

Analyse numérique Exercices corrigés

Interpolation polynômiale

Exercice 1

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

Corrigé : Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses x_0, x_1, \dots, x_n est de degré n et s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) \quad \text{avec} \quad L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

ici les points d'appui donnés par :

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & f(x_0) = -1 \\ x_1 = 2 & f(x_1) = 2 \\ x_2 = 3 & f(x_2) = 9 \\ x_3 = 5 & f(x_3) = 87 \end{array}$$

déterminons donc un polynôme de Lagrange de degré 3, celui-ci s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 f(x_k) L_k(x)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} & L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} & &= \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\ &= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5) & &= \frac{1}{6}x(x-3)(x-5) \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} & L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} & &= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3) \\ &= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5) & & \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\ &= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : -2, -1, 0, 1, 2. Ensuite discuter l'erreur d'interpolation.

Corrigé : Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Les points d'appui sont :

$$\begin{array}{ll} x_0 = -2 & f(x_0) = \frac{1}{5} \\ x_1 = -1 & f(x_1) = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 & f(x_2) = 1 \\ x_3 = 1 & f(x_3) = \frac{1}{2} \\ x_4 = 2 & f(x_4) = \frac{1}{5} \end{array}$$

Le polynôme de Lagrange est de degré 4. Il s'écrit

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 f(x_k) L_k(x)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{1}{24} x(x+1)(x-1)(x-2) & L_1(x) &= -\frac{1}{8} x(x+2)(x-1)(x-2) \\ L_2(x) &= \frac{1}{4} (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) & L_3(x) &= -\frac{1}{6} x(x+2)(x+1)(x-2) \\ L_4(x) &= \frac{1}{24} x(x+2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x) \\ &= \frac{1}{120} x(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{1}{12} x(x+2)(x-1)(x-2) \\ &\quad + \frac{1}{4} (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{1}{12} x(x+2)(x+1)(x-2) \\ &\quad + \frac{1}{120} x(x+2)(x+1)(x-1) \\ &= \frac{1}{10} x^4 - \frac{3}{5} x^2 + 1 \end{aligned}$$

Calculons l'erreur théorique sur cette interpolation. celle-ci est donnée au point x par :

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \gamma_{n+1}(x) - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \quad \text{où} \quad \xi \in I = (\min x_i, \max x_i)$$

Elle vérifie,

$$|E(x)| \leq |\gamma_{n+1}(x)| \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} \quad \text{où} \quad \gamma_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad M_{n+1} = \max_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$$

Comme ici on a 5 points d'appui, cette erreur est majorée par : $|E(x)| \leq |\gamma_5(x)| \frac{1}{5!} M_5$

On a clairement $\gamma_5(x) = \prod_{k=0}^4 (x - x_k) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Il reste à calculer $M_5 = \max_{t \in I} |f^{(5)}(t)|$. Un calcul assez long

donne : $f^{(5)}(x) = \frac{-240x(3 - 10x^2 + 3x^4)}{(1 + x^2)^6}$ de même, on trouve $f^{(6)}(x) = \frac{-240}{(1 + x^2)^7} [-21x^6 + 105x^3 - 63x^2 + 3]$.

Ainsi l'étude de $f^{(5)}$ donne $M_5 = 100$. Finalement,

$$|E(x)| \leq |\gamma_5(x)| \frac{1}{5!} M_5 = |x(x^2 - 1)(x^2 - 4)| \frac{100}{5!} = |x(x^2 - 1)(x^2 - 4)| \frac{5}{6}$$

Exercice 3

Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide de l'interpolation de Lagrange, si on prend les points : $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$.

Corrigé :

Exercice 4

1. Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange pour trouver la cubique passant par 0.4, 0.5, 0.7, 0.8 pour $f(x) = \sin(x)$
2. Même question pour $f(x) = \frac{1}{\tan x}$

Corrigé :

Exercice 5

Soit $f(x) = \sqrt{2+x}$

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ Lagrange basé sur les points d'abscisses 0, 1 et 2.
2. Calculer $P(0.1)$ et $P(0.9)$, et comparer aux valeurs exactes. Évaluer l'erreur d'interpolation en ces deux points.

Intégration numérique

Exercice 6

Déterminer par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

Ces points d'appui sont ceux donnant $\sin x$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Corrigé :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

1. Soit T l'approximation de I par la méthode des trapèzes, le pas h donné par $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_4) + 2 \sum_{i=1}^3 f(x_i) \right) \\ &= \frac{\pi}{16} (0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)) \\ &= 0.987116 \end{aligned}$$

2. Soit S l'approximation de I par la méthode de Simpson. Celle-ci s'écrit,

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3} (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{1}{3} [(0 + 1 + 4(0.38... + 0.92...) + 2 \times 0.707...)] \\ &= 1.000135 \end{aligned}$$

Les points d'appui donnés dans cet exercice correspondent à la fonction $\sin x$. Et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$. On constate donc que l'approximation de I donnée par la méthode de Simpson est meilleure que celle par les trapèzes, puisque $|S - I| = 0.000135$ et $|T - I| = 0.012884$.

