Université Ferhat Abbas Sétif 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

1: Opérations sur les ensembles

1. Montrer que $X \setminus (X \setminus A) = A$.

2. Soit X un univers, et $A, B, C \subseteq X$ alors on a:

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Soit X un ensemble quelconque et $A, B \subseteq X$, alors on a:

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

4. Si X est un ensemble et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X, alors:

(a) $X \setminus (\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \bigcap\limits_{i \in I} (X \setminus A_i)$

(b) $X \setminus (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (X \setminus A_i)$

5. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(a) $A \subset B$.

(b) $A \cap B = A$.

(c) $A \cup B = B$.

(d) $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.

(e) $B \cup (X \setminus A) = X$.

(f) $A \cap (X \setminus B) = \varnothing$.

6. Déterminer si chacun des ensembles suivants est l'ensemble vide:

(a) $X = \{x : x^2 - 1 = 0, 2x = 4\}$.

(b) $Y = \{x : x \neq x\}$.

(c) $Z = \{x : 2x + 1 = 1\}$.

7. Montrer que si $A \subset \varnothing$ alors $A = \varnothing$

8. Soient $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Trouver les ensembles suivants:
(a) $X \setminus A$ (b) $X \setminus (A \cap C)$ (c) $B \setminus C$ (d) $X \setminus (A \cup B)$

9. Montrer que: (a) $A \setminus B = A \cap B^c$ (b) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$

10. Soient $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$.
Trouver: (a) $A \times (B \cup C)$ (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$

11. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

12. Trouver l'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}(X)$ si:
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ (b) $X = \{1, \{2, 3\}\}$

13. Montrer que si A contient 2 éléments alors $\mathscr{P}(A)$ contient 4 éléments.
Combien d'éléments $\mathscr{P}(A)$ aura t-il si A contient 3,1,0 éléments?
Quel est le cardinal de $\mathscr{P}(A)$ en fonction du cardinal de A?

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

2: Opérations sur les fonctions

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Trouver:
(a) $f[\{1, 3, 4, 7\}]$ (b) $f[1, 4]$ (c) $f^{-1}[\{4, 9\}]$ (d) $f^{-1}[1, 4]$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. Trouver:
(a) $f^{-1}[\{15\}]$ (b) $f^{-1}[\{-16\}]$ (c) $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}]$ (d) $f^{-1}[\{x : 3 \leq x \leq 24\}]$

3. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$

(e) $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$

(f) $f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$

4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité ssi f est injective.

(b) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et on obtient égalité ssi f est surjective.

5. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications et $C \subset Z$, montrer que $(f \circ g)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$.

6. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors:

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(e) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie
Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

3: Espaces Métriques

1. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on définie:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_\infty(x,y) = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|$$

(a) Vérifier l'inégalité triangulaire pour les distances d_1 et d_∞ .

(b) Dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0,0),1)$ pour d_1 et d_∞ quand $X = \mathbb{R}^2$.

2. Quelles conditions doit on avoir sur $f : X \to Y$, pour que $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ soit une distance sur X.

3. Monter que $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$ est une distance sur $X = \mathbb{R}^2$, et que la boule

$B(x_o, r) = \begin{cases} x_0 & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$

4. Soit $X = C[a,b]$ et $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$. Montrer que d est une métrique.

5. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Montrer que:

(a) **Int** $A \subseteq A \subseteq$ **Adh** A;

(b) **Fr** A et **Adh** A sont fermés et **Int** A est ouvert dans X.

(c) **Int** $A = A$ si et seulement si A est ouvert.

(d) **Adh** $A = A$ si et seulement si A est fermé.

(e) **Fr** $A \subseteq A$ si et seulement si A est fermé.

(f) **Int**$(X \setminus A) = X \setminus$ **Adh** A et **Adh**$(X \setminus A) = X \setminus$ **Int** A.

6. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer: **Adh** A_i, **Int** A_i, **Fr** A_i, Is A_i (points isolés) et A_i' (points d'accumulations)
$A_1 = (-\infty, 0) \cup (0,2) \cup \{4,7\}$, $A_2 = \mathbb{Z}$, $A_3 = \mathbb{Q}$, $A_4 = \{(-1)^k + 1/2^k : k \in \mathbb{N}\}$

7. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes:

(a) x est un point d'accumulation de A.

