HISTOIRE

DES

MATHEMATIQUES

Rachid BEBBOUCHI

AVERTISSEMENT

Ce livre s'inspire du cours que j'ai dispensé de 2007 à 2008 et de 2008 à 2009 dans le cadre des modules d'Histoire des Mathématiques I (premier semestre) et II (second semestre) au niveau de la deuxième année de licence mathématiques à l'USTHB.

Comme ce sont les premiers pas des étudiants dans ce domaine, il fallait d'abord opter pour une méthodologie : suivre un ordre chronologique, suivre un ordre par champ ou praxéologie mathématique (algèbre, théorie des nombres, géométrie,…), ou créer un mélange subtil des deux.

J'ai choisi un ordre chronologique qui tienne compte de l'évolution des praxéologies mathématiques.

Comme les étudiants algériens proviennent d'un environnement très pauvre en histoire des mathématiques (pas de références dans leurs études post universitaires, peu de documentation disponible dans le contexte algérien), ils sont de prime abord très peu motivés pour ce genre d'enseignement. Il fallait donc les intéresser par l'ajout d'artéfacts sur la vie des mathématiciens et les rapports qu'ils entretenaient entre eux ainsi que l'influence sur leur relation avec les mathématiques.

Ainsi cet enseignement veut désacraliser les mathématiques, œuvre de toutes les civilisations, avec ses défauts et ses qualités. Ce n'est nullement une technologie importée, par contre, c'est l'indicateur d'une science évoluée, en perpétuelle expansion.

Il a fallu donc suivre les grandes périodes de l'Histoire.

Le monde antique (jusqu' en 476)

- *La haute antiquité* jusqu'à la mort d'Alexandre en 323 avant J.-C. (Babyloniens, Egyptiens, la période hellénique de Grèce (Thalès, Pythagore, Platon, Aristote, précepteur d'Alexandre),
- *La période hellénistique :* Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante,
- *Rome et son empire.*

La période arabe (632-1453)

- *Le monde arabe* (632-1258)
- *Le Moyen-Age en Europe* (476- 1453)

La Renaissance et après

- *La renaissance* (1453-1600)
- *Le XVII^{ème} siècle*
- *Le XVIII^{ème} siècle*
- *Le XIX^{ème} siècle et l'aube du XX^{ème} siècle.*

Fait à Alger le 10/10/10

CHAPITRE I : LES BALBUTIEMENTS MATHÉMATIQUES.

I. La Préhistoire :

Dans le film *2001 odyssée de l'espace*, Stanley Kubrick semble suggérer que le singe est devenu homme à partir du moment qu'il a compris qu'un os peut être une arme redoutable dans ses mains.

A mon avis, la bête est devenue un être humain dès qu'elle a appris à compter.

Quand l'homme a-t-il commencé à penser en termes de relations numériques et géométriques ?

Il semble certain que, vers 40.000 av J.C, l'homme du Neandertal a commencé à penser, prendre conscience du milieu où il vit et assurer sa survie.
On a ainsi découvert :

- un langage articulé dans lequel on a un système de nombres.
- des outils et des constructions avec des relations spatiales.

1. **Numération :**

Certaines tribus primitives actuelles d'Australie ou Polynésie possèdent un système de nombres.

En Tchécoslovaquie, un os de loup, vieux de 30.000 ans, possède 55 incisions disposées en deux séries par groupes de 5.

Os d'Ishango (23000 ans avant notre ère), République Démocratique du Congo

L'homme primitif pense à un nombre quand il saisit les relations suivantes :

- La nature des objets à compter ne joue aucun rôle dans la numération.
- L'ordre dans lequel les éléments sont observés n'affecte pas le résultat final.
- Le dernier élément compté correspond au nombre cardinal de la collection.

On a d'abord compté par 2, 4, 6 ou par 5 (doigts de la main), 10(tous les doigts), 20 (doigts et orteils).

Les pygmées d'Afrique emploient la répétition

1	2	3	4	5	6	….
A	oa	ua	oa-oa	oa-ua	ua-ua	….

Avec l'avènement du commerce, le primitif doit savoir compter mais aussi tenir un bilan. On enregistre avec des traits dans le bois, des nœuds sur une corde, des groupes de cailloux ou de noix de cocos, des traits sur des tablettes d'argile.

Une des premières traces d'écriture.
On peut remarquer les marques de comptage en forme de triangle, notamment en haut à droite.

Mais l'animal a-t-il le sens du nombre ? Oui pour certains oiseaux, certains insectes, les rats, les phoques.
Certaines espèces de guêpes apportent toujours 5 chenilles vivantes au jeune rejeton, d'autres toujours 12, certaines jusqu'à 24.
Une espèce apporte 5 chenilles au mâle et 10 à la femelle.

L'addition et la soustraction ont été les premières opérations requises. La multiplication partait du dédoublement, ce qui permettait d'écrire les tables numériques. $10=2\times5=2\times(2+2+1)$.

La division viendra tardivement.

2. Géométrie :

Les longueurs étaient mesurées avec des parties du corps humain : le doigt, le pied, le pouce, la main, l'avant bras.
Les volumes étaient mesurés par des paniers ou des coquilles de même forme.
La symétrie des formes géométriques apparaissait sur les décorations.
La plupart des peuples primitifs ont inventé un calendrier lunaire.

II. La civilisation babylonienne :

Le néolithique (préhistoire ou âge de la pierre) se prolonge davantage en Europe et prend fin plus rapidement dans certaines parties de l'Asie et de l'Afrique.

Les premières sociétés organisées se formèrent sur les rives du Nil, de l'Euphrate, du Tigre, en Inde et en Chine.

