L3B – Topologie
Contrôle continu du Jeudi 08 décembre 2011, 10h15–12h15

Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.

Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les résultats du cours utilisés.

Le contrôle consiste en deux parties qui seront rédigées sur des copies séparées.

Partie I

(À rédiger sur une copie séparée)

7

9 **Exercice 1.** [9 points] Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé.

4 1. **(Questions de cours)**

1 (i) Donner la définition d'une partie compacte A de E.

2 (ii) Montrer qu'une partie compacte A de E est une partie fermée et bornée.

1 (iii) Sous quelle condition sur E la réciproque de la propriété démontrée en (ii) est-elle vraie ? Justifier votre réponse en énonçant avec précision un théorème du cours.

1 2. Le sous-ensemble $S^2 \setminus \{N\}$ de $\mathbb{R}^3$ – la sphère unité S^2 privée du pôle nord $N = (0, 0, 1)$ – est-il compact ? Justifier la réponse.

1 3. La réunion de deux parties compactes de E est-elle compacte ? Justifier la réponse.

3 4. Soient $A, B \subseteq E$ deux parties non vides disjointes. On suppose que A et B sont compactes.

1 (i) Soit x un point de E. Montrer qu'il existe un point $y \in A$ tel que la distance $d(x, A)$ du point x à la partie A soit égale à $d(x, y)$.

1 (ii) Démontrer que la borne inférieure

$$d = d(A, B) = \inf\{||a - b|| : a \in A,\, b \in B\}$$

est strictement positive.

1 (iii) On considère les parties U, V de E, définies par

$$U = \{x \in E : d(\{x\}, A) < d/3\} \quad \text{et} \quad V = \{x \in E : d(\{x\}, B) < d/3\}.$$

Montrer que U et V sont des ouverts disjoints de E, qui contiennent respectivement les parties A et B.

---

4 **Exercice 2.** [4 points] On considère les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis respectivement des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par la formule,

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

On note $|||f|||$ la norme de l'application linéaire f de l'espace vectoriel normé $(R^2, \|\cdot\|_\infty)$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$.

2 1. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, démontrer l'inégalité

$$\|f(x_1, x_2)\|_2^2 \leq ((a_1^2+b_1^2+c_1^2)+2|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|+(a_2^2+b_2^2+c_2^2))\ \|(x_1, x_2)\|_\infty^2.$$

2 2. Montrer que l'égalité est atteinte dans l'inégalité précédente. En déduire la valeur de $|||f|||$.

Partie II

(À rédiger sur une copie séparée)

8 **Exercice 3.** [8 points] Le but de cet exercice est de donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle les ensembles

$$(1) \qquad A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}}$$

sont deux à deux distincts.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1 1. Donner la définition de l'adhérence $\overline{A}$ de A.

1 2. Caractériser les points de l'intérieur $\mathring{A}$ de A.

1 3. Montrer que lorsque A n'est ni ouvert, ni fermé, A est différent de tous les autres ensembles dans (1).

1 4. On suppose que $a \in A$ est un point isolé (c'est à dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A = \{a\}$). Montrer que, dans ce cas, l'intérieur et l'adhérence de A sont distincts.

2 5. Soit b est un point isolé du complémentaire de A. Montrer que $b \in \mathring{\overline{A}} \setminus A$ et, en particulier, que $\mathring{A} \neq \mathring{\overline{A}}$.

2 6. Décrire les ensembles dans (1) pour la partie

$$A =]0, 1[\cup]1, 2[\cup (\mathbb{Q} \cap]2, 3[) \cup \{4\}$$

de $\mathbb{R}$. En déduire qu'ils sont deux à deux distincts.

---

5 **Exercice 4.** [5 points] On définit les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ muni de la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq 1, z \neq -1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}.$$

Là où la formule a un sens, on définit l'application f par,

$$f(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}, z).$$

2 1. Montrer que l'application f est bien définie sur A et que c'est une bijection de A sur B.

