Espaces Vectoriels Normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E, une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ verifiant :

i) $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$ (non degenereé)

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$. (homogeneité)

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ (inegalité triangulaire).

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé espace normé.

L'inégalité iii) s'ecrit aussi :

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \quad \forall x, y \in E.$$

. A toute norme $\|\cdot\|$ sur E, on peut associer une distance d en posant :

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Consequence : Un espace normé est donc un espace metrique particulier. Il en possede donc aussi toutes les proprietes.

Comme pour les espaces metriques generaux, on note :

$B(x_0, r) = \{x \in E, \|x - x_0\| < r\}$, la boule ouverte centreé en x_0 et de rayon $r>0$.

$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in E, \|x - x_0\| \leq r\}$, la boule fermeé centreé en x_0 et de rayon $r>0$.

$S(x_0, r) = \{x \in E, \|x - x_0\| = r\}$, la sphère centreé en x_0 et de rayon $r>0$.

Remq : Il est aisé de verifier que l'application $x \mapsto \|x\|$ est convexe. En consequence, les boules $B(x_0,r)$ et $\bar{B}(x_0,r)$ le sont aussi.

Exemples d'espaces normés.

i) $\mathbb{R}^n$ peut être muni de l'une des trois normes dites usuelles :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1,n} |x_i| \quad ; \quad \|X\|_2 = \Big(\sum_{i=1,n} |x_i|^2\Big)^{1/2} \quad ; \quad \|X\|_\infty = \max |x_i|$$

Ces trois normes induisent les distances respectives d_1 ; d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$.

notations : $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) = \ell_1^{(n)}$; $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = \ell_2^{(n)}$; $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) = \ell_\infty^{(n)}$.

ii) L'espace $\ell_p^{(n)}$.

Soient $p>1$ et $q>1$ deux nombres verifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Considerons la fonction reelle $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t$, $t \in [0, +\infty[$.

Cette fonction admet son minimum au point $t=1$, par consequent on peut écrire : $t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q}$

Ensuite, si on pose dans cette derniere inegalite $t = u \cdot v^{\frac{1}{1-p}}$, on aura :

$$u v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \quad u \geq 0, v \geq 0.$$

. Posons maintenant $N_p(X) = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}$ et $N_p(Y) = \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{1/q}$

et notons $u = \frac{|x_i|}{N_p(X)}$; $v = \frac{|y_i|}{N_q(Y)}$

Il vient : $\dfrac{|x_i|}{N_p(X)} \cdot \dfrac{|y_i|}{N_q(Y)} \leq \dfrac{1}{p} \cdot \left(\dfrac{|x_i|}{N_p(X)}\right)^p + \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{|y_i|}{N_q(Y)}\right)^q$; $i=1,n$

D'où en additionnant suivant $i=1,n$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{N_p(X).N_q(Y)} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}{(N_p(X))^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}{(N_q(Y))^q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1.$$

En d'autres termes :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq N_p(x) . N_q(Y).$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Hölder, elle généralise celle dite de Cauchy-Schwartz qui correspond au cas $p=q=2$.

A l'aide de l'inégalité de Hölder, il n'est pas difficile de montrer l'inégalité de Minkowski suivante

$$N_p(X+Y) \leq N_p(X) + N_p(Y) \ , \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \ p \geq 1.$$

Notons maintenant $\|X\|_p = N_p(X)$. L'inégalité précédent n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. D'autre part, il est clair que l'application : $X \hookrightarrow \|X\|_p$ satisfait aux autres axiomes qui définissent une norme.

En conclusion, on a montré que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$, $\forall p \geq 1$.

L'espace $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ est noté $\ell_p^{(n)}$.

iii) <u>Les espaces</u> $\ell_1, \ell_2, \ell_p, \ell_\infty$.

Pour $p > 1$, Considérons l'ensemble des suites suivants :

$$\mathbb{R}_p^\infty = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} = X \ , \ \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

Il est aisé de vérifier que $\mathbb{R}_p^\infty$ a une structure d'espace vectoriel pour les opérations usuelles sur les suites.

D'autre, il est facile de vérifier que $\|X\|_p = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}_p^\infty$. On note alors $\ell_p = (\mathbb{R}_p^\infty, \|\cdot\|_p)$.

pour $p=1$, on retrouve l'espace ℓ_1 et pour $p=2$, l'espace ℓ_2.

