

Série n° 02

Exercice n° 01:

1/  $u = \frac{1}{x}$  ,  $\frac{1}{u} = a$

$$f(u) = \frac{1}{u} - a$$

2/  $\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} - a ; f'(x_n) = -\frac{1}{x_n^2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$= x_n - \left( \frac{1}{x_n} - a \right) \cdot x_n^2$$

$$= x_n + x_n - a x_n^2$$

$$x_{n+1} = 2x_n - a x_n^2$$

3/  $\begin{cases} x_0 = 0,2 \\ x_{n+1} = 2x_n - a x_n^2 \end{cases}$

Pour  $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_0 = 0,2 \\ x_{n+1} = 2x_n - \frac{1}{2} x_n^2 \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5
$x_i$	0,12	0,1392	0,1428	0,1438	0,1438



### Exercice n° 091:

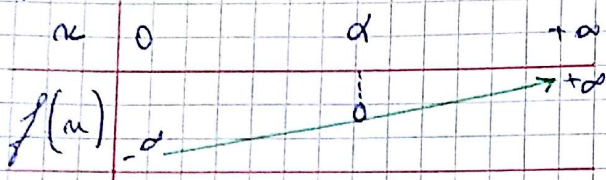
1/.

$$u = e^{\frac{1}{x}}$$

$$u - e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$f'(u) = 1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} > 0$$

$f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$



$f$  est continue sur  $]0; +\infty[$

$f$  est monotone sur  $]0; +\infty[$

$$f(]0; +\infty[) = \mathbb{R} \quad (0 \in ]-\infty; +\infty[)$$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation  $f(u) = 0$  admet une unique solution.

2/  $f(3/2) = -0,96$  ;  $f(2) = 0,35$

$$f(3/2) \cdot f(2) < 0$$

Alors :  $3/2 < \alpha < 2$ .

3/  $\begin{cases} u_0 \text{ - donnée} \\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - e^{\frac{1}{u_n}}}{1 + \frac{1}{u_n^2} e^{\frac{1}{u_n}}}$$

On pose :  $u = \frac{1}{x}$

l'équation devient :

$$\frac{1}{u} = e^u ; 1 = u e^u$$



$$g(u) = \frac{1}{u} - e^u; \quad 1 - u e^u = 0$$

$\begin{cases} u_0 \text{ donnée} \end{cases}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

$$g'(u) = -e^u - u e^u = -(1+u) e^u$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1 - u e^u}{e^u + u e^u} \times \frac{e^{-u}}{e^{-u}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{-u}{1+u}$$

4/  $\begin{cases} u_0 = 0,6 \text{ (donnée)} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u} - u}{1+u} \end{cases}$

i	1	2	3	4	5	
$u_i$	0,568007	0,567144	0,567143			
$\alpha_i$	1,76541	1,763220	1,76323	-	-	$u^* = 1,763$

Exercice n° 03:

1/ Montrons que :  $\exists \alpha \in ]1, 2[$

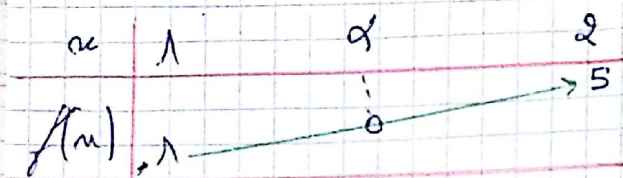
$$f(1) = -1; \quad f(2) = 5$$

$$f(1) \cdot f(2) \leq 0$$

$$f(u) = u^3 - u - 1$$

$$f'(u) = 3u^2 - 1 > 0; \quad \forall u \in ]1, 2[$$





- $f$  est continue sur  $]1; 2[$
- $f$  est monotone sur  $]1; 2[$
- $f(1) \cdot f(2) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution dans  $]1, 2[$ .

$$\begin{aligned} 2/ \quad u_{n+1} &= u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \\ &= u_n - \frac{u_n^3 - u_n - 1}{3u_n^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3 - u_n - 1}{3u_n^2 - 1} \end{cases}$$

Rappel:

Chiffre exacte d'un nombre décimal approché

Définition:

Un C.S d'un nombre approché  $x$  est dit exacte (C.S.e)

• Si l'erreur absolue est inférieure ou égale une demi unité de rang du C.S

• le  $n^{\text{ème}}$  chiffre avant la virgule est exacte si  $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{n-1}$

Ex:

①  $x^* = 1,2$

$x = 11,97 \rightarrow 4 \text{ C.S}$

$\Delta x = |x - x^*| = 0,02 = 0,2 \times 10^{-1}$

②  $x^* = 2,5$

$x = 2,497 \Rightarrow \Delta x = |x - x^*| = 0,003 = 0,3 \times 10^{-2}$