Faculté de Mathématiques USTHB Licence Math	Toplogie générale Examen de Rattrapage 24 Janvier 2016	Année Universitaire 2015-2016 Durée 1h 30 min

Exercice 1 (4 points) *Soit* $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $F = \{x, y, z, t\}$ *munis des topologies* $\mathscr{T}_E = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ *et* $\mathscr{T}_F = \{\emptyset, F, \{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$.

Soit $f : E \mapsto F$ *définie par* $f(a) = x, f(b) = x, f(c) = y$ *et* $f(d) = t$.

Etudier la continuité de l'application f. *Préciser les points de continuité et (s'il y a lieu) les points de discontinuité.*

Exercice 2 (6 points)

1. *Rappeler les définitions de : point interieur, point adhérant, point frontière, point d'accumulation et point isolé.*
2. *Pour chacune des parties de* $\mathbb{R}$ *ci-dessous, déterminer, en justifiant vos calculs, l'intérieur, l'adhérence, la frontière, les points d'accumulation et les points isolés.(*$\mathbb{R}$ *étant muni de sa topologie usuelle)*

$A_1 =]-1, 1[\cup]1, 2] \cup \{3, 14\}$, $A_2 = \mathbb{Z}$, $A_3 = \{(-1)^p + \frac{1}{2^p},\ p \in \mathbb{Z}\}$, $A_4 = \mathbb{Q}$.

Exercice 3 (4 points) *(Théorème de Baire) Soient* (X, d) *un espace métrique complet non vide,* $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'ouverts denses et* $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. *Le but est de montrer que* Ω *est dense.*

1. *Montrer que si* Ω *est dense dans* E *alors pour tout ouvert* U *de* E, $\Omega \cap U \neq \emptyset$
2. *Montrer qu'il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* X *et une suite* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels vérifiant* $r_n \in]0, 1/n]$ *tels que* $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U \cap \Omega_0$ *et pour* $n \geq 2$, $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$.
3. *Montrer que* (x_n) *admet une limite et conclure.*
4. *En déduire que X n'est pas réunion dénombrable d'ensembles rares (c'est-à-dire d'ensembles dont l'adhérence est d'intérieur vide).*

Exercice 4 (3 points) *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1. *Montrer que si* A *est dense dans* E, $\{B(a, \frac{1}{n}), a \in A, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base d'ouverts de la topologie induite par* d.
2. *En déduire que tout espace topologique métrisable et séparable admet une base dénombrable d'ouverts.*

Exercice 5 (3 points) *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique à base dénombrable.*

1. *Montrer que de tout recouvrement ouvert de* E *on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable,*
2. *Montrer que* $(E, \mathscr{T})$ *est séparable, c'est-à-dire qu'il existe dans* E *une partie dénombrable dense.*

Bon Courage