Si $p=+\infty$, on défini $\|X\|_\infty = \sup_{i\geq 1} |x_i|$ et l'espace ℓ_∞

iv) $C([a,b], \mathbb{R})$ peut être muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

On peut aussi le munir des normes :

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ et $\|f_2\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

De manière plus générale, si $p>1$ on pose :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

On vérifie que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $C([a,b],\mathbb{R})$. D'autre part, on a aussi l'inégalité dite de Hölder suivante :

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}, \quad \forall p \geq 1, q \geq 1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Espaces Normés de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel. Nous dirons que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes, lorsque : $\exists\, \alpha>0, \beta>0$ tels que ;

$$\alpha . \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta . \|x\|_1 \qquad \forall x \in E.$$

Deux normes équivalentes induisent la même topologie : mêmes suites convergentes, mêmes limites, mêmes compactes ...

Il est donc important de savoir comparer les normes d'un même espace. Lorsque E est de dimension finie, le problème est définitivement résolu grâce au théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Si $\dim E$ est fini, toutes les normes sur E sont équivalentes.

<u>remq</u> : Du fait de cette équivalence, si $\dim E < +\infty$, le choix d'un norme de travail sur E n'a aucune importance dans les questions topologiques (c.a.d. basées sur la notion de limite...)

<u>preuve du théorème</u> : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_i)_{i\le n}$ une base de E. Tout élément $X \in E$ s'écrit $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On définit sur E une norme en posant $\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.

On note $\|\cdot\|$ une autre norme quelconque sur E.

Nous avons de manière claire :

$$\|X\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} \le \beta . \|X\|_2$$

On voit ainsi que $\|\cdot\|_2$ est plus fine que $\|\cdot\|$.

D'autre, on a aussi : $\big|\, \|X\| - \|Y\| \,\big| \le \|X-Y\| \le \beta . \|X-Y\|_2$

Ce qui signifie que l'application $\|\cdot\|$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$.

Ensuite, remarquons que $(E,\|\cdot\|_2)$ s'identifie par un isomorphisme isométrique à $\ell_2^{(n)}$ par l'application

$$i : (E,\|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$$
$$X = \sum_{i=1,n} x_i e_i \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

On déduit de cette identification, que la S_1 de $(E,\|\cdot\|_2)$ est compacte.

Il vient donc que l'application continue $\|\cdot\|$ sur $(E,\|\cdot\|_2)$ est bornée et atteind ses bornes sur S_2, en particulier :

$\exists\, X_0 \in S_2 \;/\; \|X_0\| = \inf\{\|X\|,\ X \in S_2\} := \lambda$, de plus $\lambda > 0$ puisque $X_0 \neq 0$

Par suite, $\forall X \in E$, on $\left\|\frac{X}{\|X\|_2}\right\| \geq \lambda$, c.a.d. $\|X\| \geq \lambda . \|X\|_2$. cqfd.

Conclusion : Les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont equivalentes sur E.

Remarque : Nous venons de voir que $(E, \|\cdot\|_2)$ est isometriquement isomorphe à $\ell_2^{(n)}$. D'autre part, dans E, toutes les normes sont equivalentes. De cela, on peut deduire immediatement les affirmations suivantes :

1) Tous les espaces normés de dimension finie n, sont isomorphes entre eux. En particulier, un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ tel que $\dim E = n$ est isomorphe $\ell_2^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

2) On sait déjà que dans $\ell_2^{(n)}$, une partie A est compacte ssi elle est fermée bornée. Du fait de cet isomorphisme, cette caracterisation des parties compactes reste vraie pour tout espace normé de dimension finie.

3) En particulier, dans un espace de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, la boule unité $\overline{B}(0,1)$ est toujours compacte.

