8. Exercices avec corrigés

8.1 Opérations sur les ensembles

1. Montrer que $X \setminus (X \setminus A) = A$.

Solution. Soit $x \in X \setminus (X \setminus A) \Leftrightarrow x \notin (X \setminus A) \Leftrightarrow x \in A$.

2. Montrer que : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Solution.

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

3. Montrer que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Solution. Soit $x \in X \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin \cup B \Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

4. Montrer que : $X \setminus (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (X \setminus A_i)$

Solution. Soit $x \in X \setminus (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin A_1$ ou $x \notin A_2$ ou $\ldots \Leftrightarrow$ $x \in (X \setminus A_1)$ ou $x \in (X \setminus A_2) \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} (X \setminus A_i)$

5. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $A \subset B$.

(b) $A \cap B = A$.

(c) $A \cup B = B$.

(d) $(X - B) \subset (X - A)$.

(e) $B \cup (X - A) = X$.

(f) $A \cap (X - B) = \varnothing$.

Solution.
(a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que $A \subset B$ alors $A = A \cap A \subset A \cap B \subset A$.
(b) $\Rightarrow$ (c) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = \varnothing \cup A \cup (B - A) = B$.
(c) $\Rightarrow$ (d) $A \subset A \cup B = B \Leftrightarrow (X - B) \subset (X - A)$.

(d) $\Rightarrow$ (e) $X = B \cup (X - B) \subset B \cup (X - A) \subset X$.
(e) $\Rightarrow$ (f) $B \cup (X - A) = X \Rightarrow (X - B) \cap A = \varnothing$.
(f) $\Rightarrow$ (a) $(X - B) \cap A = \varnothing \Rightarrow (X - B) \subset (X - A) \Rightarrow A \subset B$.

6. Facile.

7. Montrer que si $A \subset \varnothing$ alors $A = \varnothing$.
Solution. On a $\varnothing \subset A$ toujours et $A \subset \varnothing$ par hypothèse donc $\varnothing \subset A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$.

8. Soient $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
Trouver $X \setminus (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$

9. Montrer que : (a) $A - B = A \cap B^c$
Solution. Soit $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in (X - B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$.
(b) $(A - B) \cap B = (A \cap B^c) \cap B = \varnothing$

10. Soient $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$. Trouver :
(a) $A \times (B \cup C)$ (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$
Solution.
(a) $A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$
(b) $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

11. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
Solution.

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\} \\ &= \{(x, y) : x \in A, (y \in B \text{ et } y \in C)\} \\ &= \{(x, y) : (x \in A, y \in B) \text{ et } (x \in A, y \in C)\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

12. Trouver l'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}(X)$ si :
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ $X = \{1, \{2, 3\}\}$
Solution.
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$.
(b) $X = \{1, \{2, 3\}\}$ alors $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$.

13. Si Card$(A) = n < \infty$, alors Card$[\mathscr{P}(A)] = 2^n$.

8.2 Opérations sur les fonctions

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Trouver :
(a) $f[\{1, 3, 4, 7\}]$ (b) $f[1, 4]$ (c) $f^{-1}[\{4, 9\}]$ (d) $f^{-1}[1, 4]$

Solution.
(a) $f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{f(1), f(3), f(4), f(7)\} = \{1, 9, 16, 49\}$
(b) $f[1, 4] = [1, 16]$
(c) $f^{-1}[\{4, 9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}$
(d) $f^{-1}[1, 4] = [-2, -1] \cup [1, 2]$

2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$

(e) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$

(f) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$

Solution.
(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
Soit $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow$ il existe $x \in X : y = f(x) \in f(A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$ ou $f(x) \in f(B) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

(f) $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$
Soit $y \in f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \Rightarrow \exists x \in X : y = f(x) \in f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in A_1$ pour tout $i \Rightarrow x \in A_i$ pour tout $i \Rightarrow y = f(x) \in f(A_i)$ pour tout $i \Rightarrow y = f(x) \in \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.

3. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité ssi f est injective.

(b) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et on obtient égalité ssi f est surjective.

Solution.
(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité ssi f est injective.

Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soit $a \in A$ alors $f(a) \in f(A)$ qui implique que $a \in f^{-1}[f(A)]$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Maintenant on veut montrer que $A = f^{-1}(f(A))$ si et seulement si f est injective.

($\Leftarrow$) Supposons que f est injective et $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(a) = f(x)$ mais puisque f est injective alors $a = x \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$. En outre on sait que $A \subset f^{-1}(f(A))$ donc si f est injective on a

$f^{-1}(f(A)) = A$.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $f^{-1}(f(A)) = A$. Si on pose $A = \{a\}$ on a $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$. Donc $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ qui signifie que f est injective.

Contre exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ et $A = \{1\}$ alors $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\} \supsetneq A = \{1\}$, due au fait que f n'est pas injective.

4. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications et $C \subset Z$, montrer que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$.

Solution.
$(\subseteq)$ Supposons que $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$. Alors, $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$. Alors par la définition des images inverses, $f(x) \in g^{-1}(C)$. Cela montre que $f^{-1}(g^{-1}(C)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(C)$.

$(\supseteq)$ Supposons que $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Alors, $f(x) = g^{-1}(C)$ et donc $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$. Par la définition des images inverses, $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Cela montre que $(g \circ f)^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Les deux assertions ensemble montrent que $(f \circ g)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$.

5. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors :

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(e) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

Solution.

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B)$.
Soit $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(f) $f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
Soit $x \in f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \cap_{i \in I} B_i f(x) \in B_i$ pour tout $i \in I \Leftrightarrow$ $x \in f^{-1}(B_i)$ pour tout $i \in I \Leftrightarrow x \in \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

Solution.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.
$f(1) = f(-1) = 0$ donc f n'est pas injective.
$f^{-1}(2)$ n'existe pas donc f n'est pas surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.
La restriction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.
La restriction $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.
La restriction $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective.

8.3 Espaces métriques

1. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on définie :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|$$

Solution.

(a) Vérifier l'inégalité triangulaire pour les distances d_1 et d_∞ .

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i| = \max_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - z_i| + \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |z_i - y_i| = d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y). \end{aligned}$$

(b) Dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0, 0), 1)$ pour d_1 et d_∞ quand $X = \mathbb{R}^2$. Voir page **??** des notes de cours.

2. Quelles conditions doit on avoir sur $f : X \to Y$, pour que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ soit une distance sur X.

Solution. Les conditions M2 et M3 sont satisfaites pour toute fonction continue f. Donc on doit vérifier condition M1. $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ si et seulement si f est injective.

3. Monter que $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$ est une distance sur $X = \mathbb{R}^2$, et que la boule $B(x_o, r) = \begin{cases} x_0 & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$

Solution.
Clairement les conditions M1 et M2 sont satisfaites.
On doit donc vérifier condition M3 : $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.
Si $\delta(x, z) = 1$ ou bien $\delta(z, y) = 1$, alors M3 est satisfaite car $\delta(x, y) \leq 1$.
Si $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 0$ alors $x = y = z$ et donc $0 = \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) = 0$.
Alors, M3 est vérifiée par δ qui est donc une métrique de $\mathbb{R}^2$.

