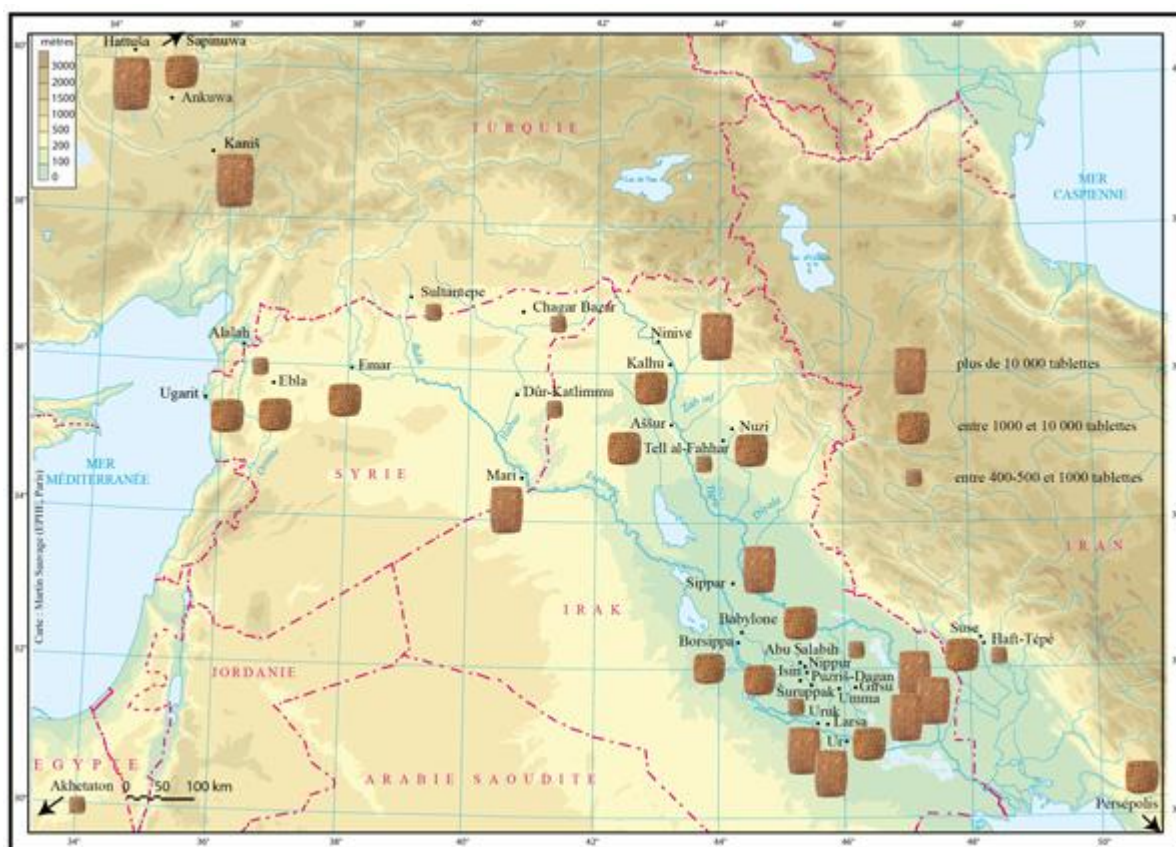


L'algèbre Babylonienne

Les textes mathématiques en écriture cunéiforme que nous possédons remontent à -1800 à -1600 environ. L'un des aspects les plus marquants de ces textes est le développement des mathématiques.