Nous allons voir dans ce qui suit que cette caracterisation des compactes est mise en défaut lorsque $\dim E = +\infty$.
Mieux, on montrera que dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ avec $\dim E = +\infty$, les boules ne sont jamais compactes.
Ce dernier resultat est une consequence du Lemme de Riesz suivant :

Lemme (de Riesz).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et F un sous espace fermé propre de E, c.a.d. $F \subset E$ avec inclusion stricte. Alors :
$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in E, \|y\| = 1$ tel que $\|x - y\| > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in F$.

preuve du Lemme :

Soit $y_0 \in E \setminus F$ et $d = \inf_{x \in F} \|y_0 - x\|$. On a necessairement $d > 0$, car dans le cas contraire, F etant fermé, on aurait necessairement $y_0 \in F$, ce qui contredit l'hypothese $y_0 \in E \setminus F$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$, alors par définition de $d = \inf_{x \in F} \|y_0 - x\|$, il existe un $x_0 \in F$ tel que $d \leq \|y_0 - x_0\| \leq d + d\varepsilon$.
Posons alors $y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$.

Il est clair que $\|y\| = 1$ et de plus $y \notin F$ (sinon on aurait aussi $y_0 \in F$!).
D'autre part, si $x \in F$, on a :

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \cdot \left\| y_0 - (x_0 + x \cdot \|y_0 - x_0\|) \right\|$$

Comme $x_0 + x \cdot \|y_0 - x_0\| \in F$, on a necessairement :

$\|y-x\| \geq \frac{1}{\|y_0-x_0\|} \cdot d \geq \frac{1}{d+d\varepsilon} \cdot d = \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon$. Ce qui prouve le Lemme.

Théorème: Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est localement compacte ssi il est de dimension finie.

Ce theoreme peut être reformulé de la manière suivante:

" Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension infinie, la boule unité $\overline{B}(0,1)$ n'est jamais compacte."

remq: On peut dans cet énoncé, remplacer $\overline{B}(0,1)$ par $\overline{B}(x_0, r)$ avec $x_0 \in E$ et $r > 0$ quelconques.

preuve du théoreme:

C'est une conséquence directe du Lemme de Riesz. En effet:

Il est clair que si $\dim E = n$ est fini, alors E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et donc toute partie fermeé bornée de E serait compacte (comme dans $\mathbb{R}^n$).

Inversement, si $\dim E = +\infty$, il est possible de construire une suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$ verifiant $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \ \forall n \neq m$.

Une telle suite est contenue dans la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$. [De] plus d'après l'inegalite $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \ \forall n \neq m$, il est immediat que cette suite n'admet aucune sous suite convergente. Cela signifie par definition que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Il reste donc à construire (à l'aide du Lemme de Riesz), la suite $\{x_n\}$:

Soit $x_1 \in \overline{B}(0,1)$, on note $F_1 = L\{x_1\}$, le sous espace engendré par x_1.

D'après le Lemme de Riesz, $\exists x_2 \in \overline{B}(0,1)$ tel que $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$.

On note $F_2 = L\{x_1, x_2\}$; toujours par le Lemme de Riesz, $\exists x_3 \in \overline{B}(0,1)$ tel que $\|x_1 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$ et $\|x_2 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$.

Du fait que $\dim E = +\infty$, cette construction se poursuit indefiniment et on obtient donc une suite $\{x_n\} \subset \overline{B}(0,1)$ verifiant $\|x_n\| = 1 \ \forall n$ et $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \ \forall n \neq m$.

Ceci termine la demonstration.

remq: En fait $\{x_n\} \subset S(0,1)$ et on aura donc aussi montré que si $\dim E = +\infty$, la sphère unité $S(0,1)$ n'est jamais compacte.

Definition : On appelle espace de Banach, un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ qui est Complet pour la norme.

Exemples : 1) $C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

2) Tout espace de dimension finie est un espace de Banach, ceci indépendamment de la norme de l'espace.

3) Les espaces $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$; $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ sont des espaces de Banach (pour $p \geq 1$).

4) $C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2$ n'est pas Complet. De même que $C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1$.

Opérateurs Linéaires - dualité

Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces normés.

On note $L(E_1, E_2)$, l'ensemble des applications ou "opérateurs" définies sur E_1 à valeurs dans E_2 qui sont linéaires.

$$L(E_1,E_2) = \{u : E_1 \to E_2,\ u(\lambda x_1 + \beta x_2) = \lambda u(x_1) + \beta u(x_2)\}$$

$L(E_1, E_2)$ est naturellement muni d'une structure vectorielle en posant :

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \quad ; \quad (\lambda v)(x) = \lambda . v(x).$$

L'opérateur u sera dit Continue en $x_0 \in E_1$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \|x - x_0\|_{E_1} < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(x_0)\|_{E_2} < \varepsilon.$$