La *civilisation babylonienne* regroupe un ensemble de peuples qui ont vécu en Mésopotamie il y a 5000 ans avant J.C : sumériens, akkadiens, chaldéens, assyriens, babyloniens.

Babylone était le centre culturel de 2000 à 550 av J.C..

On connaît les mathématiques babyloniennes à travers les fouilles archéologiques depuis le milieu du XIXème siècle. Un demi- million de tablettes d'argile, dont 300 ont trait à des mathématiques, ont ainsi été découvertes.

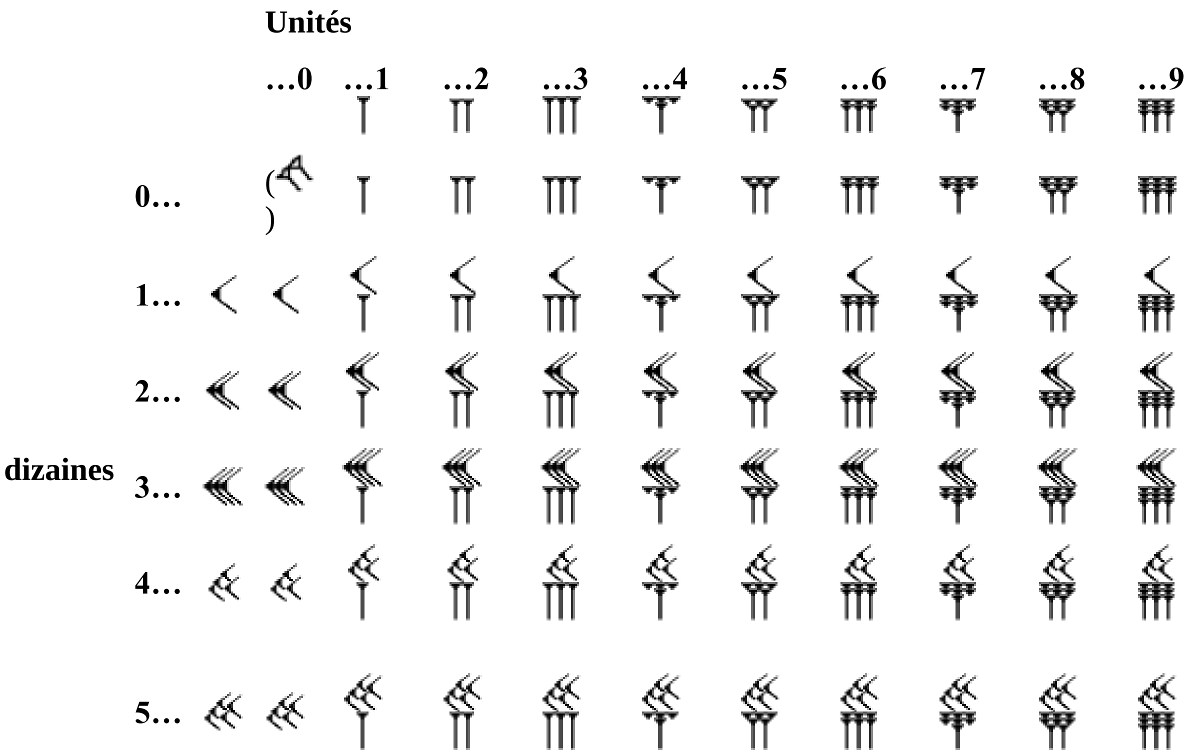
On utilisait un stylet (calam) pour obtenir une écriture cunéiforme (en forme en coins) et on faisait cuire l'argile pour une meilleure conservation.

Ecriture cunéiforme

Mais il a fallu attendre les travaux du français Thereau-Dangin (1939) et de l'allemand Otto-Neugebauer (1939,1969) pour mieux comprendre de quelles mathématiques il s'agissait.

On y trouve des séries de nombres (avec multiplications, élévation au carré et au cube), des relations géométriques et des listes de problèmes.

Liste des chiffres cunéiformes babyloniens de 0 à 60.



1. **<u>Système de numération :</u>**

On arrête à 60 (c'est donc un système à base 60).

Le zéro n’existe pas mais on mettait un espace blanc. Presque jusqu’au temps de J.C, on utilisait  pour zéro.

C’est un système positionnel de base 60.

Exemple :

11327  $3 \times 60^2 + 8 \times 60 + 47 \times 1$

7424  $2 \times 60^2 + 3 \times 60 + 44 \times 1$

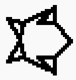
Les blancs veulent dire quelque chose.

2. Arithmétique babylonienne :

On a des tables de multiplication, par exemple la table de multiplication par 9

1* 9 : 
2*9 :  ….. ….

Chiffre babylonien	Valeur
	100
	600

Chiffre babylonien	Valeur
	1000
	3600

Donc c’est basé sur 60.
Les babyloniens ont appliqué cela au commerce, aux contrats, au calcul d’intérêts, au système de poids et mesures, au calendrier.

3. Des problèmes qui relèvent d’une algèbre :

Exemple : j’ai additionné l’aire de mes deux carrés ce qui me donne 21,15 et le côté de l’un est plus petit du septième que le côté de l’autre.

En termes modernes c’est résoudre le système d’équations :
$x^2 + y^2 = 21,15$ (1) $y = (6/7)\, x$ (2)
On substitue (2) dans (1) et on a :

$x^2 + (36/49)\, x^2 = 85/4$ (en base 10)
D’où :
$x^2=49/4$ et $x=7/2$ car la solution négative n’était pas envisageable.

4. Géométrie babylonienne :

C’est la mesure de figures planes. Pour les Babyloniens, ils assimilent π à 3 mais dans une tablette découverte à Suse, on trouve $\pi= 3(1/8)$.

