est un élément de A_9 alors (E) est un élément de A_{11},

• si E est un élément de A_{10} alors $\neg E$ est un élément de A_{11},

• si E_1 et E_2 sont des f.b.f telles que $\text{longueur}(E_1)+\text{longueur}(E_2) \leq 10$ alors $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$, $E_1 \rightarrow E_2$, $E_1 \leftrightarrow E_2$ sont des éléments de A_{11}.

EXERCICE 5 :

Pour dire que $\neg p$ est une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg m$, il faut vérifier que la formule

(**A**) $((p \rightarrow m) \wedge \neg m) \rightarrow \neg p$ est une tautologie :

p	m	$\neg p$	$\neg m$	$p \rightarrow m$	$(p \rightarrow m) \wedge \neg m$	(**A**)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

Cette table de vérité nous dit bien que $\models ((p \rightarrow m) \wedge \neg m) \rightarrow \neg p$ donc $\neg p$ est une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg m$.

Pour dire que $\neg m$ n'est pas une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg p$, il faut vérifier que la formule

(**B**) $((p \rightarrow m) \wedge \neg p) \rightarrow \neg m$ n'est pas une tautologie :

p	m	$\neg p$	$\neg m$	$p \rightarrow m$	$(p \rightarrow m) \wedge \neg p$	(**B**)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

D'après cette table de vérité on conclue que $((p \rightarrow m) \wedge \neg p) \rightarrow \neg m$ n'est pas une tautologie donc $\neg m$ n'est pas une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg p$.

EXERCICE 6 :

1. $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$
2. $p \to q = \neg p \vee q$
3. $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p) = \neg(\neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)) = \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$
4. $\neg(p \leftrightarrow q) \wedge (p \to (q \to p)) = (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \wedge (p \to (q \to p))$

   $= (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee p) = \neg(\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee \neg(\neg p \vee \neg q \vee p))$

EXERCICE 7 :

Soient les variables propositionnelles A, L, et S dénotant :

A = « cours d'Analyse numérique » , L = « cours de Logique » , S = « cours de SI ».

Les déclarations des trois étudiants peuvent être formalisées comme suit :

1er étudiant : $A \wedge L \wedge S$

2ème étudiant : $S \wedge \neg A \wedge \neg L$

3ème étudiant : $A \wedge \neg S \wedge \neg L$

Chaque étudiant a menti exactement deux fois dans sa déclaration, par conséquent :

- la vérité d'après la déclaration du 1er étudiant est un élément de l'ensemble

  { $\neg A \wedge \neg L \wedge S$, $\boldsymbol{\neg A \wedge L \wedge \neg S}$, $A \wedge \neg L \wedge \neg S$ } ;

- de même pour le second :

  { $\neg S \wedge A \wedge \neg L$, $\boldsymbol{\neg S \wedge \neg A \wedge L}$, $S \wedge A \wedge L$ } ;

- pour le troisième :

  { $\neg A \wedge S \wedge \neg L$, $\boldsymbol{\neg A \wedge \neg S \wedge L}$, $A \wedge S \wedge L$ } ;

La proposition commune est $\neg A \wedge L \wedge \neg S$, donc ils ont eu Logique mais pas Analyse numérique ni SI.

EXERCICE 8 :

On veut prouver la formule (I) : $L(A) = 4 \times b(A) + 3 \times n(A) + 1$.

Soit nc le nombre de connecteurs de la formule A.

Si nc = 0 alors A est une variable propositionnelle et $L(A) = 1 = 4 \times 0 + 3 \times 0 + 1$, et (I) est vérifiée.

Supposons que (I) reste vraie jusqu'au rang nc = k.

Pour nc = k+1, on aura deux cas :

- $A = (\neg B)$, B contient k connecteurs, donc $L(B) = 4 \times b(B) + 3 \times n(B) + 1$, et $L(A) = L(B) + 3$;

  $L(A) = 4 \times b(B) + 3 \times n(B) + 1 + 3 = 4 \times b(A) + 3 \times n(A) + 1$ car $b(A) = b(B)$ et $n(A) = n(B) + 1$;

  donc (I) reste vraie.

- $A = (B\ c\ C)$, où c est un connecteur binaire, B contient au plus k connecteurs et C aussi, donc

  $L(B) = 4 \times b(B) + 3 \times n(B) + 1$, $L(C) = 4 \times b(C) + 3 \times n(C) + 1$ et $L(A) = L(B) + L(C) + 3$;

  $L(A) = 4 \times b(B) + 3 \times n(B) + 1 + 4 \times b(C) + 3 \times n(C) + 1 + 3 = 4 \times b(A) + 3 \times n(A) + 1$

  car $b(A) = b(B) + b(C) + 1$ et $n(A) = n(B) + n(C)$;

  donc (I) reste vraie.