L'opérateur $u \in L(E_1, E_2)$ sera dit borné, lorsque :

$$\exists M > 0 \ / \ \|u(x)\|_{E_2} \leq M. \|x\|_{E_1} \cdot \forall x \in E_1.$$

propriétés : Soit $u \in L(E_1, E_2)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) u est continue en $x_0 \in E_1$.

ii) u est borné.

iii) u est continue en 0_{E_1}

iv) u est uniformément Continue sur E_1.

preuve : i) $\Rightarrow$ ii). Supposons u non borné, c.a.d, il existe une suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E_1$ telle que $\|u(x_n)\|_2 > n \|x_n\|_1$.

On pose alors $\xi_n = \dfrac{x_n}{n \|x_n\|_1}$. Il est clair que $\|\xi_n\|_1 \to 0$ qd $n \to +\infty$.

D'autre part, $\|u(\xi_n)\|_2 = \dfrac{1}{n \|x_n\|_1} \cdot \|u(x_n)\|_2 > 1$

En posant $\xi_n = y_n - x_0$, on aura obtenu $\|y_n - x_0\|_1 \to 0$, mais $\|u(y_n - x_0)\|_2 = \|u(y_n) - u(x_0)\|_2 \not\to 0$. Ce qui contredit l'hypothèse de continuité de u en x_0.

u est donc nécessairement bornée.

ii) $\Rightarrow$ i). Si u est bornée, pour tout $x_0 \in E_1$, on a :

$$\|u(x_n)-u(x_0)\|_2 = \|u(x_n-x_0)\|_2 \leq M.\|x_n-x_0\|_1$$

et donc, si $\|x_n-x_0\|_1 \to 0$, on a aussi $\|u(x_n)-u(x_0)\|_2 \to 0$, d'où la continuité de u en x_0.

ii) $\Leftrightarrow$ iii). Il suffit de reprendre la démonstration précédente avec $x_0 = 0_{E_1}$.

iii) $\Leftrightarrow$ iv). Il suffit de montrer que si u est continue en 0_{E_1}, alors elle est uniformément continue sur E_1.

Or, si u est continue en 0_{E_1}, elle est bornée. Par suite, on aura :

$\|u(x_1)-u(x_2)\|_2 = \|u(x_1-x_2)\|_2 \leq M.\|x_1-x_2\|_1$. Cette inégalité entraine l'uniforme continuité de u sur E_1.

<u>Définition</u> : Si $E_2 = \mathbb{R}$, une application $u \in L(E_1, \mathbb{R})$ sera appelée forme linéaire sur E_1.

On note $\mathcal{L}(E_1,E_2)$, l'ensemble des applications linéaires bornées de E_1 dans E_2 : $\mathcal{L}(E_1,E_2) = \{u \in L(E_1,E_2),\ u \text{ borné}.\}$.

<u>Norme d'opérateurs</u>

Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces normés et $\mathcal{L}(E_1,E_2)$, l'espace des opérateurs linéaires continues (ou bornés) de E_1 dans E_2.

On peut définir sur $\mathcal{L}(E_1,E_2)$ une norme en posant :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|f(x)\|_2$$

On vérifie facilement que ceci est bien une norme sur $\mathcal{L}(E_1,E_2)$.

On remarquera que $|||u|||$ dépend des normes $\|\cdot\|_1$ sur E_1 et $\|\cdot\|_2$ sur E_2.

Si on prend de nouvelles normes équivalentes sur E_1 et E_2, on obtiendra une norme sur $\mathcal{L}(E_1,E_2)$ équivalente à la norme initiale.

La norme ainsi définie sur $\mathcal{L}(E_1,E_2)$ admet les formulations équivalentes suivantes :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|u(x)\|_2 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|u(x)\|_2 = \sup_{\substack{x \in E_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|_2}{\|x\|_1}$$

$$= \inf \{ c > 0 \ / \ \|u(x)\|_2 \leq c.\|x\|_1. \}$$

- L'espace $(\mathcal{L}(E_1,E_2), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach dès que E_2 l'est.
- En particulier $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ muni de la d'opérateurs $|||\cdot|||$ est toujours un Banach. On adopte la notation $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Hyperplans et formes linéaires

Soit E un espace vectoriel. Un hyperplan de E est par définition un sous espace de codimension 1. De manière précise, si H est un hyperplan de E, alors $\forall x_0 \notin H$, on a : $E = L\{x_0\} \oplus H$, $L\{x_0\}$ étant le sous espace de dimension 1 engendré par x_0. Cette dernière notation signifie :

$\forall x \in E$, $x = \lambda x_0 + y_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_0 \in H$

de plus, cette décomposition est unique.