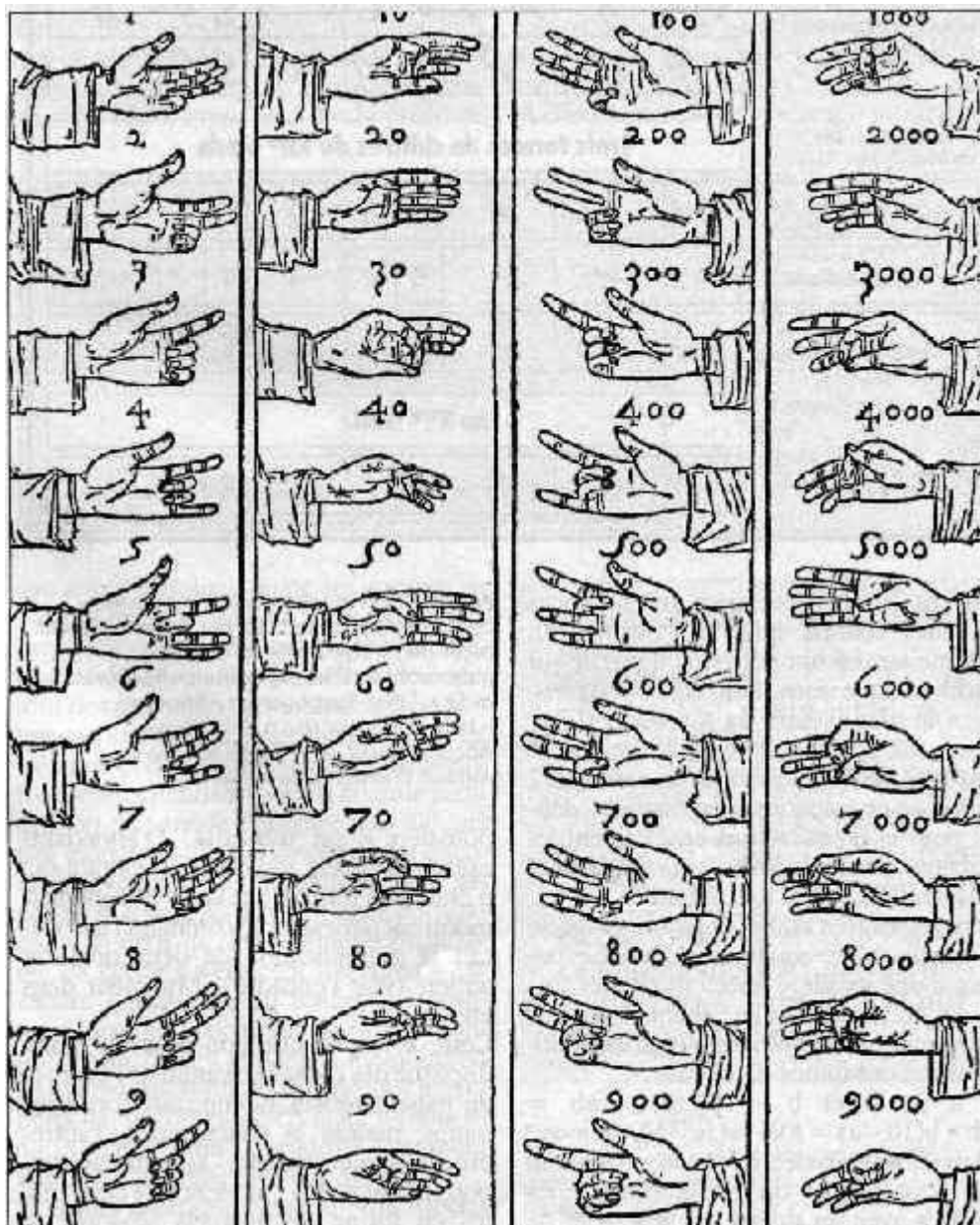
Leur traduction, durant la première moitié du XXe siècle, montre l'existence d'une singulière forme d'algèbre et d'une aisance surprenante à résoudre des paires d'équations du premier degré et des équations et systèmes du second degré, transformés en telle façon qu'on puisse leur appliquer l'usage de quelques identités élémentaires.