Ils calculent l'aire d'un triangle et d'un trapèze, le volume d'un prisme droit et celui d'un cylindre par la formule *aire de la base* × *hauteur*.

III. Les Mathématiques égyptiennes :

Les principales sources connues sont :

a) Le papyrus Rhind (vers 1650 av J.C) n'écrit pas le scribe Ahmès :

Il contient 85 problèmes. Il est intitulé : « *directions pour obtenir une connaissance de toutes les choses, inhérentes à tout ce qui existe, connaissance de tous les secrets.*» Il est divisé en 5 parties : arithmétique, stéréométrie (mesure de volumes), géométrie, calcul des pyramides, problèmes pratiques.

b) Le papyrus de Moscou (vers 1850 av J.C) :

On y trouve 25 problèmes de la vie courante.

c) Le rouleau de cuir de mathématiques égyptiennes :

On y trouve 26 sommes écrites sous forme de fractions unitaires, comme une table d'arithmétique.

d) Le papyrus de Kahn, de Berlin, de Reisner, d'Akhmim .

Le papyrus provient d'une plante du Nil qu'on coupe en fines lanières. On l'enroulait.

1) Système de numération (avec les hiéroglyphes) :

(1) (2) (5) (6) (7) (10) (20)

(90) (100) lotus (1000)

On peut écrire de gauche à droite ou de droite à gauche mais on oriente avec le lotus.

Pour les fractions on mettait une ovale : =1/10, = 1/7

2) <u>Arithmétique :</u>

On multiplie et on divise par deux et on cherche les 2/3 de tout entier ou fraction.

Exemple : (le principe de dédoublement)

Pour chercher 24×37; on remarque $24 = 16+8$ donc $24\times37 = 16\times37+8\times37$
$= 2^{4}\times 37+2^{3}\times 37$.

Pour chercher 847: 33, on remarque $847 = 528+319 = 528+264+33+22$
$= 33\times16+33\times8+33\times1+22$
$= 25\times33+22$.

Problème 23 (papyrus Rhind) :
2/3 de 16+ (1/56) + (1/679) + (1/776) est égal à quoi ?
On décompose :
1. 16+ (1/56) + (1/679) + (1/776).
2. 10 + (2/3) + (1/84) + (1/1358) + (1/4074) + (1/1164).

3) <u>Algèbre :</u>

La solution d'une équation linéaire $x+ax=b$ ou $x+ax+cx=b$ (x porte le nom de aha dans le papyrus) provient de la **méthode de fausse position.**

Exemple : on veut calculer $x+(x/7)=24$.

On prend $x=7$: $7 + (7/7)=8$ solution fausse.

Mais $3\times8=24$ donc la solution est $3\times7=21$.
On trouve aussi des progressions arithmétiques dans le papyrus.

Problème 40 : Distribuer 100 miches de pain parmi 5 personnes, de façon que le (1/7) du total des trois premières égale le total des deux dernières. Quelle est la différence ?

On suppose que la différence est 5(1/2) et on pose 1 comme premier terme.
On a :
1, 6(1/2), 12, 17(1/2), 23 (avec 60 pour somme).
Donc il faut ajouter 40= (2/3) ×60. Ajoutons à chaque terme les (2/3) de lui-même.
1(2/3), 10[(2/3) + (1/6)], 20, 29(1/6), 38(1/3) et la somme devient 100.

4) <u>Géométrie et trigonométrie :</u>

Les problèmes de géométrie sont presque tous des formules de mesure nécessaires pour évaluer l'aire de figures planes et certains volumes.
Ils ne connaissent pas le théorème de pythagore.
Pour l'aire d'un cercle, π est remplacé pas 3(1/6).
Ils connaissent la similitude et la proportionnalité : on trouve ainsi deux figures similaires de dimensions différentes, dessinées sur les murs de la chambre contenant la tombe de Seti

Premier. On trouve même une référence à la formule : $V=h/3[a^2 + b^2 + ab]$ qui représente le volume d'un tronc de pyramide à base carrée. D'où vient cette formule? Mystère.
Quelques unités de mesure :
Coudée = 7 mains = 7×4 doigts
Seqt = rapport de la base horizontale de la pyramide à sa hauteur.
Seqt = cotangente de l'angle de la pente des faces des pyramides.

CHAPITRE II : LES MATHÉMATIQUES GRECQUES

I. La naissance des mathématiques grecques :

Il y a eu une influence babylonienne et égyptienne à l'origine des mathématiques grecques mais cet héritage s'est transformé en une science déductive qui refuse l'aspect empirique des choses. Il y a déjà le langage qui se veut plus précis. Voilà quelques termes dont certains n'ont pratiquement plus cours de nos jours :

- **Infini** (apeiron) : sans borne.
- **Substance** (apostasis) : ce qu'il y a de permanent dans une chose ou un être et qui en fait un sujet.
- **Essence** (ousia) : l'être de quelque chose, ce qu'il est en lui-même.
- **Attribut** (categorema) : n'a pas d'existence séparée (par exemple le prédicat *il existe).*
- **Accident** : ce qui peut avoir lieu ou disparaître sans modification du sujet.
- **Un prédicat** peut être essentiel (par essence) ou accidentel (par accident).
- **En acte :** état de ce qui a atteint sa forme (eidos), son but (telos).
- **En puissance** (dunanis) : caractère de ce qui peut se produire mais n'est pas actuellement réalisé, possibilité qui tend vers l'être, vers la finalité.

