Faculté de Mathématiques USTHB Licence Math	Topologie Examen Final 05 Janvier 2015	Année Universitaire 2015-2016 Durée 1h 30 min

Exercice 1 (8 points) *1.* $\tau_S = \{\phi,]0,3], [1,3], [1,4],]0,4], \mathbb{R}\}$. *Par définition* S *est une pré-base de* τ_S. $B = \{\phi,]0,3], [1,3], [1,4], \mathbb{R}\}$ *est une base de* τ_S. *Les fermés de* τ_S *sont :* $\phi, \mathbb{R},]-\infty, 0]\cup]3,+\infty[,]-\infty,1[\cup]3,+\infty[,]-\infty,1[\cup]4,+\infty[,]-\infty,0]\cup]4,+\infty[$. ***(4X 1 points)***

2.

Ensemble	*Intérieur*	*Extérieur*	*Adhérence*	*Frontière*
$[-1,2]$	ϕ	ϕ	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$]0,1[$	ϕ	$[1,4]$	$]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$	$]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$

(4 points)

Exercice 2 (5 points)

I. *1.* *Montrons que l'ensemble* $\{I_{r,n} =]r+\frac{1}{n}, r-\frac{1}{n}[,\ r\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ *qui est dénombrble (car et le sont) est une base de la topologie usuelle de .*

Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Soit* $x_0 \in O$ *alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset O$. *st réunion dénombrable d'intervalles ouverts.*

2. $]a,b[= \bigcup_{n>0}[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$, $]-\infty,b[= \bigcup_{n>0}[-n, b-\frac{1}{n}]$, $]a,+\infty[\bigcup_{n>0}[a+\frac{1}{n}, n]$, $]-\infty,+\infty[= \bigcup_{n>0}[-n,n]$. ***(1 point)***

II. *Soit* E *un espace topologique, et* $f : E \to \mathbb{R}$.

1. *(a)* $\Rightarrow$ $\{x\in E\ ;\ f(x)<\lambda\} = f^{-1}(]-\infty,\lambda[)$ *et* $\{x\in E\ ;\ f(x)>\lambda\} = f^{-1}(]\lambda,+\infty[)$ *ouvert comme image réciproque d'ouverts par une application continue.* ***(1 point)***

(b) $\Leftarrow$*Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *d'après I.1* $O = \bigcup_{n>0}]a_n,b_n[= \bigcup_{n>0}(]-\infty,b_n[\cap]a_n,+\infty[)$ *donc* $f^{-1}(O) = \bigcup_{n>0}\left(f^{-1}(]-\infty,b_n[)\cap f^{-1}(]a_n,+\infty[)\right)$ *ouvert de* E *donc* f *est continue.* ***(1 point)***

2. *Soit* ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *d'parès I* $\omega = \bigcup_{n>0} F_n$ *avec* F_n *fermé de* $\mathbb{R}$ *donc* $f^{-1}(\omega) = \bigcup_{n>0} f^{-1}(F_n)$=*réunion dénombrable de fermés de* E *car* f *est continue.* ***(1 point)***

Exercice 3 (4 points)

1. *Comme* $F_n \neq \phi$, *il contient au moins un élément noté* x_n.

La suite (x_n) *est de Cauchy en effet, soit* $\varepsilon > 0$, *comme* $\lim \operatorname{diam}(F_n) = 0$, *il existe N telque pour tout* $n > N$, $\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$. *Soit maintenant* $n, m \in \mathbb{N}$, *telque* $n > m > N$ *comme la suite* (F_n) *est décroissante on a* $x_n, x_m \in F_n$ *et donc* $d(x_n,x_m) \leq \operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$. *Comme* (E,d) *est complet* (x_n) *converge vers* $x \in E$. ***(1 point)***

Soit $n\in\mathbb{N}$ *donc* $x_{n+m}\in F_n$ *pour tout* $m\in\mathbb{N}$ *on fait tendre* m *vers l'infini on aura* $x \in F_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *par suite* $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *et donc* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \phi$. ***(1 point)***