2 2. Montrer que l'application f est continue de la partie A de $\mathbb{R}^3$, muni de la topologie induite, dans $\mathbb{R}^3$.

1 3. Montrer que f est un homéomorphisme de A sur B munies de la topologie induite.

L3B - Topologie CC3 08/12/2011

Corrigé

(Partie I)

Exercice 1

1 (QC)

(i) $A \subset (E, \|\cdot\|)$ est une partie compacte si toute suite $\{x_n\}$ de A admet une sous-suite qui converge dans A c.à.d $\exists$ sous-suite $\{x_{\varphi(n)}\}$, $\exists x \in A$ tq $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

(ii) • A compacte $\Rightarrow$ A borné

Démonstration par l'absurde (cf. le cours) si A n'était pas borné, on aurait

$$\forall M > 0 \quad \exists x_M \in A \quad tq \quad \|x_M\| \geq M$$

Prenant $M=1$ on a $x_1 \in A$ tq $\|x_1\| \geq 1$;

Prenant $M_2 = \max\{2, \|x_1\| + 1\}$ et on a $x_2 \in A$ tq $\|x_2\| \geq M_2 > \|x_1\|$;

...

Supposant $x_1, \dots, x_n$ construits tq $\|x_n\| > \|x_{n-1}\| > \dots > \|x_1\|$, on prend $M_{n+1} = \max\{n+1, \|x_n\|+1\}$ et on a $x_{n+1} \in A$ tq $\|x_{n+1}\| > M_{n+1} > \|x_n\|$.

On construit ainsi par récurrence une suite $\{x_n\} \subset A$ tq $\|x_n\| \to \infty$. Une telle suite ne peut pas admettre une sous-suite qui converge. Contradiction.

- A compacte $\Rightarrow$ A fermé

Soit $\{x_n\}$ une suite de A tq $x_n \xrightarrow{E} x$. Il faut montrer que $x \in A$. D'après la définition, $\exists$ une ss suite $\{x_{\varphi(n)}\}$ qui converge vers $x_\varphi \in A$. Par unicité de la limite, $x_\varphi = x$ et donc $x \in A$.

(iii) Théorème du cours Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $A \subset E$ est une partie compacte si et seulement si A est fermé et borné.

---

2. $S^2 \setminus \{N\}$ n'est pas compact

Argument 1 $\pi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (la projection stéréographique) est un homéomorphisme; $\mathbb{R}^2$ n'étant pas compact & π étant un homéomorphisme $S^2 \setminus \{N\}$ n'est pas compact.

Argument 2 $N=(0,0,1)$. Soit $x_n = \left(\frac{1}{n}, 0, \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$. Alors $x_n \in S^2 \setminus \{N\}$ car $\|x_n\|^2 = \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ & $x_n \neq N$. On a aussi $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^3} N$. Ainsi $S^2 \setminus \{N\}$ n'est pas un fermé donc n'est pas compact (cf QC ci-dessus).

---

3. $A, B \subset E$ compactes. $A \cup B$ est une partie compacte de E

Soit $\{x_n\}$ une suite de $A \cup B$. Quitte à échanger A et B, on peut supposer que $\{n \mid x_n \in A\}$ est infini. Cet ensemble définit une sous-suite $\{x_{\varphi(n)}\}$ de A. Cette sous-suite admet une sous-suite $\{x_{\psi \circ \varphi(n)}\}$ qui converge dans A et donc dans $A \cup B$.

---

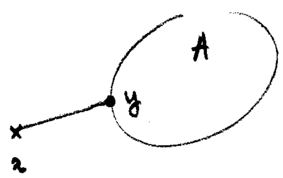
4. $A, B \subset E$; $\phi \neq A, B$ et $A \cap B = \phi$; A, B compactes

(i) Pour $x \in E$ fixé, l'application $z \longmapsto d(x,z) = \|x-z\|$ est continue car lipschitzienne, en effet

$$\Big| \|x-z_1\| - \|x-z_2\| \Big| \leq \|(x-z_1)-(x-z_2)\| = \|z_1-z_2\| ,$$

la partie A étant <u>compacte</u>, la fonction <u>continue</u>

$A \ni z \longmapsto d(x,z) \in \mathbb{R}$ est borné et atteint ses bornes, en particulier $\exists y \in A$ tq $d(x,y) = \inf\{d(x,z) \mid z \in A\} = d(x,A)$



(ii) . La borne inférieure $d := d(A,B) = \inf\{\|a-b\| \mid a \in A, b \in B\}$ existe car la partie est non-vide, minoré par 0.