II. Systèmes de numération :

1. **le système attique : (**VI ème siècle av J.C, Athènes)

I (1) II (2) Γ (5) (première lettre du mot pente) Δ (10) (déka)

H (100) (hekaton) X (1000) (khilioi) M (10000) (murioi) ΓII (7) ΓIIII (9)

ΔIII (13) HΓ (105)

𐅅 (500) 𐅄 (50) 𐅆 (5000)

XXXX𐅅HHH𐅄 ΔΔΓIIII=4889 (à base 10).

2. **Le système ionique :** $V^{ème}$ siècle av J.C, a remplacé le système attique.

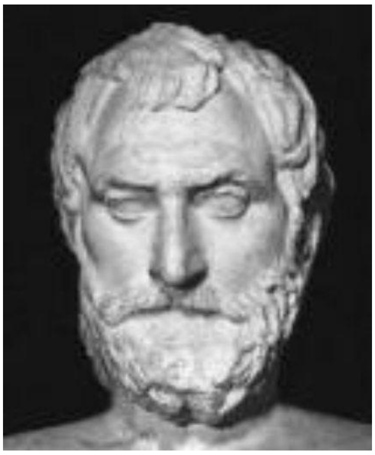
Chiffre grec	Valeur
α	1
β	2
γ	3
δ	4
ε	5
ς	6
ζ	7
η	8
θ	9

Chiffre grec	Valeur
ι	10
κ	20
λ	30
μ	40
ν	50
ξ	60
ο	70
π	80
ϙ	90

Chiffre grec	Valeur
ρ	100
σ	200
τ	300
υ	400
ϕ	500
χ	600
ψ	700
ω	800
ϡ	900

III. L'école de Milet :

L'école de Milet est créée par **Thalès** (vers 624-548 av JC) , homme d'état, marchand, ingénieur, astronome, philosophe et mathématicien. Il ramena la science d'Egypte après avoir été marchand.



En géométrie, il a énoncé les propositions :

- Tout diamètre bissecte un cercle
- Les angles de base d'un triangle isocèle sont égaux

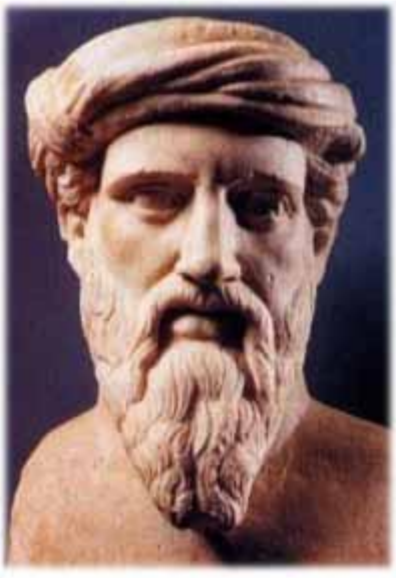
- Les angles verticaux formés par deux droites qui se coupent sont égaux.
- Si deux triangles ont 2 angles et 1 côté égaux, les triangles sont congrus.
- L'angle inscrit dans un demi -cercle est droit.

Il aurait montré comment mesurer la distance du rivage à un bateau en mer et comment trouver la hauteur d'une pyramide avec l'ombre d'un bâton vertical.

Légende : un mulet chargé de sel s'est rendu compte que s'il traverse une rivière, le poids de sa charge s'allégeait ; alors, à chaque fois, il se jetait à l'eau. Pour le dissuader, Thalès l'a chargé d'éponges.
La devise de l'école était :
L'élément est principe de toute chose, comme l'eau, le feu, …, l'infini (ajouté par Anaximandre).

IV. L'école de Pythagore : (570-512 av J.C) :

1. **Pythagore de samos :** est né au VI^{ème} siècle av J.C dans l'île de Samos, pas loin de Milet. Il était disciple de Thalès. Après avoir été en Egypte et à Babylone, il revient sur son île où régnait un tyran, Polycrate. Il dut s'installer à Crotone (Italie du sud) et fonder une secte religieuse. On y étudiait la philosophie, les mathématiques et les sciences naturelles.

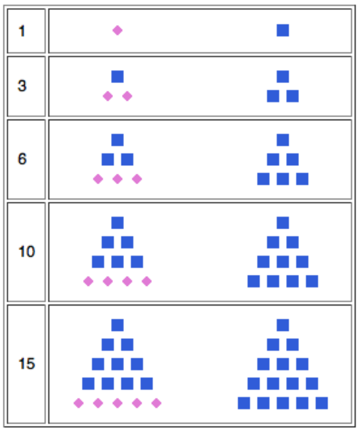


Le pouvoir démocratique de la Grande Grèce pourchassa la secte mais elle survécut 2 siècles. Pythagore s'exila à Metapontum où il mourut.
La philosophie pythagoricienne repose sur la devise: **le nombre entier est la cause des qualités diverses des éléments de l'univers. Tout est nombre**.
On y étudiait les propriétés des nombres, l'arithmétique, la géométrie, la musique et l'astronomie.

2. **L'arithmétique pythagoricienne :**

Chez les Pythagoriciens, *l'arithmétique* représente les relations abstraites reliant les nombres et *la logistique* le calcul pratique avec les nombres.

Par contre, de nos jours, la logistique est appelée **arithmétique** et l'ancienne arithmétique est appelée **théorie des nombres.**
Un nombre pair est celui qui peut se diviser en deux parties égales.
Les Pythagoriciens connaissaient donc les nombres pairs, les nombres impairs, les nombres amicaux (chacun est somme des diviseurs propres de l'autre comme 284 et 220), les nombres parfaits (un nombre parfait est la somme de ses diviseurs propres, comme 24, 496, 8128), les nombres déficients (il excède cette somme), abondants (c'est le contraire), les nombres figurés (liés à une figure).