Exercice 7

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ :

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en m/s^2)	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calcule la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80$ s, par la méthode des trapèzes puis par Simpson.

Corrigé : On sait que l'accélération γ est la dérivée de la vitesse V , donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(s)ds \quad \Rightarrow \quad V(80) = 0 + \underbrace{\int_0^{80} \gamma(s)ds}_I$$

1. Calculons I par la méthode des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs, $h = 10$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2} \left(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(x_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 10(30 + 50,67 + 2(31,63 + \dots + 46,70)) \\ &= 3089 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2. Calculons I par la méthode de Simpson

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3} (\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 4(\gamma(x_1) + \gamma(x_3) + \dots) + 2(\gamma(x_2) + \gamma(x_4) + \dots)) \\ &= \frac{10}{3} (30 + 50,67 + 4(31,63 + 35,47 + \dots) + 2(33,44 + 37,75 + \dots)) \\ &= 3087 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Exercice 8

Calculer à l'aide de la méthode des trapèzes l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin x^2 dx$ avec le nombre de points d'appui $n = 5$ puis $n = 10$.

Corrigé : Soit $I = \int_0^\pi \sin x^2 dx$

1. $n = 5$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{5}$. Calculons I par la méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \\ &= \frac{\pi}{10} (0 + 1 + 2(\sin(\pi)^2 + \sin(0) + 2(\sin(\frac{\pi}{5})^2 + \sin(\frac{2\pi}{5})^2 + \sin(\frac{3\pi}{5})^2 + \sin(\frac{4\pi}{5})^2)) \\ &= 0.504431 \end{aligned}$$

2. $n = 10$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{10}$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{20} (0 + 1 + 2(\sin(\pi)^2 + \sin(0) + 2(\sin(\frac{\pi}{10})^2 + \sin(\frac{2\pi}{10})^2 + \sin(\frac{3\pi}{10})^2 + \sin(\frac{4\pi}{10})^2)) \\ &= 0.722338 \end{aligned}$$

alors que la valeur 'exacte' est approximativement 0,772651. Avec ce pas plus petit l'approximation numérique est meilleure.

Exercice 9

Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à $0.5 \cdot 10^{-3}$ près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$

Corrigé : Soit

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$$

Le pas d'intégration est $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$. D'autre part l'erreur théorique sur la méthode de Simpson est donnée par

$$\begin{aligned} E(h) &= \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \\ &= \frac{-2\pi}{180} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \cos(\xi) \end{aligned}$$

où $\xi \in [a, b]$, par conséquent,

$$|E(h)| \leq \left| \frac{-2\pi}{180} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \right|$$

Ainsi pour que $|E(h)| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$ il suffit que n vérifie $\left| \frac{\pi}{90} \frac{16\pi^4}{n^4} \right| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$, donc, $n^4 \geq \frac{1}{0.5 \cdot 10^{-3}} \frac{\pi}{90} 16\pi^4$. Ainsi n vérifie $n \geq 18.6$. On prendra par exemple $n = 20$, car pour la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ doit toujours être pair.

Exercice 10

Soit $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$ une partition fixée de l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ de nombres réels tels que

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{i=0}^n \mu_i P(x_i)$$

Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n .

Corrigé : Le polynôme P s'écrit dans la base de Lagrange $P(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) P(x_i)$ (1)

avec $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, puis on intègre (1) sur $[a, b]$, on obtient :

$$\int_a^b P(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) P(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(x) dx \right) P(x_i) = \sum_{i=0}^n \mu_i P(x_i)$$

Exercice 11

Calculer $\int_1^2 \sqrt{x} dx$ par la formule des rectangles en décomposant l'intervalle d'intégration en dix parties. Évaluer l'erreur commise.

Corrigé : On $a = 1$, $b = 2$ et $n = 10$. Le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = \int_1^{1,1} \sqrt{x} dx + \int_{1,1}^{1,2} \sqrt{x} dx + \dots + \int_{1,8}^{1,9} \sqrt{x} dx + \int_{1,9}^2 \sqrt{x} dx$$

On applique la formule des rectangles sur chaque sous intervalle, on obtient

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = h \left(\sqrt{1} + \sqrt{1,1} + \sqrt{1,2} + \dots + \sqrt{1,8} + \sqrt{1,9} \right) \approx 1,1981$$

L'estimation de l'erreur comise par la méthode des rectangles est $|E| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

On a $f(x) = \sqrt{x}$ et $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$ donc $\max_{x \in [1,2]} |f''(x)| \leq \frac{1}{4}$ ce qui implique que $|E| \leq 2.10^{-4}$