Carte du Proche-Orient ancien avec la répartition des tablettes cunéiformes exhumées à ce jour. Carte réalisée par M. Sauvage et X. Faivre

Au début du troisième millénaire (-3000), les premières tablettes mésopotamiennes témoignent de l'emploi d'un **système de numération**. Ce système utilise à la fois la base 10 et la base 60 (décimale et sexagésimale).

Les raisons de l'utilisation de la base 10 : Les dix doigts ont servi de système primitif de comptage.



Les raisons de l'utilisation de la base 60 :

- Grand quantité de diviseur
- Astronomie

Exercice 1 :

Voici la liste des chiffres cunéiformes babyloniens de 0 à 59.

		unités									
		...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
dizaines	0...		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	1... <	<	<I	<II	<III	<IV	<V	<VI	<VII	<VIII	<IX
	2... <<	<<	<<I	<<II	<<III	<<IV	<<V	<<VI	<<VII	<<VIII	<<IX
	3... <<<	<<<	<<<I	<<<II	<<<III	<<<IV	<<<V	<<<VI	<<<VII	<<<VIII	<<<IX
	4... <<<<	<<<<	<<<<I	<<<<II	<<<<III	<<<<IV	<<<<V	<<<<VI	<<<<VII	<<<<VIII	<<<<IX
	5... <<<<<	<<<<<	<<<<<I	<<<<<II	<<<<<III	<<<<<IV	<<<<<V	<<<<<VI	<<<<<VII	<<<<<VIII	<<<<<IX

Difficultés de lecture et apparition du zéro de position

Dans le tableau ci-dessus, les nombres 1, 60 et 3 600 sont représentés de la même façon : bien que positionnel, le système babylonien ne note ni le zéro, ni la virgule. Le lecteur des tablettes doit ainsi rétablir l'exposant des nombres qu'il déchiffre, ce qui rend l'interprétation parfois difficile.

Pour écrire des nombres supérieurs à 59, il suffit de juxtaposer de gauche à droite plusieurs de ces «chiffres». Ainsi l'écriture du nombre $60^2 + 17 \times 60 + 35$ consiste à aligner les symboles représentant 1, 17, 35.

Compléter le tableau suivant.

Valeur décimale	Écriture babylonienne cunéiforme	Décomposition en base 60
1		
17		
44		
60		
85		
		3,5
		4,6
3600		
11327		
		4,36,22
3054781		
		5,75,36

Exercice 2 :

Système du premier degré chez les babyloniens

1- Le système linéaire traité par les babyloniens se présente sous la forme:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ x \pm y = l \end{cases} \quad \text{où } a, b, k, l \text{ sont des quantités données avec } k \text{ et } l \text{ positifs et } a \text{ et } b, \text{ ou}$$

bien l'un d'eux seulement, positifs.

Pour résoudre ceci, on peut :

- Soit exprimer une inconnue à l'aide de l'autre par la seconde équation puis résoudre la nouvelle forme de la première équation $ax \pm b(l - x) = k$
- Soit introduire l'auxiliaire inconnue $z = \frac{x - y}{2}$ ou $z = \frac{x + y}{2}$ respectivement et

$$\text{introduire } \begin{cases} x = \frac{x - y}{2} + \frac{x + y}{2} \\ y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } x, y = z \pm \frac{l}{2} \text{ respectivement dans la première équation.}$$

Vérifier que les deux méthodes donnent les mêmes solutions.

Résoudre maintenant ce système par la deuxième méthode semble incongrue mais nous allons voir que ce n'était pas le cas chez les mésopotamiens :

2- Voici en application un problème résolu dans la tablette 8389 du Musée de Berlin, problème 1 [Appendice,1]

Dans cet exemple, on doit chercher **les surfaces de deux champs** produisant des céréales, on en connaît les **rendements respectifs** par unité de surface, la **différence des productions**, ainsi que **la somme des surfaces**.

Les unités utilisées sont :

Pour la surface : le *bur* égal à 1800 *sar* (1 *sar* = 36m²).

