Série n°, 02

Exercice n°, 01 :

1/. $x = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{x} = a$.

$$f(x) = \frac{1}{x} - a$$

2/. $\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} - a \quad ; \quad f'(x_n) = \frac{-1}{x_n^2} .$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{\frac{-1}{x_n^2}}$$

$$= x_n - \left(\frac{1}{x_n} - a\right) \cdot x_n^2$$

$$= x_n + x_n - a x_n^2$$

$$x_{n+1} = 2x_n - a x_n^2 .$$

3/. $\begin{cases} x_0 = 0,2 \\ x_{n+1} = 2x_n - a x_n^2 \end{cases}$

Pour $a = 7$

$\begin{cases} x_0 = 0,2 \\ x_{n+1} = 2x_n - 7x_n^2 \end{cases}$

i	1	2	3	4	5
x_i	0,12	0,1392	0,1428	0,1428	0,1428

Exercice n° 02:

1/- $x = e^{1/x}$

$x - e^{\frac{1}{x}} = 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} e^{1/x} > 0$$

f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

f est continue sur $]0 ; +\infty[$

f est monotone sur $]0 ; +\infty[$

$f(]0 ; +\infty[) = \mathbb{R}$ $(0 \in]-\infty ; +\infty[)$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

2/- $f(3/2) = -0,96$; $f(2) = 0,35$

$$f(3/2) \cdot f(2) < 0$$

Alors : $3/2 < \alpha < 2$.

3/- $\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{1/x_n}}{1 + \frac{1}{x_n} e^{1/x_n}}$$

On pose : $u = \frac{1}{x}$

l'équation devient :

$$\frac{1}{u} = e^u \; ; \; 1 = u e^u$$

$$g(u) = \frac{1}{u} - e^{u} \; ; \quad 1 - u e^{u} = 0$$

$$\begin{cases} u_0 \text{ donnée} \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

$$g'(u) = -e^{u} - u e^{u}$$
$$= -(1+u)\, e^{u}.$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1 - u e^{u}}{e^{u} + u e^{u}} \times \frac{e^{-u}}{e^{-u}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{-u}{1+u}$$

4/ $$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \quad (\text{donnée}) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{e^{-u} - u}{1+u} \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5
u_i	0,568007	0,567144	0,567143		
x_i	1,760541	1,763220	1,76323	- - -	- - - -

$x^* = 1{,}763$

Exercice n° 03 :

1/ Montrons que : $\exists \alpha \in]1, 2[$

$$f(1) = -1 \quad ; \quad f(2) = 5$$

$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \; ; \quad \forall x \in]1, 2[$$

x	1	α	2
$f(x)$	-1	0	5

- f est continue sur $]1;2[$
- f est monotone sur $]1;2[$
- $f(1) \cdot f(2) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution dans $]1,2[$.

2/ $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n - 1} \end{cases}$$

Rappel :

Chiffre escacte d'un nombre décimale approché

Définition :

Un C.S d'un nombre approché x est dit escate (C.S.e)

- Si l'erreure absolue est inferieure ou égal une demi unité de rang du C.S
- le $n^{ième}$ chiffre avant la virgule est escacte si $\Delta x \leq 0{,}5 \times 10^{n-1}$

Ex :

① $x^* = 12$

$x = 11{,}98 \longrightarrow 4\ C.S$

$\Delta x = |x - x^*| = 0{,}02 = 0{,}2 \times 10^{-1}$

② $x^* = 2{,}5$

$x = 2{,}497 \Rightarrow \Delta x = |x - x^*| = 0{,}003 = 0{,}3 \times 10^{-2}$