Par définition on a $B(x_0, r) = \{x \in X : \delta(x_0, x) < r\}$.
Si $r > 1$ alors $\delta(x_0, x) < r$ pour tout $x \in X$ puisque $\delta(x_0, x) < 1$. Donc $B(x_0, r) = X$.

Si $r \leq 1$ alors $\delta(x_0, x) < r \leq 1 \Rightarrow \delta(x_0, x) = 0 \Rightarrow x = x_0$. Donc $B(x_0, r) = \{x_0\}$.

4. Soit $X = C[a, b]$ et $d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$. Montrer que d est une métrique.

Solution. Facile.

5. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Montrer que :

(a) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}\, A$;

(b) $\mathbf{Fr}\, A$ et $\mathbf{Adh}\, A$ sont fermés et $\mathbf{Int}\, A$ est ouvert dans X.

(c) $\mathbf{Int}\, A = A$ si et seulement si A est ouvert.

(d) $\mathbf{Adh}\, A = A$ si et seulement si A est fermé.

(e) $\mathbf{Fr}\, A \subseteq A$ si et seulement si A est fermé.

(f) $\mathbf{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathbf{Adh}\, A$ et $\mathbf{Adh}(X \setminus A) = X \setminus \mathbf{Int}\, A$.

Solution.

(a) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}\, A$. Par définition.

(b) $\mathbf{Fr}\, A$ et $\mathbf{Adh}\, A$ sont fermés et $\mathbf{Int}\, A$ est ouvert dans X.
$\mathbf{Fr}\, A = \mathbf{Adh}(A) - \mathbf{Int}(A) = \mathbf{Adh}(A) \cap (\mathbf{Int}\, A)^c$ qui est fermé.
$\mathbf{Adh}\, A$ est l'intersections de tous les fermés contenant A, c'est donc un fermé.
$\mathbf{Int}\, A$ est l'union d'ouverts donc c'est un ouvert.

(c) $\mathbf{Int}\, A = A$ si et seulement si A est ouvert.
Si $\mathbf{Int}\, A = A$ alors A est ouvert puisque $\mathbf{Int}\, A$ est ouvert.
Si A est ouvert alors et $A = \mathbf{Int}\, A$ car $\mathbf{Int}\, A$ est le grand ouvert contenu dans A.

(d) $\mathbf{Adh}\, A = A$ si et seulement si A est fermé.

(e) $\mathbf{Fr}\, A \subseteq A$ si et seulement si A est fermé.
($\Leftarrow$) Si A est fermé alors $\mathbf{Adh}\, A = A \cup \mathbf{Fr}\, A = A$ donc $\mathbf{Fr}\, A \subset A$.
($\Rightarrow$) Par négation, si A n'est pas fermé alors il existe $x \in \mathbf{Adh}\, A - A$ donc $x \in \mathbf{Fr}\, A - A$ c.a.d. $\mathbf{Fr}\, A \not\subseteq A$.

(f) $\mathbf{Int}(X - A) = X - \mathbf{Adh}\, A$ et $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}\, A$.
(1) $A \subset \mathbf{Adh}\, A \Rightarrow X - \mathbf{Adh}\, A \subset X - A$ de plus $X - \mathbf{Adh}\, A$ est un ouvert contenu dans $X - A$, donc $X - \mathbf{Adh}\, A \subset \mathbf{Int}(X - A)$.
(2) $\mathbf{Int}(X - A) \subset (X - A)$ donc $A \subset X - \mathbf{Int}(X - A)$ qui est fermé donc
$A \subset \mathbf{Adh}\, A \subset X - \mathbf{Int}(X - A) \Rightarrow \mathbf{Int}(X - A) \subset X - \mathbf{Adh}\, A$.
Les deux assertions impliques que $\mathbf{Int}(X - A) = X - \mathbf{Adh}\, A$.
Si on remplace A par $X - A$ dans l'égalité précédente on obtient $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}\, A$.

6. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer : $\mathbf{Adh}\,A_i, \mathbf{Int}\,A_i$, $\mathbf{Fr}\,A_i$, Is A_i (points isolés) et A_i' (points d'accumulations)
$A_1 = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup \{4, 7\}$, $A_2 = \mathbb{Z}$, $A_3 = \mathbb{Q}$, $A_4 = \{(-1)^k + 1/2^k : k \in \mathbb{N}\}$
Solution.

	$\mathbf{Adh}(A_i)$	$\mathbf{Int}(A_i)$	$\mathbf{Fr}(A_i)$	$\mathbf{Is}(A_i)$	A_i'
A_1	$(-\infty, 2] \cup \{4, 7\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, 2)$	$\{0, 2, 4, 7\}$	$\{4, 7\}$	$(-\infty, 2]$
A_2	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$
A_3	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$
A_4	$A_4 \cup \{-1, 1\}$	$\varnothing$	$A_4 \cup \{-1, 1\}$	A_4	$\{-1, 1\}$

7. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :

(a) x est un point d'accumulation de A.

(b) Tout voisinage V_x de x contient une infinité de points de A.

(c) $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$.

Solution.
(a)⇒(b). Supposons que V_x contient un nombre fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de points de A. Soit $r = \inf\{d(x, a_i) : i = 1, \ldots, n\}$, alors $V_x \cap B(x; r/2)$ est un voisinage de x qui ne contient aucun point de A différent de x. Donc x n'est pas un point d'accumulation de A.

(b)⇒(c). Supposons que tout voisinage V_x de x contient une infinité de points de A. Alors $(V_x - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ c.a.d. que $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$.

(c)⇒(a). Supposons que $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$. Alors pour tout voisinage V_x on a $(A - \{x\}) \cap V_x$ contient au moins un point de A, qui entraine que $x \in A'$.

8. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de X est un ouvert dense de X.

Solution.
Il suffit de le montrer pour deux ouverts denses. Soient D_1 et D_2 deux ouverts denses parties de X. Il est clair que $D = D_1 \cap D_2$ est un ouvert. Puisque D_1 est dense alors pour tout $x \in X$ et $r > 0$ on a : $A = B(x, r) \cap D_1 \neq \varnothing$. Donc A est un ouvert non vide, qui entraine que $A \cap D_2 \neq \varnothing$ car D_2 est dense dans X. Mais $A \cap D_2 = B(x, r) \cap (D_1 \cap D_2) \neq \varnothing$ qui montre que $D = D_1 \cap D_2$ est un ouvert dense de x.

9. Soient A et B des parties bornées d'un espace métrique X.

(a) Monter que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\,A)$.

(b) Monter que $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B)$.

Solution.