Triangulaire $n(n+1)/2$

Le nombre triangulaire a pour valeur: $n\ (n+1)\ /2 = 1 + 2 + \ldots\ldots + n$.
Par exemple, on a un résultat de **Nicomaque** : si : $1+2+\ldots\ldots+2^n = p$ est un nombre premier, alors $2^n p$ est un nombre parfait.

3. La Musique pythagoricienne :

Fixez un des bouts d'une corde tendue et faites la vibrer. Elle émettra un son d'un ton. Faites vibrer la moitié de la corde et le son s'élèvera à une octave. Faites vibrer les 2/3 de la corde et le son sera 1/5 au dessus du ton.
On a ainsi construit des échelles. On a ainsi l'octave, la quinte et la quarte.
L'astronomie grecque du VI$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.soutenait que, plus la distance d'une planète à la terre est grande, plus la planète se meut rapidement et les distances entre les planètes étaient exprimées par des rapports de nombres entiers, donc des sons.
La musique est ainsi devenue une branche des mathématiques.

4. Théorie pythagoricienne des proportions :

Elle a inspiré Euclide dans ses Eléments. Il y a la moyenne arithmétique $((a+b)/2)$, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique $[(2ab)/\ (a+b)]$.

5. La découverte des grandeurs incommensurables :

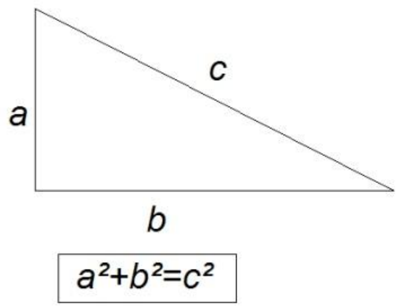
On a l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté. Mais les Pythagoriciens croyaient le contraire, et c'est une des raisons qui a discrédité leur école.
Légende : un marin s'est rendu compte en pleine mer de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré de côté un (ce n'est pas une fraction). Ses compagnons, tous pythagoriciens, refusant de le croire, l'ont jeté à la mer.

Dans le livre X des Eléments d'Euclide, on trouve une démonstration de la chose au niveau de la proposition 117 dite par le pair et l'impair :

Soit un carré ABCD. Supposons que AB et BD soient commensurables. Alors:
AB/ BD = n/m avec $m \neq 1$ et m et n premiers entre eux.
Appliquons le théorème de Pythagore : $BD^2 = 2AB^2$ donc $n^2/m^2 = 1/2$ et $m^2=2n^2$.
m^2 est alors pair ainsi que m, ce qui entraîne n impair. Mais si m=2k on aura $n^2=2k^2$ donc n^2 est pair et n pair d'où la contradiction.

6. La géométrie pythagoricienne :

On a le fameux théorème de Pythagore.



Pythagore a construit des solides réguliers : le tétraèdre, l'hexaèdre ou cube, l'octaèdre (8 faces), le dodécaèdre (12 faces) et l'icosaèdre (20 faces).

7. L'algèbre pythagoricienne :

On démontre géométriquement : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

A	B
A^2	AB
AB	B^2

On a aussi $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

V. *Ecole de Eléates :*

Fondée par **Parménide** (510 av J.C ?) à Elée, elle affirme que **le monde est fini**, ce qui va créer une polémique.

Zénon (485 av J.C) veut défendre son maître Parménide contre ses détracteurs.

Il invente alors deux techniques :

- *le raisonnement par l'absurde.*
- *les paradoxes* :il en énonce à peu prés 160 dont les plus connus sont:
  - La dichotomie : parcourir la moitié avant d'atteindre le tout.
  - L'Achille : le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide car il a toujours quelque avance.
  - La flèche : entrain d'être transportée, elle est en état de station.
  - Le stade.

AAAA
BBBB $\longrightarrow$
$\longleftarrow$ CCCC

Des masses égales (des chars à quatre chevaux par exemple) se meuvent en sens contraire dans le stade le long d'autres masses égales avec une vitesse égale.
Axiome : le temps mis par l'un et l'autre à passer devant chaque masse est égal.
Conséquence : la moitié du temps est égal à son double (B a parcouru 2A et C a parcouru 4B).

VI .***De Pythagore à Platon :***

On a très peu de textes de cette période.

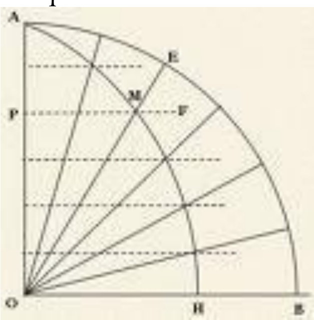
Anaxagore : (vers 500-428 av J.C) né à Clazomène, était plus physicien que mathématicien. Emprisonné à cause de ses idées en astronomie, il aurait tenté de résoudre la quadrature du cercle pendant sa captivité. Son élève obtint sa liberté.
Anaxagore pensait que la lune recevait sa lumière du soleil. Il pensait aussi que **le monde était infini.**

Œdipe de Chio :
Astronome, il a effectué des travaux géométriques liés à l'astronomie (tracer une perpendiculaire à une droite donnée à partir d'un point pris hors de cette droite, proposition 12 du livre I de Eléments).

<u>Démocrite :</u> (460-370 av J.C) né à Abdère, est connu par sa **théorie matérialiste des atomes**. Il a écrit plusieurs ouvrages mathématiques dont on n'a que le nom : *nombres, sur la géométrie, sur les tangentes, sur les irrationnels.*

Tout est atome pour lui.