Soit $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *donc* $x,y\in F_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *par suite* $d(x,y)\leq\operatorname{diam}(F_n)$ *d'où* $0 \leq d(x,y) \leq \lim\operatorname{diam}(F_n) = 0$ *ce qui implique* $x = y$. ***(1 point)***

2. $F_n = [n,+\infty[$ $\operatorname{diam}(F_n) = +\infty$ *et* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \phi$ *(dites pour quoi).* ***(1 point)***

Exercice 4 (8 points) *Soit* (E,d) *un espace métrique complet et* $f : E \to E$ *une application contractante (i. e.* $\exists k\in]0,1[,\ d(f(x),f(y)\leq k\,d(x,y),\ \forall x,y\in E$*).*

1. *Soit* $x_0\in E$. *Soit* $\varepsilon>0$, *posons* $\alpha = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ *donc pour tout* $x\in E$ *telque* $d(x,y)<\alpha$ *on a* $d(f(x),f(x_0)) \leq k\,d(x,x_0) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$, *donc* f *est continue en tout point* x_0 *de* E. ***(1 point)***

2. *Soit* $x,y\in E$ *deux points fixes de* f *alors* $x = y$ *sinon si* $x\neq y$ *on aura* $d(x,y) = d(f(x),f(y)\leq k\,d(x,y)$ *et donc* $1\leq k$ *ce qui n'est pas possible.* ***(1 point)***

3. *Pour* $n = 1$ *on a* $d(x_2,x_1) = d(f(x_1),f(x_0)\leq k\,d(x_1,x_0)$ *donc la relation est vraie pour* $n = 1$. *Supposons qu'elle est vraie jusqu'au rang* n *et montrons qu'elle reste vraie au rang* $n+1$. *En effet* $d(x_{n+2},x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}),f(x_n)\leq k\,d(x_{n+1},x_n)\leq k^{n+1}d(x_1,x_0)$ *donc la relation demandée est démontrée.* ***(1 point)***

4. *D'apès l'inégalité triangulaire :* ***(1 point)***

$$d(x_{n+p},x_n) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} d(x_{i+1},x_i) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i d(x_1,x_0) = k^n\frac{1-k^p}{1-k}d(x_1,x_0) \leq \frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)$$

Soit $\varepsilon>0$, *comme* $\lim k^n = 0$, *il existe N telque pour tout* $n > N$, $\frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0) < \varepsilon$.*Soit maintenant* $n,m\in\mathbb{N}$, *telque* $m>n>N$ *on a* $d(x_m,x_n) = d(x_{n+(m-n)},x_n) \leq \frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0) < \varepsilon$, *donc* $(x_n)_{n\geq 0}$ *et de Cauchy dans* E. ***(1 point)***

5. (E,d) *étant complet* (x_n) *converge vers* $x\in E$ *et comme* $x_{n+1} = f(x_n)$ *et* f *est continue on déduit que* $f(x) = x$ *c'est donc l'unique point fixe de* f.

6. *On fait tendre* p *vers l'infini dans 4 on obtient* $d(c,x_n) = \lim_{p\to\infty} d(x_{n+p},x_n) \leq \frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)$.

(a) *[7-1.]*

(b) $g(f(\alpha)) = f(g(\alpha)) = f(\alpha)$. ***(1 point)***

(c) *Soit* $\beta\in E$ *un point fixe de* f *i.e.* $f(\beta) = \beta$ *donc* $f(f(\beta)) = f(\beta) = \beta$ *ainsi* $g(\beta) = \underbrace{f\circ f\cdots\circ f}_{p\ fois}(\beta) = \beta$ *donc* β *est un point fixe de* g. ***(1 point)***

Posons $\beta = f(\alpha)$ *donc d'après 7.1* $g(\beta) = \beta$ *par suite* β *est l'unique point fixe de* g *d'où* $\beta = f(\alpha) = \alpha$ *par suite* α *est un point fixe de* f.

Soit $\gamma\in E$ *un point fixe de* f *donc c'est aussi un point fixe de* g *et par suite* $\gamma = \alpha$ *d'où l'unicité.* ***(1 point)***