Pour la capacité : le *kur* égal à 300 *sila* (1 *sila* = 1dm³).

Dans le problème, le rendement est le même pour un même champ : 4 *kur* = ... *sila* pour le premier et 3 *kur* =*sila* pour le second.

La différence des productions, 500, est commune elle aussi.

La somme des surfaces est de 1800 *sar*.

a. Texte

Par le premier *bur*, j'ai reçu 4 *kur* de grain.

Par un autre *bur*, j'ai reçu 3 *kur* de grain. Un grain dépasse l'autre de 500. J'ai additionné mes champs j'ai obtenu 1800.

Que sont mes champs ?

Pose 1800 le premier *bur*. Pose 1200 le grain qu'il a donné

Pose 1800 le second *bur*. Pose 900 le grain qu'il a donné.

Pose 500 le dépassement d'un grain sur l'autre.

Pose enfin 1800 la somme de la superficie des champs.

Ensuite partage en deux 1800, la somme de la superficie des champs ; tu obtiens 900.

Pose 900 et 900, deux fois.

Prends l'inverse de 1800, le *bur* ; tu obtiens $1/1800$

Multiplie ($1/1800$) par 1200, le grain qu'il a donné, tu obtiens $2/3$, qui est le grain faux¹.

Multiplie-le par 900, que tu avais posés deux fois, tu obtiens 600. Que ton esprit le retienne.

Prends l'inverse de 1800, le second *bur* ; tu obtiens $1/1800$

Multiplie ($1/1800$) par 900, le grain qu'il a donné ; tu obtiens $1/2$, le grain faux.

Multiplie-le par 900, que tu as posés deux fois, tu obtiens 450.

De quoi 600, que ton esprit retient, dépasse-t-il 450? Il le dépasse de 150.

Soustrais 150, ce par quoi il dépasse, de 500, ce par quoi un grain dépasse l'autre, tu obtiens 350.

Que ton esprit retienne 350 que tu as obtenus.

Ajoute le coefficient $2/3$ et le coefficient $1/2$; tu obtiens $7/6$, Je n'en connais pas l'inverse. Par quoi dois je -multiplier $7/6$ pour avoir 350 que ton esprit retient,

Pose 300.

Multiplie 300 par $7/6$; cela te donne 350.

Soustrais de l'un des 900, que tu as posé deux fois, et ajoute à l'autre 300 que tu as posés ; le premier sera 1200 et le second 600.

La superficie du premier champ est 1200 et la superficie du second champ est 600.

Mais que vaut leur grain ?

Prends l'inverse de 1800, le *bur*, tu obtiens $1/1800$.

Multiplie ($1/1800$) par 1200, le grain qu'il a donné ; tu obtiens $2/3$.

Multiplie-le par 1200, la superficie du premier champ, tu obtiens 800, qui est le grain de 1200, la superficie du premier champ.

Prends l'inverse de 1800, le second *bur*, tu obtiens $1/1800$.

Multiplie $1/1800$ par 900, le grain qu'il a donné ; tu obtiens $1/2$.

Multiplie $1/2$ par 600, la superficie du second champ ; tu obtiens 300, qui est le grain de 600, la superficie du second champ.

De quoi 800, le grain du premier champ dépasse-t-il 300, le grain du second champ ? Il le dépasse de 500.

b. Voici les calculs numériques de la résolution et de la vérification finale :

$$1800 : 2 = 900$$

$$900$$

$$900$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1800^{-1} = \frac{1}{1800} \\ 1200 \cdot \frac{1}{1800} = \frac{2}{3} \quad \text{"grain faux"} \\ 900 \cdot \frac{2}{3} = 600 \end{array} \right.$$