<u>Hippias d'Elis :</u> (né vers 460 av J.C) découvre la *quadratrice*, courbe utilisée pour résoudre le problème de la trisection d'un angle.



La quadratrice

<u>Hippocrate de Chio :</u> (distinct d'Hippocrate de Cors, le médecin et fondateur de la médecine) est parti à Athènes vers 430 av J.C et y est devenu un grand mathématicien.

a. Il fut le premier à compiler tout un livre des Eléments.

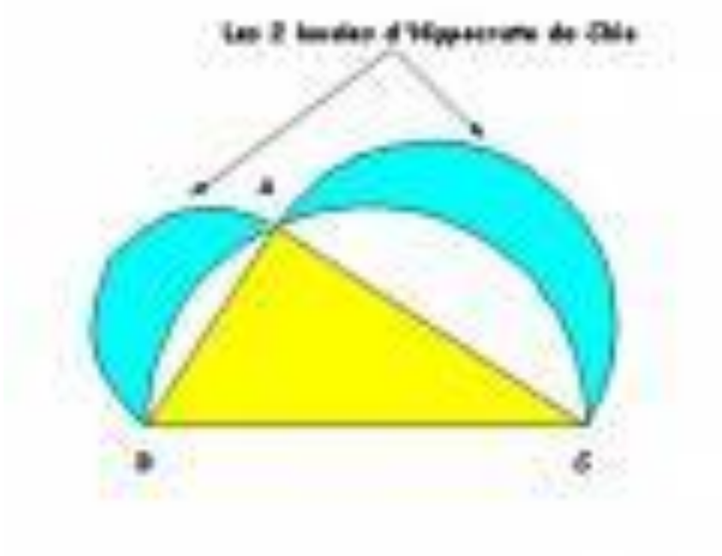
b. Il a réalisé la quadrature des lunules.

On trace un demi cercle sur la diagonale AC

(Segment AB)/ (Segment AC) = $AB^2/AC^2 = 1/2$.

Donc AC = AB+BC

Et on a aire de la bande = aire du triangle ABC.



<u>Théodore de Cyrène :</u> géomètre célèbre, professeur de Platon, a montré par des figures que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,… n'étaient pas commensurables avec 1.

<u>Théétète d'Athènes :</u> a combattu vers 369 av J.C avec les Athéniens et a été ramené chez lui blessé et souffrant de dysenterie. Il est parti des travaux de Théodore pour classifier tous les segments de lignes qui produisent des carrés commensurables en distinguant les commensurables des incommensurables, d'où **un début de théorie des irrationnels** .

<u>Archytas de Tarente :</u> homme d'état et philosophe, a écrit le premier traité sur la mécanique basé sur des principes mathématiques. Il s'est distingué dans le calcul des proportions.

En conclusion les pythagoriciens ont inventé :

- *La théorie des nombres.*
- *La méthode d'application des aires.*
- *Une théorie des proportions pour les grandeurs commensurables.*
- *3 des cinq solides réguliers.*

Ils ont découvert l'existence des incommensurables et institué la musique comme science mathématique. Tous leurs travaux vont contribuer à l'édification des Eléments d'Euclide.

VII. ***De Platon à Euclide :***

a)**Platon :**

Platon, né à Athènes vers 427 av J.C, est surnommé ainsi parce qu'il avait des épaules larges. Après 8 ans comme élève du grand Socrate, il se retira à Mégare quand Socrate, pour ne pas avoir cru aux dieux de la cité et pour avoir corrompu la jeunesse, a été condamné à boire la ciguë (vers 399 av J.C).

Platon a fait alors de grands voyages et revint à Athènes en 377 av J.C, après avoir été racheté de l'esclavage par un de ses amis. Il y fonda une école de philosophie, **l'Académie** (lieu de promenades et réunions, bibliothèque et habitation). Platon y enseigne jusqu'à sa mort en 348 av J .C..

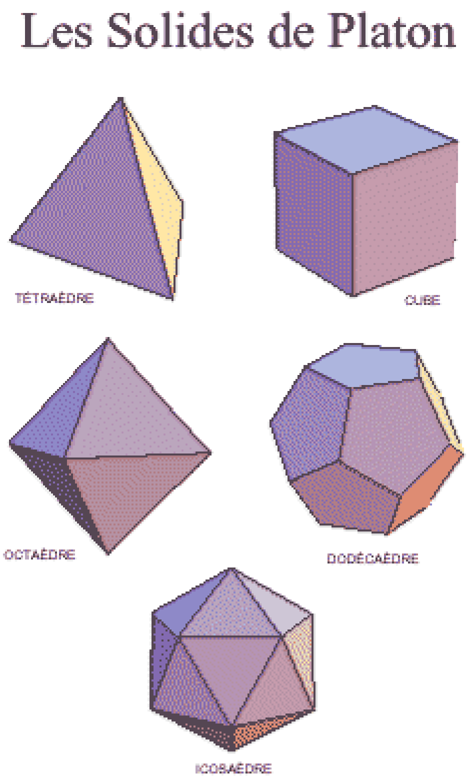
Mais l'Académie a continué à fonctionner jusqu'au VI^{ème} siècle après J.C.

L'œuvre connue de Platon comporte 43 écrits et il en existe au moins 121 passages, répartis dans 25 dialogues, qui parlent de mathématiques : *la République*, *Phédon*, *Timée*, *Théétète et Epinomis.*

Ce n'est pas Socrate qui lui apprit les mathématiques mais plutôt Archytas de Tarente, son ami. Il a travaillé sur :

- *La théorie des nombres.*
- *Les figures cosmiques* (appelées figures platoniques).
- *La stéréométrie* (mesurer les volumes des solides).
- *Les fondements des mathématiques.*
- *L'axiomatique.*

Il décrit ainsi 5 solides et le dernier, le dodécaèdre, est celui qui s'approche le plus de l'Univers d'après lui.