(a) (1) $A \subset \mathbf{Adh}\, A$ donc $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A)$.
(2) Réciproquement si $x, y \in \mathbf{Adh}\, A$ il existent $x', y' \in A$ tels que $d(x, x') < \epsilon$ et $d(y, y') < \epsilon$, alors $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \leq d(x', y') + 2\epsilon$.
Donc pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}[\mathbf{Adh}(A)] &= \sup_{x,y \in \mathbf{Adh}\, A} d(x, y) \\ &\leq \sup_{x',y' \in A} d(x', y') + 2\epsilon \\ &= \operatorname{diam}(A) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

qui entraine que $\operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A) \leq \operatorname{diam} A$.
Finalement les deux inégalités montrent que $\operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A) = \operatorname{diam} A$.

(b) Si $x, y \in A \cup B, a \in A$ et $b \in B$ alors

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &\leq \operatorname{diam}(A) + d(a, b) + \operatorname{diam}(B), \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{diam}(A \cup B) - \operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B) \leq \inf d(a, b) = d(A, B \leq d(a, b))$$

et finalement

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B).$$

8.4 Continuité sur les Espaces Métriques

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on défini :

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a),\ \mathrm{dist}(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b),\ \mathrm{diam}(A) = \sup_{a\in A, b\in B} d(a,b)$$

(a) Trouver $\mathrm{dist}(0, \mathbb{R}-\mathbb{Q})$, $\mathrm{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q})$, $\mathrm{dist}(0, (2,4])$.

(b) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, calculer $d(A,B)$.

(c) Calculer $\mathrm{diam}([0,1) \cap \mathbb{Q})$ et $\mathrm{diam}([-2,1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Solution.

(a) $\mathrm{dist}(0, \mathbb{R}-\mathbb{Q}) = 0$, $\mathrm{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = 0$, $\mathrm{dist}(0, (2,4]) = 2$.

(b) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, alors $d(A,B) = 0$.

(c) $\mathrm{diam}([0,1) \cap \mathbb{Q}) = 1$ et $\mathrm{diam}([-2,1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 3$.

2. Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est toujours continue dans les cas suivant :

(a) $X = Y$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in X$.

(b) $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$, où y_0 est une constante.

(c) $X = Y = \mathbb{R},\ d_X(a,b) = |a-b|$, et $f(x) = x^2$.

(d) d_X est la distance discrète.

Solution.

(a) Si O un ouvert de $X = Y$ alors $f^{-1}(O) = O$ est aussi un ouvert.

(b) Si O un ouvert de Y, alors $f^{-1}(O) = \varnothing$ si $y_0 \notin O$ et $f^{-1}(O) = X$ si $y_0 \in O$ et les deux sont des ouverts de X.

(c) Si $b > a \geq 0$ alors, $f^{-1}(a,b) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (-\sqrt{b}, -\sqrt{a})$ qui ouvert dans $\mathbb{R}$.

(d) Dans ce cas $f^{-1}(U)$ est ouvert pour tout $U \subset Y$, donc f est continue.

3. Montrer que les intervalles $(-1,1)$ et $(2,5)$ sont homéomorphes dans $(\mathbb{R}, d)$.
Solution. Considérons $f : (-1,1) \to (2,5)$ définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3(x+1)}{2}$ qui est clairement un homéomorphisme, car f est une bijection et $f(-1,1) = (2,5)$. De plus puisque f est une fonction linéaire son inverse existe et est continue.

4. Soit $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$.
Montrer que f est un homéomorphisme.

Solution. On note que f est continue sur $(-1,1)$, $f'(x) >= \dfrac{1}{(1-|x|)^2} > 0$ donc f est injective et $f(-1,1) = \mathbb{R}$ donc f est surjective. De plus $f^{-1}(x) = f(x)$ elle est donc continue. Cela établi que f est en effet un homéomorphisme.

5. Supposons que $A \subseteq X, B \subseteq Y$ et $f : X \to Y$ est un homéomorphisme avec $f(A) = B$. Montrer que les restrictions $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ sont des homéomorphismes.

Solution.

Puisque $f : X \to Y$ est un homéomorphisme alors $f^{-1} : Y \to X$ est continue.

$g = f|_A : A \to B$ est continue et bijective et en plus $g^{-1} = f^{-1}|_B : B \to A$ est continue.

$h = f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ est continue et bijective et en plus $h^{-1} = f^{-1}|_{Y-B} : Y - B \to X - A$ est continue.

6. Soient X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles $f^{-1}(-\infty, a)$ et $f^{-1}(a, \infty)$ sont des ouverts de X.

Solution.

($\Rightarrow$) Supposons que f est continue. Puisque les ensembles $(-\infty, a)$ et (a, ∞) sont des ouverts de $\mathbb{R}$, et f est continue alors $f^{-1}(-\infty, a)$ et $f^{-1}(a, \infty)$ sont des ouverts de X.

($\Leftarrow$) Si $a < b$ alors $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ et que $f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \cap f^{-1}(a, \infty)$ est un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $O = \cup_i (a_i, b_i)$ et donc $f^{-1}O = f^{-1}[\cup_i (a_i, b_i)] = \cup_i f^{-1}(a_i, b_i)$ est un ouvert de X car c'est l'union d'ouverts de X.

7. Montrer que $f : X \to Y$ est continue ssi $f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$ pour tout $A \subset X$.

Solution.

($\Rightarrow$) Supposons que f est continue et $A \subset X$, alors $A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\mathbf{Adh}\, f(A)]$ ou $f^{-1}[\mathbf{Adh}\, f(A)]$ est fermé car f est continue. Mais $\mathbf{Adh}\, A$ est le plus petit fermé contenant A, alors $A \subset \mathbf{Adh}\, A \subset f^{-1}[\mathbf{Adh}\, f(A)]$ qui entraine que $f(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Adh}\, f(A)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $f[\mathbf{Adh}\, A] \subset \mathbf{Adh}[f(A)]$. On veut monter que l'image inverse d'un fermé de Y est un fermé de X. Soit F un fermé de Y et $A = f^{-1}(F) \subset X$. on a $f(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Adh}[f(A)] = \mathbf{Adh}[f(f^{-1}(F))] \subset \mathbf{Adh}\, F = F$. Donc $\mathbf{Adh}\, A \subset f^{-1}[f(\mathbf{Adh}\, A)] \subset f^{-1}(F) = A$. Cela montre que $A = f^{-1}(F)$ est un fermé de X et donc f est continue.

8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

Solution. Supposons que $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et que f est surjective. Alors $G = (g \circ f)(E) = g[f(E)] = g(F)$, qui montre que g est aussi surjective. Puisque $(g \circ f)$ est un homéomorphisme alors $h = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est continue de plus on a :

$(h \circ g) \circ f = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = 1_E$ donc f est injective.