On dit alors que E est "somme directe" de H et du sous espace de dimension 1 engendré par $x_0 \notin H$.

Soit maintenant $f \in L(E,\mathbb{R})$, non identiquement nulle et soit $x_0 \in E / f(x_0) \neq 0$.

On peut d'ailleurs supposer que $f(x_0) = 1$.

On note $H = \ker f = \{x \in E, f(x) = 0\}$.

Il est clair que $\forall x \in E$, $x = f(x).x_0 + (x - x_0 f(x))$. D'autre part.

$f(x - x_0 f(x)) = f(x) - f(x_0).f(x) = 0$, c.a.d. $x - x_0 f(x) \in \ker f$.

Il est facile de vérifier que cette écriture est unique.

Ainsi, $\ker f = H$ est donc bien un Hyperplan de E.

__Proposition :__ Si $f \in L(E,\mathbb{R})$, $\ker f$ est un hyperplan de E.

Cet hyperplan est fermé ~~ssi~~ $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Dans le cas contraire, l'hyperplan $H = \ker f$ est dense dans E.

__preuve :__ On sait déjà que si $f \in L(E,\mathbb{R})$, alors $\ker f$ est un hyperplan de E.

Si f est continue, $\ker f = f^{-1}(0)$ est bien un fermé dans E. Inversement, si $\ker f$ est fermé, f est nécessairement continue.

Supposons f non continue, c.a.d : $\ker f$ est non fermé. Alors, on a :

$\ker f \subset \overline{\ker f}$ l'inclusion étant stricte.

Puisque $\ker f$ est un sous espace de codimension 1 et $\overline{\ker f}$ est un sous espace de E contenant strictement $\ker f$. D'où $\overline{\ker f} = E$.

On appelle hyperplan affine, le translaté d'un hyperplan : $H_1 = a + H$

Un hyperplan est toujours le noyau d'une forme linéaire.

Un hyperplan affine est décrit par une équation : $f(x) = q = f(a)$.

Le théorème de Banach-Steinhaus.

Enonçons d'abord un lemme fondamental,

Lemme de Baire : Soit E un espace normé complet (c.a.d. un espace de Banach) et $(F_n)_{n\geq 1}$ une famille de fermés d'intérieurs vides, c.a.d :

• $F_n \subset E$, F_n fermé et $\overset{\circ}{F_n} = \phi$ $\forall n\geq 1$

Alors : $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\geq 1} F_n}} = \phi$

remarque : Un fermé F est dit rare si son intérieur $\overset{\circ}{F}$ est vide.
Un ensemble est dit maigre s'il est réunion dénombrable d'ensembles rares.

Théorème de Banach-Steinhaus.

Soient E et F deux espaces de Banach et $\{T_i\}_{i\in I}$, une famille pouvant être non dénombrable, d'opérateurs continues c.a.d $T_i \in \mathcal{L}(E,F)$ $\forall i \in I$.

On suppose que $\forall x \in E$, $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_2 < +\infty$. $(= M_x < +\infty)$.

Alors : $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.

Cela signifie que l'on a : $\exists\, c>0 \,/\, \|T_i(x)\|_2 \leq c.\|x\|_1$, $\forall i \in I$, $\forall x \in E$.

preuve : Posons $X_n = \{x \in E, \forall i \in I, \|T_i(x)\|_2 \leq n\}$.

X_n est clairement fermé. De plus, grace à l'hypothèse du théorème, nous avons $E = \bigcup_{i\in I} X_i$

D'après, le Lemme de Baire, on deduit : $\exists\, n_0 \in I \,/\, \overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \phi$.

Soit donc $x_0 \in E$ et $r>0 \,/\, B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. On aura alors :

$\|T_i(x_0 + r z)\|_2 \leq n_0$ $\forall i \in I$, $\forall z \in B(0,1)$ et donc :

$r.\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq n_0 + \|T_i x_0\|_2$. D'où le resultat cherché.