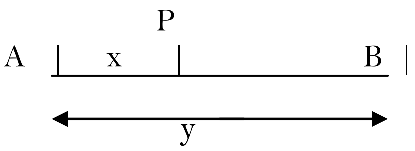


Il applique les solides réguliers à l'explication des phénomènes scientifiques.
En théorie des nombres, il montre que : si a > b alors (a+b)/ (b+b) < a/b.
Il semble que ce soit Platon qui ait distingué clairement entre l'arithmétique (théorie des nombres) et la logistique (art de compter).
Platon a introduit la **méthode analytique dans la démonstration mathématique**.
Il a écrit un livre contre Parménide (le *Parménides*) et se réfère à **un nombre infini**.

b) Eudoxe :

Eudoxe de Cnide (vers 408-355 av J.C) est mathématicien, géomètre, médecin, géographe, astronome, philosophe.
A 23 ans, il se rend à Athènes, ensuite part en Egypte et enfin retourne à Athènes.

Les travaux d'Eudoxe sont très peu connus.
En géométrie, il a été à l'origine de certaines propositions du livre V des Eléments, notamment les sections.
Une section est la division d'une ligne droite en rapports extrême et moyen (section d'or).



$y = AB$ et $x = AP$, tel que $y/x = x/(y-x)$.

Mais les contributions qui l'ont rendu célèbre sont :

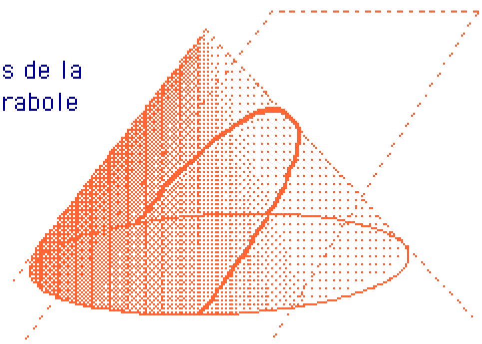
- *La théorie des proportions* (livre V des Eléments)
- *La méthode d'exhaustion.*

On a $x/y = m/n$, si et seulement si $\forall$ a, b entiers
$ax = bz \Rightarrow am = bn$
$ax > bz \Rightarrow am > bn$

On peut appliquer cette définition aux nombres mais aussi aux éléments géométriques (Rapport de sphères = rapport de cubes).
Archimède attribue à Eudoxe la méthode d'exhaustion : « **étant donné deux grandeurs ayant un rapport, on peut trouver un multiple de l'une ou de l'autre qui excède l'autre** », ce qui va donner :
« *Si de toute grandeur on lui soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié, et si l'on continue ce procédé de subdivision, il restera une grandeur plus petite que toute grandeur donnée de la même espèce* ».
Les grecs ont utilisé cette méthode (qui se rapproche de l'intégration) pour calculer des aires et des volumes de figures curvilignes.
Eudoxe a élaboré en astronomie une hypothèse des sphères concentriques pour les mouvements des planètes (les mouvements sont circulaires uniformes).

c) <u>Ménechme :</u>

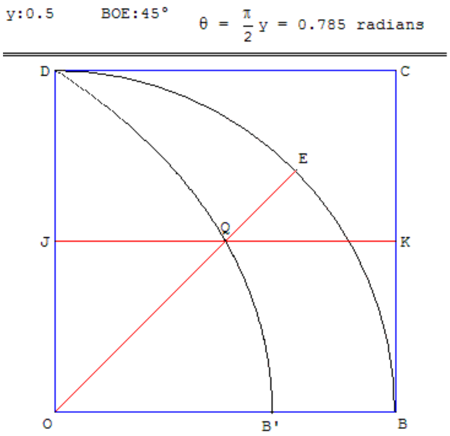
Elève d'Eudoxe, il était astronome et géomètre.
Il a augmenté le nombre de sphères. Il a aussi écrit sur les *fondements de la géométrie* (sens du mot élément, différence entre problème et théorème).
Il a découvert les **sections coniques** et même les équations $xy=ab$ de l'hyperbole et $y^2 = bx$ de la parabole.
Une section conique provient d'un cône circulaire droit tranché de coupes perpendiculaires à la génératrice.
La courbe d'intersection est une parabole.
Si l'angle du cône est aigu, c'est une ellipse.



Mais c'est plus tard que les mots parabole, hyperbole, ellipse seront introduits par Apollonius de l'école d'Alexandrie.

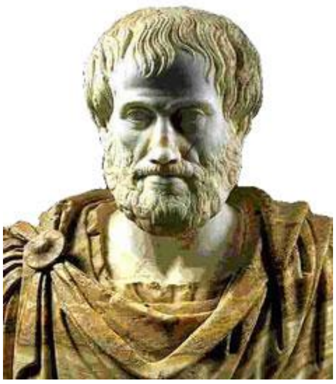
d) **Dinostrate :**

C'est le frère de Ménechme. Pour la duplication du cube (construction d'un cube de volume double d'un cube donné), il utilise une quadratrice.



e) **Aristote :**

Né à Stagire en 384 ou 385 av J.C, de père médecin, il fut élève de Platon et précepteur d'Alexandre le Grand, roi de Macédoine. C'était un philosophe et un biologiste et il resta 20 ans à l'école de Platon. Mais il s'en détacha en affirmant, dans son Ethique à Nicomaque : « *Bien que Platon et la Vérité me soient chers, le devoir sacré m'oblige à préférer la Vérité* ».
En 325 av J.C, il créa **le lycée** et eut Euclide pour adepte. Il mourut en 321 av J.C..