$f \circ (h \circ g) = f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = 1_F$ donc f est surjective.
$h \circ g = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = f^{-1}$ est continue car c'est la composée de deux fonction continues.
Donc f est un homéomorphisme.
$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est un homéomorphisme car c'est la composée de deux homéomorphismes.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution.
Soit $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{R}$ alors il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$.
Puisque f est continue alors $0 = f(x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour $x \in X$; $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

(a) Montrer que si $x, y \in X$ alors $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) En déduire que la fonction $f(x) = d(x, A)$ est continue.

(c) Monter que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

(d) On suppose $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A.

Solution.

(a) Soit $a \in A$ alors $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ qui entraine que $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, y) + \operatorname{dist}(y, A)$.
Donc $\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leq d(x, y)$ (1).
Si nous échangeons x et y dans (1) on trouve $\operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, y)$ (2).
Les inégalités (1) et (2) nous donne $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, donc f est continue.

(c) Soit $B = \{x \in X : f(x) = \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.
Si $x \in B$ alors soit $x \in \mathbf{Int}\, A$ ou bien $x \in \mathbf{Fr}\, A$ qui montre que $B \subset \mathbf{Adh}\, A$.

L'ensemble $\{0\}$ est fermé dans $[0, \infty)$ et $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ est continue donc $f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans X. Mais $f^{-1}(\{0\}) = B \supset A$ et $\mathbf{Adh}\, A$ est le plus petit fermé contenant A donc $\mathbf{Adh}\, A \subset f^{-1}(\{0\}) = B$.
Les deux inclusions nous donnent que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : f(x) = \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

(d) On suppose $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A.
Soit $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$ alors $\operatorname{dist}(x, A) = r > 0$. Soient $U = B(x_0, r/3)$ et $V = \bigcup_{a \in A} B(a; r/3)$, alors U et V sont deux ouverts qui séparent x_0 et A.

8.5 Espaces Métriques Complets

1. Montrer les propositions suivante :

(a) Toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

(c) Toute suite de Cauchy est bornée.

(d) Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.

Solution. Pour les parties (a),(c) et (d) voire Théorème 4.15 page 79.
(b) Soit (x_n) une suite de Cauchy, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Soit (x_{x_k}) une sous-suite de (x_n). Si on choisi $n_{k_1}, n_{k_2} > N$ alors $d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \epsilon$. Donc (x_{x_k}) est une suite de Cauchy aussi.

2. Avec qu'elles des distances d_a, d_b, d_c, $\mathbb{R}$ est t-il complet ?
(a) $(\mathbb{R}, d_a)$ est complet où $d_a(x, y) = |x^3 - y^3|$.
(b) $(\mathbb{R}, d_b)$ n'est pas complet où $d_b(x, y) = |e^x - e^y|$.
(c) $(\mathbb{R}, d_c)$ n'est pas complet où $d_c(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$.
Solution.
(a) Soit (x_n) une suite d_a-Cauchy, donc $d_a(x_n, x_m) = |x_n^3 - x_m^3| \to 0$ quand $m, n \to \infty$. Donc (x_n^3) est d_u-Cauchy, est puisque (R, d_u) est complet alors (x_n^3) est convergente. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n^3 - y| \to 0$ quand $n \to \infty$.
Soit $x = y^{1/3}$, alors $x_n^3 \to x^3 \in \mathbb{R}$ c.a.d. que $d_a(x_n, x) = |x_n^3 - x^3| = |x_n^3 - y| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc (x_n) est d_a–convergent qui entraine que (R, d_a) est complet.

(b) Montrer que la suite $(-n)$ est d_b–Cauchy mais ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d_b)$.

(c) Soit $(\mathbb{R}, d_u)$ l'espace métrique complet muni de la distance usuelle. Considérons la suite (n) dans $\mathbb{R}$. La suite $(\tan^{-1} n)$ converge vers $\pi/2$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$. Donc $(\tan^{-1} n)$ est d_u–Cauchy qui entraine que (n) est d_c–Cauchy. Si on suppose que $n \to a$ dans $(\mathbb{R}, d_c)$, alors $\tan^{-1} n \to \tan^{-1} a$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$, mais voudrait dire que $\tan^{-1} a = \pi/2$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ qui est impossible. Donc (n) ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d_c)$, qui fait que cet espace n'est pas complet.

3. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et (x_n) est une suite de Cauchy dans X.

(a) Montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y.

(b) Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue, montrer que si Y est complet X est complet.

Solution.

(a) Puisque f est uniformément continue alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_X(x_1, x_2) < \delta$ entraine $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

Puisque (x_n) est de Cauchy alors pour tout $\delta > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q > N$ alors $|x_p - x_q| < \delta$.

Donc pour tout $p, q \in \mathbb{N} : p, q > N$ on a $d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \epsilon$ qui montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y).

(b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors d'après (a) $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y). Si de plus (Y, d_Y) est complet alors $(f(x_n))$ est convergente donc $f(x_n) \overset{d_Y}{\to} y \in Y$ qui entraine $x_n \overset{d_X}{\to} f^{-1}(y) \in X$ par continuité de f^{-1}. Donc (x_n) est convergente dans (X, d_X) qui entraine qu'il est complet.

4. Montrer que si (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors (x_n^2) est de Cauchy aussi.

Solution.
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d_u)$. On sait que que suite de Cauchy est bornée c.a.d. $|x_n| < M$ pour tout n. Soit $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $|x_m - x_n| < \epsilon$. On a alors $|x_m^2 - x_n^2| = |x_m - x_n||x_m + x_n| \leq 2M\epsilon = \epsilon_1$. Donc $(x_n^2)_n$ est de Cauchy.

5. Si (X, d_X) est un espace métrique complet et $Y \subseteq X$, alors (Y, d_Y) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

Solution.
$(\Rightarrow)$ Supposons que Y est complet et soit $x \in \mathbf{Adh}\, Y$. Alors il existe une suite $(y_n) \in Y$ qui converge vers x dans X. Puisque (y_n) est une suite convergente dans un espace complet Y la limite doit être dans Y. De plus la limite est unique donc $x \in Y$ qui entraine que Y est fermé.

$(\Leftarrow)$ Supposons que Y est fermé dans X et que (y_n) est suite de Cauchy dans $Y \subset X$. Puisque X est complet, il existe $x \in X$ tel que $y_n \to x$. Mais puisque Y est fermé il doit contenir tous les points limites donc $x \in Y$. Il suit que (Y, d_Y) est complet.

6. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.
Solution. Il suffit de le montrer pour deux parties complètes de X. Soient A, B deux parties complètes de X et (x_n) une suite de Cauchy dans $A \cup B$.

7. Si (X, δ) est l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement si, il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.
Solution. Supposons que $x_n \to x$ dans (X, δ). Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\delta(x_n, x) < \epsilon$. Mais puisque δ est la distance discrète alors si $\epsilon < 1$ on a $\delta(x_n, x) < \epsilon \Leftrightarrow \delta(x_n, x) = 0$ donc $x_n = x$ pour $n \geq N$.