. D'après la caractérisation de la borne inférieure,

$\forall n \geq 1, \; \exists x_n \in A, \; \exists y_n \in B,$ tq

$$d \leq \|x_n - y_n\| \leq d + \frac{1}{n} .$$

. La partie A étant compacte, il existe $x \in A$ et une sous-suite $\{x_{\varphi(n)}\}$ de la suite $\{x_n\}$ t.q $x_{\varphi(n)} \to x$.

La partie B étant compacte, il existe $y \in B$ et une sous-suite $\{y_{\psi(\varphi(n))}\}$ de la suite $\{y_{\varphi(n)}\}$ tq $y_{\psi\circ\varphi(n)} \to y$.

On a alors
$$x_{\psi(\varphi(n))} \to x \in A$$
$$y_{\psi(\varphi(n))} \to y \in B$$

- $\|x-y\| \leq \|x-x_{\psi(\varphi(n))}\| + \|x_{\psi(\varphi(n))} - y_{\psi(\varphi(n))}\| + \|y_{\psi(\varphi(n))} - y\|$

donc

$$\|x-y\| \leq \lim \|x-x_{\psi(\varphi(n))}\| + \lim \left(d+\frac{1}{n}\right) + \lim \|y_{\psi(\varphi(n))} - y\| = d$$

Comme $x \in A$, $y \in B$, on a aussi $\|x-y\| \geq d$.

Finalement, on a $d = \|x-y\|$.

Si $d=0$ alors $\|x-y\| = 0 \Rightarrow x=y \Rightarrow x=y \in A \cap B$ ce qui contredit l'hypothèse que $A \cap B = \phi$. Donc $d>0$.

(iii) <u>Je dis que U est un ouvert de E qui contient A</u>

- Si $x \in A$, alors $d(x,A)=0$ donc $d(x,A) < \frac{d}{3}$ et $x \in U$
- $x \overset{d_A}{\longmapsto} d(x,A)$ est lipschitzienne (fait en cours) donc continue, donc $U = d_A^{-1}(]-\infty, \frac{d}{3}[)$ est un ouvert de E.

On montre de même que V est un ouvert de E qui contient B.

<u>Je dis que $U \cap V = \phi$</u>

Sinon, on aurait $x \in U \cap V$ càd $x \in E$ tq $d(x,A) < \frac{d}{3}$ et $d(x,B) < \frac{d}{3}$.

D'après (i) $\exists\, x_A \in A$ tq $d(x,x_A) = d(x,A) < \frac{d}{3}$
$\exists\, x_B \in B$ tq $d(x,x_B) = d(x,B) < \frac{d}{3}$

on aurait alors

$$d = d(A,B) \leq d(x_A, x_B) \leq d(x_A, x) + d(x_B, x) < \frac{2d}{3}$$

ce qui est impossible.

Exercice 2 $\quad f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1. $$\| f(x_1,x_2) \|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (a_1x_1 + a_2x_2)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2)^2 + (c_1x_1 + c_2x_2)^2$$

$$= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) x_1^2 + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) x_2^2 + 2x_1x_2 (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$\overset{(*)}{\leq} \left\{ (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + 2|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \right\} \|(x_1,x_2)\|_\infty^2$$

car $\quad x_1^2,\ x_2^2,\ |x_1x_2| \leq \|(x_1,x_2)\|_\infty^2 = \left(\max\{|x_1|, |x_2|\} \right)^2$

