Faculté de Mathématiques	Toplogie générale	Année Universitaire
USTHB	Examen de Rattrapage	2015-2016
Licence Math	24 Janvier 2016	Durée 1h 30 min

Exercice 1 (4 points) *Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{x, y, z, t\}$ munis des topologies $\mathscr{T}_E = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ et $\mathscr{T}_F = \{\emptyset, F, \{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$.*

Soit $f : E \mapsto F$ définie par $f(a) = x$, $f(b) = x$, $f(c) = y$ et $f(d) = t$.

Etudier la continuité de l'application f. Préciser les points de continuité et (s'il y a lieu) les points de discontinuité.

Solution 1 *Il faut vérifier que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.*

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{T}_E$; $f^{-1}(F) = E \in \mathscr{T}_E$; $f^{-1}(\{x\}) = \{a, b\} \in \mathscr{T}_E$; $f^{-1}(\{x, y\}) = \{a, b, c\} \notin \mathscr{T}_E$; $f^{-1}(\{x, y, z\}) = \{a, b, c\} \notin \mathscr{T}_E$; *normalement il suffit de remarquer que* $f^{-1}(\{x, y\}) = \{a, b, c\} \notin \mathscr{T}_E$ *pour affirmer que f n'est pas continue sur E.*

Soit $V \in \mathscr{V}(f(a))$ donc $f(a) \in V$ par suite $\{a\} \subset f^{-1}(V)$ et donc $f^{-1}(V) \in \mathscr{V}(a) \Rightarrow f$ est continue en a.

Même chose pour b et d et on déduit que f est continue aux points b et d.

Pour le point c on a $V = \{x, y\} \in \mathscr{V}(f(c))$ mais $f^{-1}(V) = \{a, b, c\} \notin \mathscr{V}(c)$ car il n'y a aucun ouvert $(E, \{b, c, d\})$ contenant c et est inclus dans $f^{-1}(V)$, par suite c est un point de discontinuité.

Exercice 2 (6 points)

1. *Rappeler les définitions de : point interieur, point adhérant, point frontière, point d'accumulation et point isolé.*
2. *Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer, en justifiant vos calculs, l'intérieur, l'adhérence, la frontière, les points d'accumulation et les points isolés.($\mathbb{R}$ étant muni de sa topologie usuelle)*

$A_1 =]-1, 1[\cup]1, 2] \cup \{3, 14\}$, $A_2 = \mathbb{Z}$, $A_3 = \{(-1)^p + \frac{1}{2^p},\ p \in \mathbb{Z}\}$, $A_4 = \mathbb{Q}$.

Solution 2

1. *Voir Cours*
2.

k	A_k	$\overset{o}{A_k}$	$\overline{A_k}$	∂A_k	*Pts acc*	*Pts isolés*
1	$]-1, 1[\cup]1, 2] \cup \{3, 14\}$	$]-1, 1[\cup]1, 2[$	$[-1, 1] \cup [1, 2] \cup \{3, 14\}$	$\{-1, 1, 2, 3, 14\}$	$[-1, 1] \cup [1, 2]$	$\{3, 14\}$
2	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}$
3	$\{(-1)^p + \frac{1}{2^p},\ p \in \mathbb{Z}\}$	$\emptyset$	$A_3 \cup \{-1, 1\}$	$A_3 \cup \{-1, 1\}$	$\{-1, 1\}$	A_3
4	$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$

Exercice 3 (4 points) *(Théorème de Baire) Soient (X, d) un espace métrique complet non vide, $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses et $\Omega = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$. Le but est de montrer que Ω est dense.*

1. *Montrer que si Ω est dense dans E alors pour tout ouvert non vide U de E, $\Omega \cap U \neq \emptyset$*
2. *Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de X et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels vérifiant $r_n \in]0, 1/n]$ tels que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U \cap \Omega_1$ et pour $n \geq 2$, $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$.*
3. *Montrer que (x_n) admet une limite et conclure.*
4. *En déduire que E n'est pas réunion dénombrable d'ensembles rares (c'est-à-dire d'ensembles dont l'adhérence est d'intérieur vide).*

Solution 3 *Voire la démonstration du théorème de Baire du cours*

1. *Soit U ouvert non vide de $E = \overline{\Omega}$, donc tout élément x de U est dans $\overline{\Omega}$ or U est un voisinage de tout ses points donc $\Omega \cap U \neq \emptyset$.*
2. *Soit U ouvert non vide de E, D'après 1 $\Omega_1 \cap U \neq \emptyset$ soit $x_1 \in \Omega_1 \cap U$ or $\Omega_1 \cap U$ est un ouvert alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap \Omega_1$ on choisit $r_1 = \frac{1}{2}\min(1, \varepsilon_0) \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap \Omega_1$. on refait le raisonnement pour soit $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ alors il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $B(x_2, \varepsilon_2) \subset B(x_1, r_1) \cap \Omega_2$ on choisit $r_2 = \frac{1}{3}\min(1, \varepsilon_1) \leq 1$ donc $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_2, \varepsilon_2) \subset B(x_1, r_1) \cap \Omega_2$. on continue ainsi soit $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n \neq \emptyset$ alors il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que $B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_2$ on choisit $r_n = \frac{1}{n+1}\min(1, \varepsilon_n) \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$.*