8. Si (Z, d) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), alors la suite (x_n, y_n) de Z converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
Solution. Notons que si $z_n = (x_n, y_n)$ et $z = (x, y)$ alors

$$d_Z(z_n, z) = d_Z((x_n, y_n), (x, y)) = d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y)$$

$$\begin{aligned} z_n = (x_n, y_n) \to z = (x, y) &\Leftrightarrow d_Z(z_n, z) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) \to 0 \text{ et } d_Y(y_n, y) \to 0 \\ &\Leftrightarrow x_n \to x \text{ et } y_n \to y. \end{aligned}$$

9. (a) Montrer que pour $x \geq 1$ et $t \geq 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$.
(b) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, \infty)$
(c) Trouver le point fixe de f.

Solution.
(a) $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+t} - \sqrt{x})(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} = \dfrac{t}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} \leq \dfrac{t}{2}$ car $x \geq 1$.
(b) Si $f(x) = \sqrt{x}$ on pose $y = x + t$ où $t > 0$ et $x \geq 1$ alors,
$d(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| = |\sqrt{x+t} - \sqrt{x}| \leq \dfrac{t}{2} = \dfrac{|y-x|}{2} \leq \dfrac{d(y,x)}{2}$.
Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction.

(c) Puisque $[1, \infty)$ est complet et $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction donc le théorème de Banach garanti un fixe unique qui est $x = 1$.

10. Monter la fonction $f : [1, 2] \to [1, 2]$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right)$ a un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.

Solution. Puisque $f'(x) = (1 - 2x^{-2})/2 < 1/2 < 1$, alors Corollaire 5.27 garanti un point fixe.

$$\frac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right) = x \Leftrightarrow 2x^{-1} = x \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [1, 2].$$

11. Monter que l'équation $x^5 + 7x - 1 = 0$ possède une solution unique dans $[0, 1]$. Trouver la racine exacte à 6 décimaux en utilisant la méthode de Newton.

Solution. Si on pose $f(x) = x^5 + 7x - 1$ on a $f'(x) = 5x^4 + 7 > 0$ donc f est strictement croissante. De plus on a $f(0)f(1) = (-1)(7) < 0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires garanti une racine dans $(0, 1)$, cette racine est unique car $f' > 0$. Posons $x_1 = 1/2$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ on aura : $x_2 = 0.153846$, $x_3 = 0.142849$, $x_4 = 0.142848$, et $x_5 = 0.142848$.

12. Soit $f : (0, 1/4) \to (0, 1/4)$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

Solution. $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, 1$ donc évidement f n'admet pas de point fixe sur $(0, 1/4)$.
$f(0, 1/4) = (0, 1/16) \subset (0, 1/4)$. De plus on a $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
Donc f est contraction sur $(0, 1/4)$. Mais $(0, 1/4)$ n'est pas complet, donc cela ne contredit pas le théorème du point fixe de Banach.

13. Soit $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ définie par $f(x) = x + x^{-1}$. Montrer que $[1, \infty)$ est complet et $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x, y \in [1, \infty)$, mais f n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.

Solution. $[1, \infty)$ est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$, donc doit être complet par Proposition 5.19.
$f(x) = x + x^{-1} \leq 1$ pour $x \geq 1$, alors l'image de $[1, \infty)$ est lui même.
De plus $|f'(x)| = |1 - x^{-2}| < 1$ quand $x \in [1, \infty)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $|f(x) - f(y)| \leq |x - y||f'(c)| < |x - y|$. Cela ne montre pas que f est une contraction. Car pour avoir une contraction on doit avoir $|f'(c)| = 1 - c^{-2} < k < 1$ pour tout $c \in [1, \infty)$ ce qui est impossible.

8.6 Espaces Métriques Compacts

1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont compacts ?

(i) $[0, 1)$ (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(ii) $[0, \infty)$ (v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$

(iii) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

Solution.

(i) $[0, 1)$ n'est pas fermé, donc n'est pas compact.

(ii) $[0, \infty)$ n'est pas borné, donc n'est pas compact.

(iii) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ n'est pas complet, donc n'est pas compact.

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est borné et fermé donc est compact.

(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$ n'est pas borné, donc n'est pas compact.

(vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ est borné et fermé donc est compact.

2. Donner des exemples de suites dans $\mathbb{R}$ avec 0, 1 et 2 points d'accumulations :

Solution.

$\{n : n \in \mathbb{N}\}$ n'a pas de point d'accumulation.

$\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ possède un seul point d'accumulation $\{0\}$.

$\{(-1)^n(1 + n^{-1}) : n \in \mathbb{N}\}$ possède deux points d'accumulations $\{-1, 1\}$.

3. Considèrerons l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$ où $d(x, y) = |x - y|$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$. Montrer que A est fermé et borné mais n'est pas compact.

Solution. Il est clair que A est borné. On peut écrire A comme :
$A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\} = A_1 \cup A_2$. De plus on a

$$A_1 = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad A_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}.$$

Donc A_1 et A_2 sont fermés dans $\mathbb{Q}$.

Pour la compacité considérons $G = \{G_n; n \geq 1\}$ où

$$G_n = \{x \in \mathbb{Q} : 2 + n^{-1} < x^2 < 3 - n^{-1}\}.$$

G est un recouvrement ouvert de A qui ne possède aucun sous-recouvrement fini.

4. Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue, et K est une partie compacte de Y . Montrer que $f^{-1}(K)$ est fermé. Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(K)$ n'est pas nécessairement compact.

Solution. Puisque tout compact est fermé et f est continue alors $f^{-1}(K)$ est fermé.
Contre exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ et $K = \{0\}$.

5. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas compact, alors il existe une fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ qui est bornée mais n'atteint pas toutes ses bornes.

Solution. Si A n'est pas compact alors il est soit non borné ou bien non fermé.
(1) Si A non borné considérons $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$, alors pour tout $x \in$ on a $0 < f(x) \leq 1$. La borne inférieure de f est 0, mais il n'existe pas de $x \in A$ tel que $f(x) = 0$.
(2) Supposons que A non fermé et soit $b \in \mathbf{Adh}\, A - A$. Considérons $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x - b|$, alors la borne inférieure de f est 0, mais il n'existe pas de $x \in A$ tel que $f(x) = 0$.

6. (a) Monter que la réunion finie de parties compactes d'un espace métrique X est compacte.
(b) Monter que la réunion arbitraire de parties compactes d'un espace métrique X n'est pas nécessairement compacte.
Solution.
(a) Il suffit de montrer que la réunion de deux parties compactes est compacte.
Soient K_1, K_2 deux parties compactes, $K = K_1 \cup K_2$ et $\mathcal{C}$ un recouvrement ouvert de K donc $K \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$. $\mathcal{C}$ est recouvrement ouvert de K_1 (K_2), donc doit contenir un sous-recouvrement fini. Donc il existent $J_1, J_2 \subset J$ finis tel que $K_1 \subseteq \bigcup_{i \in J_1} G_i$ et $K_2 \subseteq \bigcup_{i \in J_2} G_i$ qui entraine que $K = K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} G_i$.
(b) Soit $K_n = [1, n+1], n = 1, 2, \ldots$. Il est évident que K_n est compact dans $\mathbb{R}$ et que $\bigcup_n K_n = [1, \infty)$ n'est pas compact.