¹ Le grain faux : la production du champ par unité de valeur

Le grain vrai : la production réelle du champ

$$\begin{cases} 1800^{-1} = \frac{1}{1800} \\ 900 \cdot \frac{1}{1800} = \frac{1}{2} \quad \text{"grain faux"} \\ 900 \cdot \frac{1}{2} = 450 \end{cases}$$

$$600 - 450 = 150$$

$$500 - 150 = 350 \text{ "à retenir"}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{6}{7} \quad \text{"inconnu"}$$

$$\text{Or, } \frac{7}{6} \cdot a = 350 \text{ donc } a = 300$$

$$900 + 300 = 1200 \text{ "superficie du premier champ"}$$

$$900 - 300 = 600 \text{ "superficie du second champ"}$$

$$\begin{cases} 1200 \cdot \frac{1200}{1800} = 800 \\ 600 \cdot \frac{900}{1800} = 300 \end{cases}$$

La différence est bien 500.

Donner une interprétation mathématique moderne de cette solution.

Interprétation moderne du texte à partir de ce qui précède :

$$\begin{cases} \frac{1200}{1800} = \frac{2}{3} \\ \frac{900}{1800} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{sont les productions des premier et deuxième champs par unité de}$$

surface, appelées dans la tablette "grains faux". Le "grain vrai" serait la production réelle, soient, si x et y sont les surfaces des deux champs, $(2/3)x$ et $(1/2)y$.

Il nous faut donc résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \end{cases}$$

D'après la première question de l'exercice, on sait que $\frac{x+y}{2} = 900$,

Posons alors comme inconnue auxiliaire $z = \frac{x-y}{2}$

Ainsi, par addition et soustraction, $x = 900 + z$, $y = 900 - z$.

La seconde équation devient alors : $\frac{2}{3}(900 + z) - \frac{1}{2}(900 - z) = 500$

ce qui donne : $\frac{7}{6}z = 500 - 150 = 350$

Avec $z = 300$, on trouve ainsi : $x = 1200$ et $y = 600$

Exercice 3 :

(Tablette 13901 du musée britannique, problème 1 [appendice, 3])

J'ai ajouté la surface et le côté de mon carré ; j'ai obtenu 3/4.

L'équation est : $x^2 + x = 3/4$, de la forme $x^2 + bx = c$

Tu poseras 1, l'unité.

Tu partageras en deux 1, tu obtiens 1/2.

Tu multiplieras 1/2 par 1/2 ; tu obtiendras 1/4

Tu ajouteras 1/4 à 3/4 ; tu obtiens 1 ; c'est le carré de 1.

Tu soustrairas 1/2, que tu as multiplié, de 1 ; tu obtiens 1/2.

C'est le côté du carré.

Question : Exprimer cette solution pas à pas en vous inspirant de la résolution d'une équation du second degré.

La solution moderne de l'équation est : $x_0 = -b/2 + \sqrt{(b/2)^2 + c}$

Les calculs effectués (et leurs équivalents sous forme littérale) sont :

1 (=b) b
↓ :2
1/2 b/2
↓ carré
↓

$$\begin{array}{lcl}
 1/4 & (b/2)^2 & \\
 \downarrow +3/4 & & \\
 1 & (b/2)^2 + c & \\
 \downarrow \text{racine} & & \\
 1 & \sqrt{(b/2)^2 + c} & \\
 \downarrow -1/2 & & \\
 1/2 & \sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2 = x_0 &
 \end{array}$$

EXERCICE 4 :

J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré ; j'ai obtenu 870.

Tu poseras 1, l'unité.

Tu partageras en deux ; tu obtiens 1/2.

Tu multiplieras 1/2 par 1/2 ; tu obtiens 1/4.

Tu ajouteras ceci à 870 ; tu obtiens $870 + 1/4$.

C'est le carré de $29 + 1/2$.

Tu ajouteras 1/2, que tu as multiplié, à $29 + 1/2$; tu obtiens 30. C'est le côté du carré.

Expliciter les calculs utilisés pour résoudre cette équation.