Faculté de Mathématiques USTHB Licence Math	Topologie Examen Final 05 Janvier 2015	Année Universitaire 2015-2016 Durée 1h 30 min

Exercice 1 (2 points) *Soit* $S = \{]0,2],[1,3]\}$. *Donner la topologie de* $\mathbb{R}$ *engendrée par* S *en précisant la base, la prébase et tous les fermés de cette topologie.*

Exercice 2 (4 points)

I. 1. *Montrer que tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *est réunion dénombrable d'intervalles ouverts.*
   2. *Montrer que tout intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *est réunion dénombrable d'intervalles fermés.*

II. *Soit* E *un espace topologique et* $f : E \to \mathbb{R}$.
   1. *Montrer que* f *est continue si et seulement si pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *les ensembles* $\{x \in E\ ;\ f(x) < \lambda\}$ *et* $\{x \in E\ ;\ f(x) > \lambda\}$ *sont des ouverts de* E.
   2. *Montrer que si* f *est continue, pour tout* ω *ouvert de* $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ *est une réunion dénombrable de fermés de* E.

Exercice 3 (4 points) *Soit* (E,d) *un espace métrique complet. Soit* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fermés, non vides, tels que* $F_n \subset F_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que si* $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, *alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \phi$. *En particulier montrer que cette intersction est réduite à un point.(On rappelle que le diamètre d'un ensemble* $A \subset E$ *est défini par* $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$*).*
2. *Montrer avec un exemple que si l'on ne suppose plus que* $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, *alors on peut avoir* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \phi$.

Exercice 4 (10 points) *Soit* (E,d) *un espace métrique complet et* $f :\ E \to E$ *une application contractante (i. e.* $\exists k \in]0,1[,\ d(f(x),f(y) \leq k\, d(x,y),\ \forall x,y \in E$*).*

1. *Montrer que si* f *est continue sur* E.
2. *Montrer que si* f *admet un point fixe alors celui ci est unique.*

Soit $x_0 \in E$, *on considère la suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *définie par la relation de récurrence :* $x_{n+1} = f(x_n)$.

1.

3. *Montrer que pour tout* $n \geq 1,\ d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$.
4. *Montrer que pour tout* $n,p \geq 1,\ d(x_{n+p},x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0)$. *En déduire que* $(x_n)_{n\geq 0}$ *et de Cauchy dans* E.
5. *En déduire que* f *admet un point fixe unique noté* c *dans* E.
6. *Montrer que pour tout* $n \geq 1,\ d(c,x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$.
7. *Dans la suite on suppose seulement que* $g = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{p\ fois}$ *est contractante (*$p \geq 2$ *fixé). Soit* $\alpha \in E$ *son unique point fixe.*

   7-1. *Vérifier que* $g(f(\alpha)) = f(\alpha)$.

   7-2. *Montrer que tout point fixe de* f *est un point fixe de* g. *En déduire que* f *admet un unique point fixe dans* E.

Bon Courage