Le théorème de Banach-Steinhaus, possède plusieurs corollaires pratiques.

Corollaire 1 : Soient E, F deux espaces de Banach et $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$, $n\geq 1$ une suite d'opérateurs linéaires continues tels que :
$\forall x \in E$, $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe. Alors :

i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$; ii) $T \in \mathcal{L}(E,F)$

iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

<u>preuve</u> : i) C'est une conséquence directe du Théo. de Banach-Steinhauss.
On a aussi $\|T_n(x)\| \leq C.\|x\|$, pour une constante $C > 0$.

ii) On a $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq C.\|x\|$

D'autre part, l'opérateur T est linéaire car limite d'opérateurs linéaires.
D'où $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

iii) On a $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|.\|x\|$ et, en passant à la limite, on aura :

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\| \, .\|x\|$$

En conséquence, on a bien $\|T\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$.

<u>Corollaire 2</u> : Soit E un espace de Banach et B un sous ensemble de E.
Alors : B est borné dans E ssi $\forall f \in E^*$, l'ensemble image $f(B)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

<u>preuve</u> : l'implication $\Rightarrow$ est évidente.
Pour montrer l'implication inverse, on utilisera le théo. de Banach-Steinhauss en posant : $F = \mathbb{R}$, $I = B$.
On considère pour cela la suite $(\Pi_x)_{x\in B}$ définie par $\Pi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longrightarrow \Pi_x(f) = f(x)$.
Alors : de manière claire, $\forall x \in B$, $\Pi_x \in \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R}) = E^{**}$.
D'autre part, $\forall f \in E^*$, $\sup_{x\in B} |\Pi_x(f)| = \sup_{x\in B} |f(x)| < +\infty$.
En appliquant le théo. de Banach-Steinhauss, on aura :

$$\sup_{x\in B} \|\Pi_x\| = \sup_{x\in B} \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |\Pi_x(f)| = \sup_{x\in B} \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |f(x)| = \sup_{x\in B} \|x\| < +\infty.$$

D'où l'on déduit que B est borné.

<u>remq</u> : Dans cette démonstration, on a utilisé l'égalité : $\|x\| = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$.
Cette égalité sera démontrée plus loin.

<u>Corollaire 3</u> : Soit E un espace de Banach et $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ son dual.
Soit B^* un sous ensemble de E^*. On suppose que :
$\forall x \in E$, l'ensemble $B^*(x) = \{ f(x),\ f \in B^* \}$ est borné dans $\mathbb{R}$.
Alors : B^* est borné dans E^*.

<u>preuve</u> : Semblable à celle du Corollaire 2, en prenant $F = \mathbb{R}$, $I = B^*$.

Espaces reflexifs.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ son dual.
E^* est toujours un espace de Banach (même si E ne l'est pas), pour sa norme naturelle $\|f\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.

On peut donc considerer le dual de E^* : $(E^*)^* = E^{**}$.
Par definition $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.
E^{**} est toujours un espace de Banach.
Considerons l'application Π, appelée projection canonique :

$$\Pi : E \longrightarrow E^{**} \quad \text{definie par } \Pi(x)(f) = f(x)$$
$$x \longrightarrow \Pi(x)$$

On verifie facilement que Π est lineaire, injective.
D'autre part, $\|\Pi(x)\|_{**} = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |\Pi(x)(f)| = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |f(x)| = \|x\|$
c.a.d. $\|\Pi(x)\|_{**} = \|x\|, \forall x \in E$.
Cette egalité montre que Π est continue, en fait c'est un isomorphisme isometrique de E dans $\Pi(E) \subset E^{**}$.
$\Pi(E)$ est un sous espace fermé de E^{**}.
Du fait de cette isometrie, on peut identifier E et $\Pi(E)$.
On dira que E est reflexif, lorsque $\Pi(E) = E^{**}$, c.a.d, lorsque l'application Π est aussi surjective.
Si E est reflexif, l'isometrie Π permet d'identifier E et E^{**} et on ecrit dans ce cas $E = E^{**}$.
Noter que du fait que E^{**} est toujours complet, une telle identification n'a lieu que si E est un espace de Banach.

Les espaces reflexifs sont tres importants en analyse fonctionnelle, ils constituent un bon cadre pour la theorie de l'extremum.