7. Monter que l'intersection arbitraire de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte.
Solution. Soit $K = \bigcap_{a \in A} K_a$, où K_a sont des compacts de $\mathbb{R}^n$. K est fermé dans $\mathbb{R}^n$ car c'est l'intersection de fermés. De plus K est fermé dans le compact K_{a_0} où $a_0 \in A$. Il en suit que K est une partie fermée d'un compact, donc elle est compacte.

8. Montrer que l'espace métrique discret (X, δ) est compact si et seulement si X est fini.
Solution. Supposons $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est fini. Alors, X possède un maximum de 2^n de parties ouvertes distinctes. Donc n'importe quel recouvrement ouvert de X est lui même un recouvrement ouvert fini.

Par contre si X est infini alors le recouvrement ouvert $\{\{x\} : x \in X\}$ n'admet pas de recouvrement fini. Donc (X, δ) est compact si et seulement si X est fini.

9. Montrer que si A est précompact, alors $\mathbf{Adh}(A)$ l'est aussi.
Solution. Supposons que A est précompact donc pour tout $r > 0$ ils existent $x_1, \ldots, x_n$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Si $y \in \mathbf{Adh}(A) - A$ alors $B(y, r) \cap A \neq \varnothing$, il existe donc $z \in B(x_k, r) \cap A$ pour un certain x_k. On a $d(y, x_k) \leq d(y, z) + d(z, x_k) \leq$

$r + r = 2r$ donc $y \in B(x_k, 2r)$. Donc $\mathbf{Adh}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 2r)$ qui montre que $\mathbf{Adh}\, A$ est en effet précompact.

10. Montrer que si A est précompact, alors A est borné.
Solution. Si A est précompact, alors pour tout $r > 0$ ils existent $x_1, \dots, x_n$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Donc $\operatorname{diam} A \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam} B(x_i, r) = 2nr$.

11. Montrer que tout sous-ensemble fini de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est compact.
Solution. Soient $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un sous-ensemble fini de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. Alors, A est borné ($|a_i| \leq M$) et fermé ($\mathbf{Adh}\, A = A$) donc compact.

12. Soient X, Y deux d'espaces métriques. Montrer que $Z = X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.
Solution.
($\Rightarrow$) Supposons que $Z = X \times Y$ est compact. Alors, la suite (x_n, y) possède une sous-suite convergente $(x_{n_k}, y) \to (x, y)$. Donc toute suite (x_n) de X possède une sous-suite convergente dans X qui entraine que X est compact. Par symétrie on montre que Y est aussi compact.
($\Leftarrow$) Réciproquement supposons que X et Y sont compacts et soit $(z_n) = (x_n, y_n)$ une suite dans $Z = X \times Y$. Puisque X est compact la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente dans X. Puisque Y est compact la suite (x_{n_k}) possède une sous-suite $(y_{n_{k_j}})$ convergente dans Y. Donc la suite $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ est une sous-suite convergente de la suite (x_n, y_n) dans $Z = X \times Y$. Cela montre que $Z = X \times Y$ est compact.

13. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \to x$. Montrer, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.
Solution. Soit $(G_a)_{a \in I}$ un recouvrement ouvert de A. Il existe un ouvert G_{a_N} qui contient $\{x, x_N, x_{N+1}, \dots\}$. Pour tout $x_i : i = 1, 2, \dots, N-1$ il existe un ouvert G_{a_i} tel que $x_i \in G_{a_i}$. Donc $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\} \cup \{x, x_N, x_{N+1}, \dots\} \subset \cup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ qui est un sous-recouvrement ouvert fini et alors A est compact.

14. Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \subset X$ et $A \cap B = \varnothing$.

- **(a)** Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.
- **(b)** Est ce que $\operatorname{dist}(A, B) \neq 0$ si A et B sont fermés ?

Solution. Par définition $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

- **(a)** Supposons que A est compact et B est fermé, donc $\mathbf{Adh}\, A = A$ et $\mathbf{Adh}\, B = B$. Considérons la fonction $f : B \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$. f est continue sur le compact B donc elle est bornée et atteint son minimum sur B. Ils existent $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\operatorname{dist}(A, B) = d(a, b)$. Puisque $A \cap B = \varnothing$ alors $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ car s'il existe $b \in B$ tel que $\operatorname{dist}(A, b) = 0$ alors $b \in \mathbf{Adh}\, A = A$ (voir exercice 9 TD 4) et donc $A \cap B \neq \varnothing$ ce qui est une contradiction.

(b) Considérons $A = \{(x, y) : xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) : y = 0\}$. A et B sont fermés dans $\mathbb{R}^2$, mais $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ puisque $y = 1/x \to 0$ quand $x \to \infty$.

8.7 Espaces Métriques Connexes

1. Soit (X, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) X est connexe.

(b) Il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.

(c) Il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.

Solution.
(a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que $A, B \subset X, X = A \cup B, A \cap B = \varnothing$ et A, B ouverts. Alors, A et B sont fermés car $X - A = B$ et $X - B = A$. Il suit que A et B sont à la fois ouverts et fermés qui montre que X n'est pas connexe.

(b) $\Rightarrow$ (c). Supposons que $A, B \subset X, X = A \cup B, A \cap B = \varnothing$ et A, B sont fermés. Alors A et B sont aussi des ouverts qui forment une partition de X.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supposons que X n'est pas connexe. Alors, il existe une partie propre $G \subsetneq X$ qui est à la fois ouverte et fermée. Il suit que $X - G$ est une partie de X à la fois ouverte et fermée et $X = G \cup (X - G)$ qui montre qu'il existe une partions de X en deux fermés disjoints.

2. Montrer que si $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.
Solution.
Si $G \subsetneq f(X)$ est à la fois ouverte et fermée. Alors puisque f est continue $f^{-1}(G) \subsetneq X$ est à la fois ouverte et fermée qui entraine que X n'est pas connexe.

3. Si (X, d) est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue telle que $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in X$, montrer que f doit être constante.
Solution.
Si $|f(x)| = 1$ alors $f(X) = \{-1, 1\}$. Donc $X = f^{-1}\{-1\} \cup f^{-1}\{1\}$. Puisque f est continue $f^{-1}\{-1\}$ et $f^{-1}\{1\}$ sont des fermés de X. I suit que X est une partition de deux fermés disjoints donc X est non-connexe.