2. L'inégalité $(*)$ est atteinte si $x_1^2 = x_2^2 = 1$, et $x_1x_2 = \operatorname{sgn}(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$ quand $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \neq 0$. Il suffit de choisir le point $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ tq

$\bar{x}_1 = 1$ et $\begin{cases} \bar{x}_2 = 1 & \text{si } a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \\ \bar{x}_2 = \operatorname{sgn}(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) & \text{si } a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \neq 0 \end{cases}$

Alors $\|(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_\infty = 1 \qquad \|f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_2^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + 2|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)\ \underline{\|(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\|_\infty}$

et donc $$|||f||| = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + 2|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}\,.$$

L3B - Topologie CC3 08/12/2011

Corrigé

(Partie II)

Exercice 3 $(E, \|\cdot\|)$ evn $A \subset E$

1. Définition de l'adhérence $\bar{A}$ de A

$\bar{A}$ est l'ensemble des points $x \in E$ tq il existe $\{x_n\} \subset A$ avec $x_n \xrightarrow{E} x$

$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

2. Caractériser les points de l'intérieur $\mathring{A}$ de A

$x \in \mathring{A}$ si et seulement il existe $r > 0$ tq la boule ouverte $B(x, r) \subset A$.

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

---

3. • D'après la définition de l'intérieur, l'intérieur d'un ensemble est un ouvert, donc $\mathring{A}$, $\mathring{\bar{A}}$ et $\mathring{\bar{\mathring{A}}}$ sont des ouverts de E ; si A n'est pas ouvert, alors $A \neq \mathring{A}$, $A \neq \mathring{\bar{A}}$ et $A \neq \mathring{\bar{\mathring{A}}}$.

• D'après la définition de l'adhérence, l'adhérence d'un ensemble est un fermé, donc $\bar{A}$, $\bar{\mathring{A}}$ et $\bar{\mathring{\bar{A}}}$ sont des fermés de E ; si A n'est pas fermé, alors $A \neq \bar{A}$, $A \neq \bar{\mathring{A}}$ et $A \neq \bar{\mathring{\bar{A}}}$.

---

4. Soit $a \in A$ un point isolé càd $\exists r > 0$ tq $B(a, r) \cap A = \{a\}$.

On a $a \in A \setminus \mathring{A}$ car $B(a, r) \setminus \{a\} \neq \emptyset$ donc $\forall \rho \leq r$, on ne peut pas avoir $B(a, \rho) \subset A$ donc $a \notin \mathring{A}$.

On a donc $\mathring{A} \subsetneq A \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \neq \bar{A}$.

NB : Si $A = \{a\}$, $\mathring{A} = \emptyset \subsetneq A = \bar{A}$.

---

5. • Soit b un point isolé de $E\setminus A$ le complémentaire de A càd

(*) $\exists r>0$ tq $B(b,r)\cap(E\setminus A)=\{b\}$. Alors

(i) $b\in E\setminus A \Rightarrow b\notin A$

(ii) (*) $\Rightarrow$ $\forall n$ assez grand $B(b,\frac{1}{n})\cap(E\setminus A)=\{b\}$

(car $b\in B(b,\frac{1}{n})\cap(E\setminus A)\subset B(b,r)\cap(E\setminus A)=\{b\}$)

(iii) (ii) $\Rightarrow$ $\forall n$ assez grand $\exists x_n\in B(b,\frac{1}{n})$, $x_n\neq b$ & $x_n\in A$

$\Rightarrow$ $x_n\xrightarrow[n\infty]{} b$ & $x_n\in A$ $\Rightarrow$ $b\in\bar{A}$

(iv) (ii) $\Rightarrow$ $\left(B(b,r)\setminus\{b\}\right)\cap(E\setminus A)=\phi$ càd

$\Rightarrow B(b,r)\setminus\{b\}\subset A$

$\Rightarrow B(b,r)\subset A\cup\{b\}\subset\bar{A}$ car $b\in\bar{A}$

$\Rightarrow b\in\mathring{\bar{A}}$

Finalement, $b\in\mathring{\bar{A}}$ & $b\notin A$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{b\in\mathring{\bar{A}}\setminus A}}$

• On a $\mathring{A}\subset A \Rightarrow \mathring{A}\subset\bar{A} \Rightarrow \mathring{A}\subset\mathring{\bar{A}}$;

si $\mathring{A}=\mathring{\bar{A}}$ alors $\mathring{\bar{A}}\setminus A\subset\mathring{\bar{A}}\setminus\mathring{A}=\phi$

$\Rightarrow \mathring{\bar{A}}\setminus A=\phi$ contradiction avec $b\in\mathring{\bar{A}}\setminus A$!