EXERCICE 9 :

1) Table de vérité :

A	B	$\top$	$\perp$	$B \wedge \top$	$A\to(B\wedge\top)$	$B \vee \perp$	$A\to(B\vee\perp)$	$B \to \perp$	$A\to(B\to\perp)$
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0

2) $\{\vee, \to\}$ est un ensemble complet de connecteurs car on peut exprimer les autres connecteurs usuels en fonction des éléments de cet ensemble :

$\neg A = A \to \perp$

$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = (\neg A \vee \neg B) \to \perp = ((A \to \perp) \vee (B \to \perp)) \to \perp$

$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = (((A \to B) \to \perp) \vee ((B \to A) \to \perp)) \to \perp$

$\{\to\}$ constitue à lui seul un ensemble complet de connecteurs : en effet il suffit de remarquer que $A \vee B = \neg A \to B = (A \to \perp) \to B$.

EXERCICE 10 :

a) $$\frac{A}{B \to A}$$

1. A hypothèse
2. $A \to (B \to A)$ Ax1
3. $B \to A$ MP + 1. + 2.

b) $$\frac{A \to B\ ,\ \ B \to C}{A \to C}$$ Transitivité

1. $A \to B$ hypothèse
2. $B \to C$ hypothèse
3. $A \to (B \to C)$ a) + 2.
4. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ Ax2
5. $(A \to B) \to (A \to C)$ MP + 3. + 4.
6. $A \to C$ MP + 1. + 5.

c) $$\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$ Permutation

1. $A \to (B\to C)$ hypothèse
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ Ax2
3. $(A \to B) \to (A \to C)$ MP + 1. + 2.
4. $B \to (A \to B)$ Ax1
5. $B \to (A \to C)$ Transitivité + 3. + 4.

EXERCICE 11 :

1) $\vdash p \to p$

1. $p \to ((p \to p) \to p)$ Ax1
2. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ Ax2
3. $((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ MP + 1. + 2.
4. $p \to (p \to p)$ Ax1
5. $p \to p$ MP + 3. + 4.

2) $\vdash (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

1. $q \to r$ hypothèse
2. $p \to q$ hypothèse
3. $p \to r$ Transitivité + 1. + 2.

On a donc montré : $(q \to r), (p \to q) \vdash (p \to r)$ ce qui implique, en vertu du théorème de déduction $(q \to r) \vdash (p \to q) \to (p \to r)$; donc en vertu du même théorème $\vdash (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

3) $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ théorème 2) Exo 11
2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ Permutation + 1.

4) $\vdash ((p \to q) \to (p \to r)) \to (p \to (q \to r))$

1. $(p \to q) \to (p \to r)$ hypothèse
2. $q \to (p \to q)$ Ax1
3. $q \to (p \to r)$ Tranitivité + 1. + 2.
4. $p \to (q \to q)$ Permutation + 3.

EXERCICE 12 :

a) $\vdash \neg\neg B \to B$

1. $\neg\neg B \to (\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B)$ Ax1
2. $(\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg\neg\neg B)$ Ax3
3. $(\neg B \to \neg\neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$ Ax3
4. $(\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$ Transitivité + 2. + 3.
5. $\neg\neg B \to (\neg\neg B \to B)$ Transitivité + 1. + 4.
6. $(\neg\neg B \to (\neg\neg B \to B)) \to ((\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B))$ Ax2

7. $((\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B))$ MP + 5. + 6.

8. $\neg\neg B \to \neg\neg B$ théorème 1) Exo 11

9. $\neg\neg B \to B$ MP + 7. + 8.

b) $\vdash B \to \neg\neg B$

1. $\neg\neg\neg B \to \neg B$ théorème a) Exo 12
2. $(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to (B \to \neg\neg B)$ Ax3
3. $B \to \neg\neg B$ MP + 1. + 2.

c) $\vdash \neg A \to (A \to B)$

1. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ Ax1
2. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ Ax3
3. $\neg A \to (A \to B)$ Transitivité + 1. + 2.

d) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

1. $\neg B \to \neg A$ hypothèse
2. $\neg B \to A$ hypothèse
3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ Ax3
4. $A \to B$ MP + 1. + 3.
5. $\neg B \to B$ Transitivité + 2. + 4.
6. $\neg B \to (B \to \neg(\neg B \to A))$ théorème c) Exo 12
7. $(\neg B \to (B \to \neg(\neg B \to A))) \to ((\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg B \to A)))$ Ax2
8. $(\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg B \to A))$ MP + 6. + 7.
9. $\neg B \to \neg(\neg B \to A)$ MP + 5. + 8.
10. $(\neg B \to \neg(\neg B \to A)) \to ((\neg B \to A) \to B)$ Ax3
11. $(\neg B \to A) \to B$ MP + 9. + 10.
12. B MP + 2. + 11.