(b) Tout voisinage V de x contient une infinité de points de A

(c) $x \in$ **Adh**$(A - \{x\})$.

8. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de X est un ouvert dense de X.

9. Soient A et B des parties bornées d'un espace métrique X.

(a) Monter que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\textbf{Adh}\, A)$.

(b) Monter que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(A,B)$.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie
Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

4: Continuité sur les Espaces Métriques

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on défini:

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a),\ \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b),\ \operatorname{diam}(A) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

(a) Trouver $\operatorname{dist}(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $\operatorname{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q})$, $\operatorname{dist}(0, (2, 4])$.

(b) Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, calculer $d(A, B)$.

(c) Calculer $\operatorname{diam}([0, 1) \cap \mathbb{Q})$ et $\operatorname{diam}([-2, 1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

2. Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est toujours continue dans les cas suivant:

(a) $X = Y$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in X$.

(b) $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$, où y_0 est une constante.

(c) $X = Y = \mathbb{R},\ d_X(a, b) = |a - b|$, et $f(x) = x^2$.

(d) d_X est la distance discrète.

3. Montrer que les intervalles (a, b) et (c, d) sont homéomorphes dans $(\mathbb{R}, d)$.

4. Soit $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$. Montrer que f est un homéomorphisme.

5. Supposons que $A \subseteq X, B \subseteq Y$ et $f : X \to Y$ est un homéomorphisme avec $f(A) = B$. Montrer que les restrictions $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ sont des homéomorphismes.

6. Montrer que $f : X \to Y$ est continue ssi $f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$ pour tout $A \subset X$.

7. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

9. Soient X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles $f^{-1}(-\infty, a)$ et $f^{-1}(a, \infty)$ sont des ouverts de X.

10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour $x \in X$; $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

(a) Montrer que si $x, y \in X$ alors $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) En déduire que la fonction $f(x) = d(x, A)$ est continue.

(c) Monter que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

(d) On suppose $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

5: Espaces Métriques Complets

1. Montrer les propositions suivante:

(a) Toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

(c) Toute suite de Cauchy est bornée.

(d) Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.

2. Avec qu'elles des distances d_a, d_b, d_c, $\mathbb{R}$ est t-il complet?
(a) $d_a(x,y) = |x^3 - y^3|$ (b) $d_b(x,y) = |e^x - e^y|$ (c) $d_c(x,y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$.

3. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X.

(a) Montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y.

(b) Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue, montrer que si Y est complet X est complet.

4. Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors $(x_n^2)_n$ est de Cauchy aussi.

5. Si (X, d) est un espace métrique complet et $Y \subseteq X$, alors (Y, d) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

6. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.

7. Si (X, δ) est l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement si, il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.

8. Si (Z, d) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), alors la suite (x_n, y_n) de Z converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

9. (a) Montrer que pour $x \geq 1$ et $t \geq 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$.
(b) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, \infty)$
(c) Trouver le point fixe de f.

10. Monter la fonction $f : [1,2] \to [1,2]$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right)$ a un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.

11. Monter que l'équation $x^5 + 7x - 1 = 0$ possède une solution unique dans $[0, 1]$. Trouver la racine exacte à 6 décimaux en utilisant la méthode de Newton.

12. Soit $f : (0, 1/4) \to (0, 1/4)$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

13. Soit $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ définie par $f(x) = x + x^{-1}$. Montrer que $[1, \infty)$ est complet et $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x, y \in [1, \infty)$, mais f n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.

Université Ferhat Abbas Sétif 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

6: Espaces Métriques Compacts

1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont compacts?

(i) $[0, 1)$

(ii) $[0, \infty)$

(iii) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$

(vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

2. Donner des exemples de suites dans $\mathbb{R}$ avec 0, 1 et 2 points d'accumulations.

3. Considèrerons l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$ où $d(x, y) = |x - y|$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$. Montrer que A est fermé et borné mais n'est pas compact.

4. Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue, et K est une partie compacte de Y . Montrer que $f^{-1}(K)$ est fermé. Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(K)$ n'est pas nécessairement compact.

5. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas compact, alors il existe une fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ qui est bornée mais n'atteint pas ses bornes.

