Exercie 1

Soient A,B et C trois assertions. Pour chacune des assertions suivantes :
(A) et (non (B) ou (R)),((A) et (B)) $\Rightarrow$ (C) ,(A et non (B)),(A ou non (B)),
(A ou (B et C)),(A et (B et C)),(A $\Rightarrow$ non (B)),(A $\Rightarrow$ (B)),(non (A ou B) $\Rightarrow$ C),
((A et B) $\Rightarrow$non(C))
Ecrire sa négation.

Correction exercice 1

(A) et (non (B) ou (R))$\equiv (A \wedge (\neg B \vee R))$ donc $\neg(A \wedge (\neg B \vee R)) \equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg R))$
((A) et (B)) $\Rightarrow$ (C) $\equiv ((A \wedge B) \Rightarrow C) \equiv (\neg(A \wedge B) \vee C) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C)$
donc $\neg((A \wedge B) \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C)$
(A et non (B))$\equiv (A \wedge \neg B)$ donc $\neg(A \wedge \neg B) \equiv (\neg A \vee B)$
(A ou non (B))$\equiv (A \vee \neg B)$ donc $\neg(A \vee \neg B) \equiv (\neg A \wedge B)$
(A ou (B et C))$\equiv (A \vee (B \wedge C))$ donc $\neg(A \vee (B \wedge C)) \equiv (\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C))$
(A et (B et C))$\equiv (A \wedge (B \wedge C))$ donc $\neg(A \wedge (B \wedge C)) \equiv (\neg A \vee (\neg B \vee \neg C))$
(A $\Rightarrow$ non (B))$\equiv (A \Rightarrow \neg B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ donc $\neg(A \Rightarrow \neg B) \equiv (A \wedge B)$
(A $\Rightarrow$ (B))$\equiv (\neg A \vee B)$ donc $\neg(\neg A \Rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$
(non (A ou B) $\Rightarrow$ C)$\equiv (\neg(A \vee B) \Rightarrow C) \equiv ((A \vee B) \vee C)$ donc $\neg((A \vee B) \vee C) \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C)$
((A et B) $\Rightarrow$non(C))$\equiv ((A \wedge B) \Rightarrow \neg C) \equiv (\neg(A \wedge B) \vee \neg C) \equiv ((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C)$
donc $\neg((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$

Exercice 2

Considérons la fonction logique suivante :

a	b	c	F(a,b,c)
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

donner la forme normale disjonctive et la forme normale conjonctive de F.

Correction exercice 2

La forme normale disjonctive de F(a, b, c) est :
$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$.

Le calcul de la forme normale disjonctive de $\neg F(a, b, c)$ nous donne :
$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$.

Ce qui nous donne en en prenant la négation la forme normale conjonctive suivante :
$(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c)$.

a	b	c	F(a,b,c)	$\neg F(a,b,c)$
V	V	V	F	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Exercice 3

1. Donnez la définition d'un littéral.
2. Metrre la formule $(\neg p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r)$ en forme clausale (FNC).

Correction exercice 3

1. Un littéral est une variable ou la négation d'une variable.
2. $(\neg p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \vee r)$
   $(\neg p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (r \vee (\neg q \vee r))$
   $(\neg p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (r \vee \neg q)$

Exercice 4
On s'intéresse ici à des formules qui contiennent le symbole d'équivallence $p \Leftrightarrow q$. On rappelle que $p \Leftrightarrow q$ est défini comme $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Dans la suite x, y et z désignent trois variables propositionnelles.

1. Donner la forme normale conjonctive des formules $(x \Leftrightarrow y)$ et $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. Construire la table de vérité de la formule $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$. Cette formule est-elle une tautologie ?

Correction exercice 4

1. $x \Leftrightarrow y \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$
   $\neg(x \Leftrightarrow y) \equiv \neg((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)) \equiv \neg((\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \equiv ((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y))$
   $\equiv ((x \wedge \neg y) \vee y) \wedge ((x \wedge \neg y) \vee \neg x)) \equiv ((x \vee y) \wedge (y \vee \neg y)) \wedge ((x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y))$
   $\equiv (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$
2. On construit la table de vérité de la formule $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$, on constate que
   $\not\models (x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$.

x	y	z	$y \Leftrightarrow z$	$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	F
V	F	V	F	F
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
F	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	F	F	V	F

Exercice 5

Soit p la proposition « X estime Y » et q la proposition « Y estime X ».
Ecrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime .
2. X et Y s'estiment .
3. X et Y se détestent .
4. Y est estimé par X mais X est détesté par Y .

Correction exercice 5

1. $p \wedge \neg q$
2. $p \wedge q$
3. $\neg p \wedge \neg q$
4. $\neg p \wedge q$

Exercice 6

Sachant que x, y sont vrais et z est faux, trouver les valeurs de vérité des propositions :

1. $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z)$.
2. $(y \Rightarrow x) \vee \neg(x \Leftrightarrow y) \wedge (z \wedge \neg x)$.

Correction exercice 6

Posons 1 = Vrai et 0 = Faux.

$(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) \equiv (1 \vee (1 \wedge 0)) \wedge (1 \vee 0) \equiv (1 \vee 0) \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

$(y \Rightarrow x) \vee \neg(x \Leftrightarrow y) \wedge (z \wedge \neg x) \equiv (1 \Rightarrow 1) \vee \neg(1 \Leftrightarrow 1) \wedge (0 \wedge \neg 1) \equiv 1 \vee \neg(1) \wedge (0 \wedge 0) \equiv 1 \vee 0 \wedge 0 \equiv 0$

Exercice 7

En associant les énoncés élémentaires « Paul est étudiant », « Quentin est étudiant », « René est étudiant » aux propositions p, q, r, respectivement ; associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement :

1. Paul et Quentin sont étudiants.
2. Paul ou Quentin est étudiant.

3. Exactement un seul parmi Paul et Quentin est étudiant.
4. Ni Paul ni René ne sont étudiants.
5. Au moins l'un des trois n'est pas étudiant.
6. Un seul parmi les trois n'est pas étudiant.
7. Seulement deux, parmi les trois, sont étudiants.
8. Si Paul est étudiant, Quentin l'est.
9. Si Paul est étudiant, Quentin l'est ; sinon Quentin ne l'est pas.
10. Paul est étudiant à condition que René le soit.
11. Que René soit étudiant est une condition nécessaire pour que Paul le soit.
12. Que René soit étudiant est une condition suffisante pour que Paul le soit.
13. Que René soit étudiant est une condition nécessaire et suffisante pour que Paul le soit.
14. Paul n'est étudiant que si exactement l'un des deux autres l'est.
15. Si Paul est étudiant alors au moins l'un des deux autres ne l'est pas.

Correction exercice 7

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
4. $\neg p \wedge \neg r$
5. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
6. $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
7. $\equiv (f)$
8. $p \Rightarrow q$
9. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)$
10. $p \Rightarrow r$
11. $p \Rightarrow r$
12. $r \Rightarrow p$
13. $p \Leftrightarrow r$
14. $p \Rightarrow ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$
15. $p \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$