4. Monter qu'un espace connexe par arcs est connexe.
Solution.
Supposons que X est connexe par arcs et $g : X \to \{0, 1\}$ est continue. Si g n'est pas constante, alors ils existent $x_1, x_2 \in X$ tels que $g(x_1) = 0$ et $g(x_2) = 1$. Soit $f : [0, 1] \to X$ un chemin dans X tel que $f(0) = x_1$ et $f(1) = x_2$. Alors la fonction $g \circ f : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est continue et surjective qui entraine que $[0, 1]$ n'est pas connexe, qui est une contradiction.

5. Supposons que $f, g : [0, 1] \to X$ sont respectivement des chemins de $x \to y$ et $y \to z$. Montrer que

$$h(t) = \begin{cases} f(2t); & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1); & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin $x \to z$ dans X.

Solution.

On a $h(0) = f(0) = x, h(1/2) = f(1) = y = g(0)$, et $h(1) = g(1) = z$. De plus $f(2t)$ et $g(2t-1)$ sont des composées de fonctions continues donc sont elles mêmes continues qui entraine que h est aussi continue.

6. Montrer qu'une partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

Solution.

Soit G un partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in G$.
Soit $A = \{x \in G$ qui ont un arc joignant x_0 et $x\}$. A est connexe par arcs.
Si on montre que A est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$, alors $G = A \cup (G - A)$ serait une partions d'ouverts de la partie connexe G. Donc soit $A = \varnothing$ ou bien $G - A = \varnothing$. Puisque $x_0 \in A$ alors on a $G - A = \varnothing$. Donc $G = A$ est connexe par arc.

Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A \subset G$, puisque G est ouvert alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset G$. Tout point $y \in B(x, r)$ peut être joint à x par un segment de ligne droite dans $B(x, r)$ donc tout point $y \in B(x, r)$ peut être joint à x_0 par un arc et donc $B(x, r) \subset A$ qui montre que A est ouvert.

Montrons que $G - A$ est ouvert aussi. Soit $x \in G - A$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset G - A$. Sinon cela veut dire que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. Soit $y \in B(x, r) \cap A$ alors on peut joindre x_0 à y et y à x qui est une contradiction car $x \in G - A$. Donc $G - A$ est ouvert.

7. Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$, admet un point fixe $x \in [a, b]$.

Solution.

Puisque $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ alors $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Soit $g(x) = f(x) - x$, alors g est continue et $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in (a, b)$ tel que $g(c) = 0$ ou bien $f(x) = c$.

8. Supposons que X est connexe par arcs, et $f : X \to Y$ est continue et surjective. Montrer que Y est connexe par arcs.

Solution.

Soient $y_1, y_2 \in Y$. Puisque f est surjective, $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ pour $x_1, x_2 \in X$. Soit $g : [0, 1] \to X$ un chemin continue dans X de x_1 vers x_2. Alors la fonction $f \circ g : [0, 1] \to Y$ est un chemin continue dans Y de y_1 vers y_2. Alors Y est connexe par arcs.

9. Montrer que $X = C([0, 1])$ avec $d(f, g) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$ est connexe par arcs et donc connexe.

Solution.

Supposons que f, g sont deux éléments quelconques dans $C[0, 1]$. On défini un chemin $h : [0, 1] \to C[0, 1]$ par $h(t) = tf + (1 - t)g$. Alors pour chaque $t \in [0, 1]$ la fonction $h(t)$ est continue donc est un élément de $C[0, 1]$. De plus, la fonction h est continue puisque

$$d_\infty(h(t),h(s)) = \sup_{x\in[0,1]} |(t-s)f(x)+(s-t)g(x)| \leq |t-s|(Mf+Mg),$$

où $|f(x)| \leq M_f$ et $|g(x)| \leq M_g$ pour tout $x \in [0,1]$.
Pour tout $\epsilon > 0$, soit $\delta = \epsilon/(Mf+Mg)$, alors on obtient $d_\infty(h(t),h(s)) < \epsilon$ quand $|t?s| < \delta$. Finalement , $h(0) = g$ et $h(1) = f$, donc h est un chemin continu dans $C[0,1]$ de g vers f. Donc $C[0,1]$ est connexe par arcs et donc connexe.

10. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subsetneq X$. Montrer que X est connexe si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.
Solution.
On sait $\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) - \mathbf{Int}(A)$, don si A est à la fois ouvert et fermé $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$. Donc X est connexe si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

11. Supposons que A et B sont des parties connexes de X tel que $\mathbf{Adh}(A) \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
Solution.
Considérons la fonction continue $f : A \cup B \to \{0,1\}$ avec la distance discrète δ.
Puisque A et B sont connexes alors les fonctions ; $f|_A = c_A : A \to \{0,1\}$ et $f|_B = c_B : B \to \{0,1\}$ sont constantes et ont pour valeur 0 ou bien 1. Notons que $\mathbf{Adh}(A)$ est aussi connexe car A est connexe et $f(\mathbf{Adh}\, A) = c_A$. Soit $b \in \mathbf{Adh}(A) \cap B$ alors $f(b) = c_A = c_B$. Donc $f(A \cup B) = c_A$ qui entraine que f est constante sur $A \cup B$ qui est donc connexe.

12. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ un homomorphisme et $a \in X$.
Solution.

(a) Montrer que $f_a : X - \{a\} \to Y - \{f(a)\}$ est un homomorphisme.
Voir exercice 5 du TD no. 4.

(b) Déduire qu'il n y a pas d'homomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ soit un homéomorphisme.
Alors la restriction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$ serait aussi un homéomorphisme.
Mais $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe, cependant $\mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$ est connexe.
Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

8.8 Espaces Topologiques

1. Soit $X = \{a, b, c\}$ trouver les 29 topologies possibles sur X.
Solution. On donne les types distincts des topologies et le nombre de chaque.
$\mathscr{T}_{Triv} = \{\varnothing, X\}$ (1) $\mathscr{T}_{dis} = P(X)$ (1)
$\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ (3) $\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a, b\}, X\}$ (3)
$\mathscr{T}_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ (6) $\mathscr{T}_4 = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\}$ (3)
$\mathscr{T}_5 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ (3) $\mathscr{T}_6 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ (3)
$\mathscr{T}_7 = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ (6)

2. Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{cof}})$ ou X est infini $\mathscr{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X : (X - U) \text{ fini }\} \cup \{\varnothing\}$ et $A \subseteq X$.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ est une topologie sur X.

(b) Déterminer quels sont les parties fermées de X.

(c) Si A est fini trouver $\mathbf{Adh}\,A$, $\mathbf{Int}\,A$ et $\mathbf{Fr}\,A$.

(d) Si A est infini trouver $\mathbf{Adh}\,A$, $\mathbf{Int}\,A$ et $\mathbf{Fr}\,A$.