6. (a) Monter que la réunion finie de parties compactes d'un espace métrique X est compacte.
(b) Monter que la réunion arbitraire de parties compactes n'est pas nécessairement compacte.

7. Monter que l'intersection arbitraire de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

8. Soit δ la métrique discrète. Montrer que (X, δ) est compact si et seulement si X est fini.

9. Montrer que si A est précompact, alors $\mathbf{Adh}(A)$ est aussi.

10. Montrer que si A est précompact, alors A est borné.

11. Montrer que tout sous-ensemble fini de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est compact.

12. Soient X, Y deux d'espaces métriques. Montrer que $Z = X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.

13. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \to x$. Montrer, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

14. Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \subset X$ et $A \cap B = \varnothing$.

(a) Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $\mathrm{dist}(A, B) > 0$.

(b) Est ce que $\mathrm{dist}(A, B) \neq 0$ si A et B sont fermés?

7: Espaces Métriques Connexes

1. Soit (X, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) X est connexe.

(b) Il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.

(c) Il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.

2. Montrer que si $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

3. Si (X, d) est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue telle que $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in X$, montrer que f doit être constante.

4. Monter qu'un espace connexe par arcs est connexe.

5. Supposons que $f, g : [0, 1] \to X$ sont respectivement des chemins de $x \to y$ et $y \to z$. Montrer que

$$h(t) = \begin{cases} f(2t); & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1); & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin $x \to z$ dans X.

6. Montrer qu'une partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

7. Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$, admet un point fixe $x \in [a, b]$.

8. Supposons que X est connexe par arcs, et $f : X \to Y$ est continue et surjective. Montrer que Y est connexe par arcs.

9. Montrer que $X = C([0, 1])$ avec $d(f, g) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ est connexe par arcs et donc connexe.

10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subsetneq X$. Montrer que les assertions suivante sont équivalentes:

(a) A est ouvert et fermé dans X.

(b) $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

(c) X est non connexe.

11. Supposons que A et B sont des parties connexes de X tel que $\mathbf{Adh}(A) \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

12. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ un homomorphisme et $a \in X$.

(a) Montrer que $f : X - \{a\} \to Y - \{f(a)\}$ est un homomorphisme.

(b) Déduire qu'il n y a pas d'homomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie
Licence Mathématiques – LMD – Semestre 3

8: Espaces Topologiques

1. Soit $X = \{a, b, c\}$ trouver les 29 topologies possibles sur X.

2. Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{cof}})$ ou X est infini $\mathscr{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X : (X - U) \text{ fini }\} \cup \{\varnothing\}$ et $A \subseteq X$.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ est une topologie sur X.

(b) Déterminer quels sont les parties fermées de X.

(c) Si A est fini trouver **Adh** A, **Int** A et **Fr** A.

(d) Si A est infini trouver **Adh** A, **Int** A et **Fr** A.

3. Soient $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ deux topologies sur X.
(a) Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X.
(b) Montrer que généralement $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ n'est pas une topologie sur X.

4. Soit $\mathscr{T}$ la collection de parties de $\mathbb{R}$ contenant $\varnothing, \mathbb{R}$ et tout les intervalles de la forme $(-\infty, b)$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que $\mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

6. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases pour les topologies $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ respectivement. Montrer que $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$ si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.

7. Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique , $A \subset X$, et $\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\}$.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_A$ est une topologie sur A.

(b) Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ et $A = \{a, b\}$ trouver la topologie induite $\mathscr{T}_A$ de A,

8. Soit $(A, \mathscr{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. Montrer que pour que tout ouvert de A soit un ouvert de X il faut et il suffit que A soit un ouvert de X.

9. Montrer que $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue dans chacun des cas suivants:

(a) $(X, \mathscr{T}_X) = (Y, \mathscr{T}_Y)$ et $f(x) = x$.

(b) f est constante.

(c) $\mathscr{T}_X = \mathscr{T}_{\text{Disc}}$.

(d) $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{\text{Gros}}$.

10. Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ continue, et A une partie non vide de X.
Montrer que la restriction $g = f|_A : (A, \mathscr{T}_A) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue.

11. Montrer que si $f, g : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ sont continues, et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff, montrer que:

(a) $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

(b) $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.