$\underline{\underline{6}}$ $A =]0,1[\, \cup \,]1,2[\, \cup \,(\mathbb{Q} \cap]2,3[) \cup \{4\}$

↳ $\mathring{A} =]0,1[\, \cup \,]1,2[$ | $\bar{A} = [0,3] \cup \{4\}$

$\overline{\mathring{A}} = [0,2]$ | $\mathring{\bar{A}} =]0,3[$

$\mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0,2[$ | $\overline{\mathring{\bar{A}}} = [0,3]$

Exercice 4 $\underline{\underline{1.}}$ • $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z \right)$$

est définie et continue sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < z < 1\}$

qui contient $A = S^2 \setminus \{N, S\}$, la sphère privée des pôles nord & sud, donc elle est définie et continue sur A muni de la topologie induite.

• Posons $f(x,y,z) = (\xi, \eta, \zeta)$. Alors

✓ $(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N,S\} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 \\ z \neq \pm 1 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow -1 < z < 1$

✓ $\xi^2 + \eta^2 = \dfrac{x^2}{1-z^2} + \dfrac{y^2}{1-z^2} = \dfrac{1-z^2}{1-z^2} = 1$, si $(x,y,z) \in A$. Si $(x,y,z) \in A$

alors $(\xi, \eta, \zeta) \in B$ càd $f(A) \subset B$.

• Soit $(\xi, \eta, \zeta) \in B$. Alors $f(x,y,z) = (\xi, \eta, \zeta)$ ssi

$$\begin{cases} z = \zeta \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-z^2}} = \xi \quad \text{et} \quad \dfrac{y}{\sqrt{1-z^2}} = \eta \end{cases} \quad \text{càd}$$

$x = \xi\sqrt{1-\zeta^2}$ $\quad y = \eta\sqrt{1-\zeta^2}$ et

$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2(1-\zeta^2) + \eta^2(1-\zeta^2) + \zeta^2 = (\xi^2+\eta^2)(1-\zeta^2) + \zeta^2 = 1$

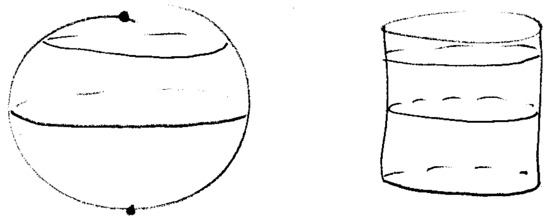
car $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Ainsi pour $(\xi,\eta,\zeta) \in B$, on peut résoudre $f(x,y,z) = (\xi,\eta,\zeta)$ avec $(x,y,z) \in A$ et on a une solution unique ; donc $f : A \to B$ est une bijection &, de plus,

$$f^{-1}(\xi,\eta,\zeta) = \left(\xi\sqrt{1-\zeta^2},\ \eta\sqrt{1-\zeta^2},\ \zeta \right)$$

qui est définie et continue sur $\{ (\xi,\eta,\zeta) \mid -1 < \zeta < 1 \} \supset B$ donc définie et continue sur B muni de la topologie induite.

$$\therefore \quad \begin{array}{llll} f : A \to \mathbb{R}^3 & f(A) = B & \text{continue} & \\ f^{-1} : B \to \mathbb{R}^3 & f^{-1}(B) = A & \text{continue} & \end{array} \Rightarrow f \ \underline{\text{homéomorphisme}}$$



A B