On a donc montré $(\neg B \to \neg A), (\neg B \to A) \vdash B$; en appliquant deux fois le théorème de déduction on obtient $\vdash (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$.

e) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

1. $A \to B$ hypothèse
2. $B \to \neg\neg B$ théorème b) Exo 12
3. $A \to \neg\neg B$ Transitivité + 1. + 2.
4. $\neg\neg A \to A$ théorème a) Exo 12
5. $\neg\neg A \to \neg\neg B$ Transitivité + 3. + 4.
6. $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ Ax3
7. $\neg B \to \neg A$ MP + 5. + 6.

On a donc montré $(A \to B) \vdash (\neg B \to \neg A)$; en appliquant le théorème de déduction on obtient le théorème $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

f) $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

1. $(A \to B) \to (A \to B)$ théorème 1) Exo 11
2. $A \to (A \to B) \to B)$ Permutation + 1.
3. $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ théorème e) Exo 12
4. $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ Transitivité + 2. + 3.

g) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

1. $A \to B$ hypothèse
2. $\neg A \to B$ hypothèse
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ théorème e) Exo 12
4. $\neg B \to \neg A$ MP + 1. + 3.
5. $\neg B \to B$ Transitivité + 2. + 4.
6. $\neg B \to (B \to \neg(\neg A \to B))$ théorème c) Exo 12
7. $(\neg B \to (B \to \neg(\neg A \to B))) \to ((\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$ Ax2
8. $(\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$ MP + 6. + 7.
9. $\neg B \to \neg(\neg A \to B)$ MP + 5. + 8.
10. $(\neg B \to \neg(\neg A \to B)) \to ((\neg A \to B) \to B)$ Ax3
11. $(\neg A \to B) \to B$ MP + 9. + 10.
12. B MP + 2. + 11.

On a donc montré $(A \to B), (\neg A \to B) \vdash B$; en appliquant deux fois le théorème de déduction on obtient $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

h) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

1. $(A \to B) \to A$ hypothèse
2. $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ théorème e) exo 12
3. $\neg A \to \neg(A \to B)$ MP + 1. + 2.
4. $(\neg A \to \neg(A \to B)) \to ((\neg A \to (A \to B)) \to A)$ théorème d) exo 12
5. $(\neg A \to (A \to B)) \to A$ MP + 3. + 4.
6. $\neg A \to (A \to B)$ théorème c) exo 12
7. A MP + 5. + 6.

On a donc montré $((A \to B) \to A) \vdash A$; en appliquant le T.D on aura : $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$.

<u>EXERCICE 13 :</u>

1) $\vdash ((p \to \neg p) \to \neg p)$

1. $(p \to \neg p) \to ((\neg p \to \neg p) \to \neg p)$ théorème g) Exo 12
2. $(\neg p \to \neg p) \to ((p \to \neg p) \to \neg p)$ Permutation + 1.
3. $\neg p \to \neg p$ théorème 1) Exo 11
4. $(p \to \neg p) \to \neg p$ MP + 2. + 3.

2) $\vdash ((p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$

1. $p \to \neg q$ hypothèse
2. $(p \to \neg q) \to (\neg\neg q \to \neg p)$ théorème e) Exo 12
3. $\neg\neg q \to \neg p$ MP + 1. + 2.
4. $q \to \neg\neg q$ théorème b) Exo 12
5. $q \to \neg p$ Transitivité + 3. + 4.

On a donc montré $(p \to \neg q) \vdash (q \to \neg p) \Rightarrow \vdash ((p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$.

3) $\vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

1. $(p \to (q \to r))$ hypothèse
2. $(q \to (p \to r))$ Permutation + 1.

On a $(p \to (q \to r)) \vdash (q \to (p \to r)) \Rightarrow \vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

4) $\vdash (p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$

1. $p \to q$ hypothèse
2. $r \to p$ hypothèse
3. $r \to q$ Transitivité + 1. + 2.

On a donc montré : $(p \to q), (r \to p) \vdash (r \to q) \Rightarrow (p \to q) \vdash (r \to p) \to (r \to q)$
$\Rightarrow \vdash (p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$.

---------------------------------Fin Corrigé Série 2---------------------------------