Solution.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ est une topologie sur X.
(1) $X - X = \varnothing$ fini donc $X \in \mathscr{T}_{\text{cof}}$.
(2) Soient $U_a \in \mathscr{T}_{\text{cof}}, a \in A$, alors $X - \cup_a U_a = \cap_a (X - U_a)$ est fini car c'est une intersection de finis.
(3) Si $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\text{cof}}$ alors $X - (U_1 \cap U_2) = (X - U_1) \cap (X - U_2)$ est fini car c'est l'union de 2 fini.

(b) Déterminer quels sont les parties fermées de X.
Les fermés sont les compléments des ouverts donc les fermés de $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ sont les parties finies de X ou bien X.

(c) Si A est fini trouver $\mathbf{Adh}\,A$, $\mathbf{Int}\,A$ et $\mathbf{Fr}\,A$.
$\mathbf{Adh}\,A = A$ car A est fermé.
$\mathbf{Int}\,A = \varnothing$ car c'est le seul ouvert contenu dans A.
$\mathbf{Fr}\,A = \mathbf{Adh}\,A - \mathbf{Int}\,A = A$.

(d) Si A est infini trouver $\mathbf{Adh}\,A$, $\mathbf{Int}\,A$ et $\mathbf{Fr}\,A$.
$\mathbf{Adh}\,A = X$ car c'est le plus petit fermé contenant A.
$\mathbf{Int}\,A = A$ si $X - A$ est fini et $\mathbf{Int}\,A = \varnothing$ si $X - A$ est infini.
$\mathbf{Fr}\,A = \mathbf{Adh}\,A - \mathbf{Int}\,A = X - A$ si $X - A$ est fini et $\mathbf{Fr}\,A = \mathbf{Adh}\,A - \mathbf{Int}\,A = X$ si $X - A$ est infini.

3. Soient $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ deux topologies sur X.
(a) Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X.
(b) Montrer que généralement $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ n'est pas une topologie sur X.

Solution.
(a) Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X.

(O1) $\varnothing, X \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ donc $\varnothing, X \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.
(O2) Si $U_a \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ alors $\cup_a U_a \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ et donc $\cup_a U_a \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.
(O3) Si $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ alors $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ et donc $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.
(b) Montrer que généralement $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ n'est pas une topologie sur X.
Soit $X = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ et $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$ sont deux topologies (voir exercice 1).
Mais $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$ n'est pas une topologie.

4. Soit $\mathscr{T}$ la collection de parties de $\mathbb{R}$ contenant $\varnothing, \mathbb{R}$ et tout les intervalles de la forme $(-\infty, b)$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
Solution.
(O1) $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathscr{T}$.
(O2) $\cup_a(-\infty, b_a) = (-\infty, \sup\limits_a b_a) \in \mathscr{T}$.
(O3) $(-\infty, b_1) \cap (-\infty, b_1) = (-\infty, \inf\{b_1, b_2\}) \in \mathscr{T}$.

5. Montrer que $\mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
Solution.
(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ on a $x \in (x - r, x + r) \in \mathscr{B}$.
(2) Soit $x \in B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ alors si $B_1 = (a_1, b_1)$ et $B_2 = (a_2, b_2)$ on a $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (c_1, c_2) \in \mathscr{B}$.

6. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases pour les topologies $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ respectivement. Montrer que $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$ si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.
Solution.
$(\Rightarrow)$ Soit $x \in B \in \mathscr{B}$ et puisque $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$ alors $B \in \mathscr{T}'$.
$(\Leftarrow)$ Soit $U \in \mathscr{T}$, alors pour tout $x \in U$ il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset U$. Mais par hypothèse il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$. Donc pour tout $x \in U$ il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset U$ qui entraine que $U \in \mathscr{T}'$.

7. Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique , $A \subset X$, et $\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\}$.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_A$ est une topologie sur A.

(b) Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ et $A = \{a, b\}$ trouver la topologie induite $\mathscr{T}_A$ de A,

Solution.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_A$ est une topologie sur A.
(O1) $\varnothing = A \cap \varnothing$ et $A = A \cap X$ donc $\varnothing, A \in \mathscr{T}_A$.
(O2) Si $U_a \in \mathscr{T}$ alors $(A \cap U_a) \in \mathscr{T}_A$ et on a $\cup_a(A \cap U_a) = A \cap (\cup_a U_a) \in \mathscr{T}_A$ car $\cup_a U_a \in \mathscr{T}$.
(O3) Si $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$ alors $(A \cap U_1), (A \cap U_2) \in \mathscr{T}_A$ et on a $(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathscr{T}_A$.

(b) Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ et $A = \{a, b\}$ trouver la topologie induite $\mathscr{T}_A$ de A,
$\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\} = \{\varnothing, \{a\}, A\}$.

8. Soit $(A, \mathscr{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. Montrer que pour que tout ouvert de A soit un ouvert de X il faut et il suffit que A soit un ouvert de X.
Solution.
(1) Si A est un ouvert de X alors $A \in \mathscr{T}$. Pour tout $G \in \mathscr{T}_A$, il existe $U \in \mathscr{T}$ tel que $G = A \cap U$. Mais puisque $A, U \in \mathscr{T}$ alors $G = A \cap U \in \mathscr{T}$ donc $G \in \mathscr{T}$ et alors $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{T}$.
(2) Si tout ouvert de A est un ouvert de X alors $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{T}$, qui entraine que $A \in \mathscr{T}$ c.a.d. A est un ouvert de X.

9. Montrer que $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue dans chacun des cas suivants :

(a) $(X, \mathscr{T}_X) = (Y, \mathscr{T}_Y)$ et $f(x) = x$.

(b) f est constante.

(c) $\mathscr{T}_X = \mathscr{T}_{disc}$.

(d) $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{triv}$.

Solution.

(a) Si $O \in \mathscr{T}_X$ alors puisque $f(x) = x$, $f^{-1}(O) = O \in \mathscr{T}_X$ et donc f est continue.

(b) Si $O \in \mathscr{T}_X$ alors puisque $f(x) = c$, $f^{-1}(O) = X \in \mathscr{T}_X$ si $c \in O$ sinon $f^{-1}(O) = \varnothing \in \mathscr{T}_X$ et donc f est continue.

(c) Puisque tout sous ensemble est ouvert dans la topologie discrète $\mathscr{T}_{disc}$, alors $f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_{disc}$ pour tout $O \in \mathscr{T}_Y$ et donc f est continue. .

(d) Puisque $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{triv} = \{\varnothing, Y\}$ on a $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathscr{T}_X$ et $f^{-1}(Y) = X \in \mathscr{T}_X$ et donc f est continue.

10. Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ continue, et A une partie non vide de X.
Montrer que la restriction $g = f|_A : (A, \mathscr{T}_A) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue.
Solution. Soit $O \in \mathscr{T}_Y$ alors $g^{-1}(O) = A \cap f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_A$ car $f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_X$ et donc g est continue.

11. Montrer que si $f, g : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ sont des applications continues, montrer que :

(a) Si X est séparé $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

(b) Si Y est séparé $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

Solution.