Exercice 12

1. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ d'une fonction f construite sur les points :

$$-1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad 1$$

2. Par intégration du polynôme obtenu, déduire la formule d'intégration approchée suivante :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{4} f(-1) + \frac{3}{4} f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} f(1)$$

Corrigé :

1. On pose $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 1$. Les polynômes auxiliaires de Lagrange associés sont :

$$L_0(x) = -\frac{16}{9}(x^3 - x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}) \quad L_1(x) = \frac{27}{16}(x^3 - \frac{1}{x}x^2 - x + \frac{1}{3})$$

$$L_2(x) = -\frac{27}{16}(x^3 + \frac{1}{x}x^2 - x - \frac{1}{3}) \quad L_3(x) = \frac{16}{9}(x^3 + x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{1}{9})$$

l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$f(x) \approx P(x) = L_0(x)f(-1) + L_1(x)f\left(-\frac{1}{3}\right) + L_2(x)f\left(\frac{1}{3}\right) + L_3(x)f(1)$$

2. on intègre le polynôme sur $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \int_{-1}^1 P(x) dx \\ &\approx \int_{-1}^1 L_0(x) dx f(-1) + \int_{-1}^1 L_1(x) dx f\left(-\frac{1}{3}\right) + \int_{-1}^1 L_2(x) dx f\left(\frac{1}{3}\right) + \int_{-1}^1 L_3(x) dx f(1) \\ &\approx \frac{1}{4} f(-1) + \frac{3}{4} f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} f(1) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation $F(x)=0$

Exercice 13 Soit la fonction $F(x) = 2x^3 - x - 2$, on se propose de trouver les racines réelles de F par la méthode des approximations successives.

1. Montrer que F possède une seule racine réelle $\alpha \in [1, 2]$
2. Etudier la convergence des trois méthodes itératives suivantes : $x_0 \in [1, 2]$ donné et

$$(a) \quad x_{n+1} = 2x_n^3 - 2; \quad (b) \quad x_{n+1} = \frac{2}{2x_n^2 - 1}$$

Corrigé : Soit l'équation $F(x) = 2x^3 - x - 2 = 0$. Il est clair que F est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

On a $F(1) = -1$, $F(2) = 12$, donc $F(1) F(2) < 0$. D'autre part, $F'(x) = 6x^2 \geq 0$ sur $[1, 2]$. Donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une seule solution $\alpha \in [1, 2]$ telle que $F(\alpha) = 0$.

(a) Étudions la convergence de la suite $x_{n+1} = g_1(x_n) = 2x_n^3 - 2$. Tout d'abord, cette suite, si elle converge, conduit bien à une racine de $F(x) = 0$ car si α est la limite de la suite (x_n) , alors

$$\alpha = 2\alpha^3 - 2 \quad \text{donc} \quad F(\alpha) = 2\alpha^3 - \alpha - 2$$

Par ailleurs, $g_1'(x) = 6x^2 \geq 6$ sur $[1, 2]$. Par conséquent, grâce au théorème des accroissements finis, il existe ξ_n compris entre x_n et x_{n+1} tel que

$$|g_1(x_{n+1}) - g_1(x_n)| = g_1'(\xi_n) |x_{n+1} - x_n|$$

donc

$$\begin{aligned} |g_1(x_{n+1}) - g_1(x_n)| &\geq 6 |x_{n+1} - x_n| \\ &\geq 6^2 |x_n - x_{n-1}| \\ &\vdots \\ &\geq 6^n |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Ainsi, cette suite diverge et la méthode est à rejeter.

(b) Étudions la convergence de $x_{n+1} = g_2(x_n) = \frac{2}{2x_n^2 - 1}$. Cette méthode, si elle converge conduit vers la racine α de $F(x)$ dans $[1, 2]$, car si α est la limite de la suite (x_n) , alors

$$\alpha = \frac{2}{2\alpha^2 - 1} \quad \text{donc} \quad F(\alpha) = 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \quad g_2'(x) = \frac{-8x}{(2x^2 - 1)^2} \quad \text{donc} \quad -8 < g_2''(x) = \frac{8(6x^2 + 1)}{(2x^2 - 1)^3} < \frac{16}{49}$$

En conséquence, on ne peut conclure sur la monotonie de g_2

Exercice 14

On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x = g(x)$ où $g(x) = -\ln x$,

1. a) Montrer qu'elle admet une seule racine α , montrer que $\alpha \in I = [0, 1]$.
 b) Montrer que la méthode itérative : $x_{n+1} = g(x_n)$ diverge.
 c) on considère alors $g^{-1}(x) = g^{-1}(g(x)) = x$, (remarquer que g^{-1} existe)
 montrer que la méthode itérative : $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ converge. En posant $e_n = x_n - \alpha$ montrer que e_{n+1} est de signe opposé à e_n , que peut-on déduire ?
2. Retrouver α à l'aide de la méthode de Newton.