3. *Par construction on a* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset \overline{B(x_{n-1}, r_{n-1})}$ *montrons que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est de Cauchy donc convergente. Soit* $\varepsilon > 0$ *comme* $\lim r_n = 0$ *il existe* N *tel que* $\forall n \geq N$, $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$, *Soit* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $p > q \geq N$ *alors comme* $\overline{B(x_p, r_p)} \subset \overline{B(x_q, r_q)} \subset \overline{B(x_N, r_N)}$ *on déduit que* $x_p, x_q \in \overline{B(x_N, r_N)}$ *donc* $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_N) + d(x_N, x_q) \leq 2r_N < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   Soit $x = \lim x_n$ *; et on a* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \Omega_n$ *ce qui veut dire* $x \in \Omega = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$ *d'autre par* $x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap \Omega_1$ *ce qui entraine que* $x \in U$ *par suite* $x \in \Omega \cap U$. *ce qui nous permet de conclure que pour tout ouvert non vide* U *de* E, $\Omega \cap U \neq \emptyset$ *par suite* Ω *est dense dans* E.

4. *Supposons le contraire i. e : il existe* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille d'ensembles vérifant* $\overset{o}{\overline{A_n}} = \emptyset$ *et* $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, *mais* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}$ *donc* $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}$. *Posons* $\Omega_n = \left(\overline{A_n}\right)^c$ *donc* $\overline{\Omega_n} = \overline{\left(\overline{A_n}\right)^c} = \left(\overset{o}{\overline{A_n}}\right)^c = E$ *donc* Ω_n *est dense et d'après ce qui précède* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$ *est dense or* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A_n}\right)^c = E^c = \emptyset$ *ce qui est impossible.*

Exercice 4 (3 points) *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1. *Montrer que si* A *est dense dans* E, $\{B(a, \frac{1}{n}), a \in A, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base d'ouverts de la topologie induite par* d.
2. *En déduire que tout espace topologique métrisable et séparable admet une base dénombrable d'ouverts.*

Solution 4

1. *Soit* U *un ouvert de* E. *Soit* $x \in U$, *alors il existe* $\varepsilon_x > 0$ *tel que* $B(x, \varepsilon_x) \subset U$, *aussi il existe* $n_x \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{1}{n_x} < \frac{\varepsilon_x}{2}$.*Comme* A *est dense dans* E *on a* $B(x, \frac{1}{n_x}) \cap A \neq \emptyset$ *donc il existe* $a_x \in A$ *tel que* $d(a_x, x) < \frac{1}{n_x}$. *Montrons que* $B(a_x, \frac{1}{n_x}) \subset U$, *soit donc* $y \in B(a_x, \frac{1}{n_x})$ *on* $d(x, y) \leq d(x, a_x) + d(x, a_x) < \frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_x} < 2\frac{\varepsilon_x}{2} = \varepsilon_x$ *donc* $y \in B(x, \varepsilon_x) \subset U$ *et on déduit que* $B(a_x, \frac{1}{n_x}) \subset U$ *par suite* $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{U}} B(a_x, \frac{1}{n_x}) \subset U$ *or par construction si* $x \in U$ *il existe* a_x *et* n_x *tels que* $x \in B(a_x, \frac{1}{n_x}) \subset \bigcup\limits_{x\in U} B(a_x, \frac{1}{n_x})$ *donc* $U \subset \bigcup\limits_{x\in\mathbb{U}} B(a_x, \frac{1}{n_x})$ *d'où l'égalité.*
2. *Si* E *est un espace topologique métrisable il admet une distance notée* d *qui induit sa topologie, et s'il est séparable il admet une partie dénombrable* A *dense.*

   pour $a \in A$, $\{B(a, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ *est dénombrable et d'après 1* $\{B(a, \frac{1}{n}), a \in A, n \in \mathbb{N}^*\} = \bigcup\limits_{a\in A} \{B(a, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base dénombrable car réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.*

Exercice 5 (3 points) *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique à base dénombrable.*

1. *Montrer que de tout recouvrement ouvert de* E *on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable,*
2. *Montrer que* $(E, \mathscr{T})$ *est séparable, c'est-à-dire qu'il existe dans* E *une partie dénombrable dense.*

Solution 5 *Soit* $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une base dénombrable de* E.

1. *Soit* $\{U_i, i \in I\}$ *un recouvrement ouverts de* E. *pour tout* $i \in I$ *il existe* n_i *tel que* $B_{n_i} \subset U_i$ *donc pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *on choisit* $i_n \in I$ *tel que* $B_n \subset U_{i_n}$ *or* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = E$ *donc* $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$.
2. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *on choisit un élément* $a_n \in B_n$ *et posons* $D = \{a_n\}$. D *est dénombrable Soit* $x \in E$ *et soit* U *un voissinage ouvert de* x *alors il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in B_n \subset U$ *par suite* $U \cap D \supset B_n \cap D \neq \phi$ *par suite* $x \in \overline{D}$ *donc* $E \subset \overline{D} \subset E$ *d'où l'égalité.*

Bon Courage