5: Espaces Métriques Complets – Corrigés

1. Montrer les propositions suivante:

   a) Toute suite convergente est de Cauchy.

   b) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

   c) Toute suite de Cauchy est bornée.

   d) Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.

   Solution. Pour les parties (a),(c) et (d) voire Théorème 4.13 page 67.
   (b) Soit (x_n) une suite de Cauchy, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Soit (x_{x_k}) une sous-suite de (x_n). Si on choisi $n_{k_1}, n_{k_2} > N$ alors $d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \epsilon$. Donc (x_{x_k}) est une suite de Cauchy aussi.

2. Avec qu'elles des distances d_a, d_b, d_c, $\mathbb{R}$ est t-il complet?
   (a) $(\mathbb{R}, d_a)$ est complet où $d_a(x,y) = |x^3 - y^3|$.
   (b) $(\mathbb{R}, d_b)$ n'est pas complet où $d_b(x,y) = |e^x - e^y|$.
   (c) $(\mathbb{R}, d_c)$ n'est pas complet où $d_c(x,y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$.
   Solution.
   (a) Soit (x_n) une suite d_a-Cauchy, donc $d_a(x_n, x_m) = |x_n^3 - x_m^3| \to 0$ quand $m, n \to \infty$.
   Donc (x_n^3) est d_u-Cauchy sequence, est puisque (R, d_u) est complet alors (x_n^3) est convergente.
   Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n^3 - y| \to 0$ quand $n \to \infty$.
   Soit $x = y^{1/3}$, alors $x_n^3 \to x^3 \in \mathbb{R}$ c.a.d. que $d_a(x_n, x) = |x_n^3 - x^3| = |x_n^3 - y| \to 0$ quand $n \to \infty$.
   Donc (x_n) est d_a–convergent qui entraine que (R, d_a) est complet.

   (b) Montrer que la suite $(-n)$ est d_b–Cauchy mais ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d_b)$.

   (c) Soit $(\mathbb{R}, d_u)$ l'espace métrique complet muni de la distance usuelle. Considérons la suite (n) dans $\mathbb{R}$. La suite $(\tan^{-1} n)$ converge vers $\pi/2$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$. Donc $(\tan^{-1} n)$ est d_u–Cauchy qui entraine que (n) est d_c–Cauchy. Si on suppose que $n \to a$ dans $(\mathbb{R}, d_c)$, alors $\tan^{-1} n \to \tan^{-1} a$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$, mais voudrait dire que $\tan^{-1} a = \pi/2$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ qui est impossible. Donc (n) ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d_c)$, qui fait que cet espace n'est pas complet.

3. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et (x_n) est une suite de Cauchy dans X.

   (a) Montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y.

   (b) Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue, montrer que si Y est complet X est complet.

   Solution.

   (a) Puisque f est uniformément continue alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_X(x_1, x_2) < \delta$ entraine $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

   Puisque (x_n) est de Cauchy alors pour tout $\delta > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q > N$ alors $d_X(x_p, x_q) < \delta$.

   Donc pour tout $p, q \in \mathbb{N} : p, q > N$ on a $d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \epsilon$ qui montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y).

   (b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors d'après (a) $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y). Si de plus (Y, d_Y) est complet alors $(f(x_n))$ est convergente donc $f(x_n) \overset{d_Y}{\to} y \in Y$ qui entraine $x_n \overset{d_X}{\to} f^{-1}(y) \in X$ par continuité de f^{-1}. Donc (x_n) est convergente dans (X, d_X) qui entraine qu'il est complet.

4. Montrer que si (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors (x_n^2) est de Cauchy aussi.

   Solution.
   Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d_u)$. On sait que que suite de Cauchy est bornée c.a.d. $|x_n| < M$ pour tout n. Soit $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $|x_m - x_n| < \epsilon$. On a alors $|x_m^2 - x_n^2| = |x_m - x_n||x_m + x_n| \leq 2M\epsilon = \epsilon_1$. Donc $(x_n^2)_n$ est de Cauchy.

5. Si (X, d_X) est un espace métrique complet et $Y \subseteq X$, alors (Y, d_Y) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

   Solution.
   $(\Rightarrow)$ Supposons que Y est complet et soit $x \in \mathbf{Adh}\, Y$. Alors il existe une suite $(y_n) \in Y$ qui converge vers x dans X. Puisque (y_n) est une suite convergente dans un espace complet Y la limite doit être dans Y. De plus la limite est unique donc $x \in Y$ qui entraine que Y est fermé.

   $(\Leftarrow)$ Supposons que Y est fermé dans X et que (y_n) est suite de Cauchy dans $Y \subset X$. Puisque X est complet, il existe $x \in X$ tel que $y_n \to x$. Mais puisque Y est fermé il doit contenir tous les points limites donc $x \in Y$. Il suit que (Y, d_Y) est complet.

6. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.

   Solution. Il suffit de le montrer pour deux parties complètes de X. Soient A, B deux parties complètes de X et (x_n) une suite de Cauchy dans $A \cup B$. Alors (x_n) est soit dans A, soit dans B ou dans $A \cap B$. Si (x_n) est dans A qui est complet alors (x_n) converge dans $A \subset A \cup B$. La même chose si (x_n) est dans B. Si (x_n) est dans $A \cap B$ alors (x_n) converge dans $A \cap B \subset A \cup B$. Donc si (x_n) est une suite de Cauchy dans $A \cup B$ elle doit converger dans $A \cup B$.

7. Si (X, δ) est l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement si, il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.
   Solution. Supposons que $x_n \to x$ dans (X, δ). Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\delta(x_n, x) < \epsilon$. Mais puisque δ est la distance discrète alors si $\epsilon < 1$ on a $\delta(x_n, x) < \epsilon \Leftrightarrow \delta(x_n, x) = 0$ donc $x_n = x$ pour $n \geq N$.

8. Si (Z, d) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), alors la suite (x_n, y_n) de Z converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
   Solution. Notons que si $z_n = (x_n, y_n)$ et $z = (x, y)$ alors

$$d_Z(z_n, z) = d_Z((x_n, y_n), (x, y)) = d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y)$$

$$\begin{aligned} z_n = (x_n, y_n) \to z = (x, y) &\Leftrightarrow d_Z(z_n, z) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) \to 0 \text{ et } d_Y(y_n, y) \to 0 \\ &\Leftrightarrow x_n \to x \text{ et } y_n \to y. \end{aligned}$$

9. (a) Montrer que pour $x \geq 1$ et $t \geq 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$.
   (b) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, \infty)$
   (c) Trouver le point fixe de f.

   Solution.
   (a) $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+t} - \sqrt{x})(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} = \dfrac{t}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} \leq \dfrac{t}{2}$ car $x \geq 1$.
   (b) Si $f(x) = \sqrt{x}$ on pose $y = x + t$ où $t > 0$ et $x \geq 1$ alors,
   $d(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| = |\sqrt{x+t} - \sqrt{x}| \leq \dfrac{t}{2} = \dfrac{|y - x|}{2} \leq \dfrac{d(y, x)}{2}$.
   Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction.
   (c) Puisque $[1, \infty)$ est complet et $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction donc le théorème de Banach garanti un fixe unique qui est $x = 1$.

10. Monter la fonction $f : [1, 2] \to [1, 2]$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right)$ a un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.
    Solution. Puisque $f'(x) = (1 - 2x^{-2})/2 < 1/2 < 1$, alors Corollaire 5.27 garanti un point fixe.

$$\frac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right) = x \Leftrightarrow 2x^{-1} = x \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [1, 2].$$

11. Monter que l'équation $x^5 + 7x - 1 = 0$ possède une solution unique dans $[0, 1]$. Trouver la racine exacte à 6 décimaux en utilisant la méthode de Newton.

    Solution. Si on pose $f(x) = x^5+7x-1$ on a $f'(x) = 5x^4+7 > 0$ donc f est strictement croissante. De plus on a $f(0)f(1) = (-1)(7) < 0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires garanti une racine dans $(0, 1)$, cette racine est unique car $f' > 0$. Posons $x_1 = 1/2$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ on aura: $x_2 = 0.153846$, $x_3 = 0.142849$, $x_4 = 0.142848$, et $x_5 = 0.142848$.

12. Soit $f : (0, 1/4) \to (0, 1/4)$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

    Solution. $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, 1$ donc évidement f n'admet pas de point fixe sur $(0, 1/4)$. $f(0, 1/4) = (0, 1/16) \subset (0, 1/4)$. De plus on a $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x-y||x+y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$. Donc f est contraction sur $(0, 1/4)$. Mais $(0, 1/4)$ n'est pas complet, donc cela ne contredit pas le théorème du point fixe de Banach.

13. Soit $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ définie par $f(x) = x + x^{-1}$. Montrer que $[1, \infty)$ est complet et $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x, y \in [1, \infty)$, mais f n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.

    Solution. $[1, \infty)$ est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$, donc doit être complet par Proposition 5.19.
    $f(x) = x + x^{-1} \leq 1$ pour $x \geq 1$, alors l'image de $[1, \infty)$ est lui même.
    De plus $|f'(x)| = |1 - x^{-2}| < 1$ quand $x \in [1, \infty)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $|f(x) - f(y)| \leq |x - y||f'(c)| < |x - y|$. Cela ne montre pas que f est une contraction. Car pour avoir une contraction on doit avoir $|f'(c)| = 1 - c^{-2} < k < 1$ pour tout $c \in [1, \infty)$ ce qui est impossible.