Corrigé :

Exercice 15

Soit l'équation

$$x(1 + e^x) = e^x \quad (1)$$

1. Montrer que cette équation admet une racine unique s dans $[0, 1]$
2. Proposer une itération de point fixe pour l'équation (1).
3. Montrer, que cette itération converge vers la solution s .
4. Écrire la méthode de Newton pour cette équation en précisant un bon choix de l'initialisation x_0 .

Corrigé : On pose $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$

1. On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 \Rightarrow f(0) f(1) \leq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction f admet au moins une racine sur $[0, 1]$ et puisque f est monotone, cette racine est unique.
2. On considère l'itération du point fixe suivante : $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{e^{x_n}}{1 + e^{x_n}}$
3. g est contractante car $g'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ et $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0, 1]$
 puisque g est croissante, on a $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} = g(0) \leq g(x) \leq g(1) = \frac{e}{1 + e} < 1$ alors on a $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
 D'après le théorème de convergence du point fixe, notre itération proposée converge vers la solution de l'équation (1).
4. La méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n(1 + e^{x_n}) - e^{x_n}}{1 + x_n e^{x_n}}$
 Choix de l'initialisation x_0 , il doit vérifier la condition $f(x_0) f''(x_0) > 0$. On a $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$ et $f''(x) = (1 + x)e^x$, on prend par exemple $x_0 = 1$

Exercice 16 Soit l'équation $\ln(x) = 2 - x$

1. Montrer que cette équation admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, 2]$
2. Étudier l'itération

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ donné} \\ x_{n+1} & = 2 - \ln(x_n) \end{aligned}$$

et montrer que cette itération converge vers α .

3. Montrer que l'équation proposée est équivalente à l'équation $x = e^{2-x}$, et étudier l'itération

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ donné} \\ x_{n+1} & = e^{2-x_n} \end{aligned}$$

Qu'en déduisez-vous ?

4. Écrire la méthode de Newton pour l'équation proposée et proposer un bon choix d'initialisation x_0 de cette méthode.

Corrigé : Soit la fonction $f(x) = \ln(x) + x - 2$, on considère l'équation ' $f(x) = 0$ '

1. On a $f(2) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins une racine α de l'équation ' $f(x) = 0$ ' et puisque f est strictement monotone (croissante) sur $]0, 2[$, alors la racine α est unique.
2. posons $g(x) = 2 - \ln(x)$, on a $g'(x) = -\frac{1}{x}$ et $|g'(\frac{1}{2})| = 2$ donc g n'est pas contractante.
3. On a $x = 2 - \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = 2 - x \Leftrightarrow x = e^{2-x}$, donc pour x_0 donné, l'itération $x_{n+1} = 2 - \ln(x_n)$ est équivalente à l'itération $x_{n+1} = e^{2-x_n}$.
 posons $h(x) = e^{2-x}$ et étudions la formulation $x_{n+1} = h(x_n)$.

Résolution des équations différentielles

Exercice 17 Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = y - 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte.
2. Calculer les valeurs approchées y_1 et y_2 par la méthode d'Euler pour $h = 0.1$ et $n = 10$.

Exercice 18 Soit l'équation différentielle à condition initiale $y'(t) = y(t) + t$ et $y(0) = 1$. Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en 10 parties égales. Comparer à la solution exacte.

Coorigé :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t = f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

L'intervalle d'intégration est $[0, 1]$. Remarquons tout d'abord que f étant continue et lipschitzienne par rapport à y le problème de Cauchy (1) admet une solution unique.

Méthode d'Euler Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ &= y_n + h(t_n + y_n) \\ &= (1 + h)y_n + ht_n \end{aligned}$$

On a aussi $y(0) = y_0 = 1$, $h \frac{1-0}{10} = 0.1$ $t_0 = 0$ et $t_n = t_0 + nh = \frac{n}{10}$. D'où l'approximation en t de $y(t)$, est $y_{10} = 3.1874$.

Solution exacte de cette équation en appliquant la méthode de la variation de la constante est donnée par : $y(t) = -1 - t + 2e^t$ ce qui implique $y(1) = -1 - 1 + 2e = 3.4366$

Estimation de l'erreur : l'erreur effectivement commise lors de l'application de la méthode d'Euler est $|E| = |3.4366 - 3.1874| = 0.25$

Exercice 19 Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) = -2xy^2, \quad x \in [0, 5] \quad y(0) = 1$$

1. Calculer la solution exacte
2. En appliquant la méthode de Range Kutta d'ordre 2, calculer les valeurs approchées y_0 et y_1 , avec un pas $h = 0.5$