Aristote n'était pas très bon mathématicien. Par exemple, sa démonstration que les angles d'un triangle isocèle sont égaux pêche par l'absence de rigueur d'après George Kreisel.
Chez Aristote, **les nombres sont des attributs**.
Mais c'est un bon logicien : il adopte **l'infini potentiel** et non en acte.
Il donne cinq raisons de croire à l'infini :

- Le temps est infini.
- La division dans les grandeurs.
- La génération et la destruction ne s'épuisent pas.
- Le limité est limité à autre chose.
- Les grandeurs mathématiques, comme les nombres, paraissent infinies.

Mais l'infini, c'est quoi ?

- Ce qui ne peut être parcouru par nature (comme la voix ne peut être visible).
- Ce qu'on peut parcourir et qui est sans fin (le labyrinthe).
- Ce qu'on peut parcourir mais ne se laisse pas parcourir (volume d'eau dans les mers).

Aristote ajoute la définition de l'infini mathématique : « *En réalité, ils (les mathématiciens) n'ont pas besoin et ne font point usage de l'infini mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées* ».
Aristote détruit un à un les paradoxes de Zénon et ne croit qu'en l'infini potentiel.
Et la méthode d'exhaustion d'Eudoxe correspond à cette notion d'infini.
Cette notion d'infini potentiel va coller aux mathématiciens jusqu'à nos jours.

f) Euclide et l'école d'Alexandrie :

Le roi Philippe de Macédoine s'empare de la Grèce en 338 av J.C et son fils Alexandre le Grand lui succèdera.
Vers 331 av J.C, Alexandre conquiert l'Egypte et fonde Alexandrie. C'est un foyer cosmopolite de la culture. En 306, après la mort d'Alexandre et le morcellement de l'empire, Ptolémée I[er] redynamise Alexandrie et crée une immense bibliothèque de 600000 papyrus environ.

Euclide, fondateur de l'école de mathématiques de l'université d'Alexandrie, a écrit de nombreux ouvrages : les *Eléments* en 13 livres, les *Données*, la *Division des Figures*, les *Phénomènes*, l'*Optique* sont les plus connus et reconnus.

Les Eléments sont consacrés surtout à la géométrie mais aussi en théorie des nombres et en algèbre traités géométriquement.

Légende : quelqu'un qui commençait l'étude de la géométrie sous la direction d'Euclide lui avait demandé, après avoir appris le premier théorème :

Qu'est ce *que je devrais recevoir en apprenant ces choses ?*
Euclide a alors ordonné à son esclave : *donnes- lui 3 pièces, puisqu'il doit réaliser un profit à partir de tout ce qu'il apprend.*

Les Eléments :

Livre I : il commence par 23 définitions, 5 postulats et 5 notions communes.
Exemples de définitions :

- *Un point est ce qui n'a pas de partie.*
- *Une ligne est une longueur sans largeur.*
- *La ligne droite est une ligne qui est également placée entre ses points.*
- *Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.*
- *Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées sur une même ligne droite.*
- *Une limite est ce qui est l'extrémité de quelque chose.*

- *Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.*
- *Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne, telle que toutes les droites tombant sur elle à partir d'un point parmi ceux intérieurs à la figure sont égales entre elles.*
- *Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan et étant prolongées indéfiniment de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.*

Exemples de Postulats :

- *Tracer une ligne droite d'un point quelconque vers un point quelconque.*
- *Produire par continuité une droite finie dans une droite.*
- *Décrire un cercle d'un point quelconque et avec une distance quelconque.*
- *Que tous les angles droits sont égaux.*
- *Que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

Exemples de Notions Communes :

- *Les choses qui sont égales à une même chose sont égales entre elles.*
- $a=b$ et $c=d \Rightarrow a+c = b+d$.
- $a=b$ et $c=d \Rightarrow a-c = b-d$.
- *Les choses qui coïncident entre elles sont égales entre elles.*
- *Le tout est plus grand que la partie.*

Ensuite viennent 48 propositions :

- 1 à 26 : sur les propriétés des triangles.
- De 27 à 32 : théorie des parallèles et la somme des angles d'un triangle est deux droits.
- De 33 à 48 : parallélogrammes, angles, carrés.

Livre II : Il comprend 2 définitions et 14 propositions.

Livre III : Il contient 11 définitions relatives au cercle et 37 propositions sur le cercle.

Exemples de définitions :

- *Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux ou dont les rayons sont égaux.*
- *Une droite touche un cercle si, rencontrant le cercle et étant prolongée, elle ne le coupe point.*
- *Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et une circonférence de cercle.*
- *L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et une circonférence de cercle.*
- *Un secteur de cercle est une figure qui, lorsqu'un angle est construit au centre du cercle, est comprise par les droites qui comprennent l'angle et par la circonférence qu'elles embrassent.*

Livre IV : Il comporte 7 définitions de figures polygonales inscrites ou circonscrites et 16 propositions. (selon Hippocrate De Chio)

Livre V : 18 définitions sur la théorie des proportions d'Eudoxe, et 25 propositions.

Exemple de définitions :

- *Les grandeurs qui ont le même rapport sont dites proportionnelles.*

Livre VI : C'est une application des théories du livre V à la géométrie plane. Il y a 4 définitions et 33 propositions, reliées entre autres aux triangles semblables.

Les **livres VII, VIII, et IX** sont consacrés à la théorie des nombres.

Livre X : Le plus volumineux, il comporte 4 définitions sur les grandeurs commensurables et incommensurables et 115 propositions sur les racines carrées.

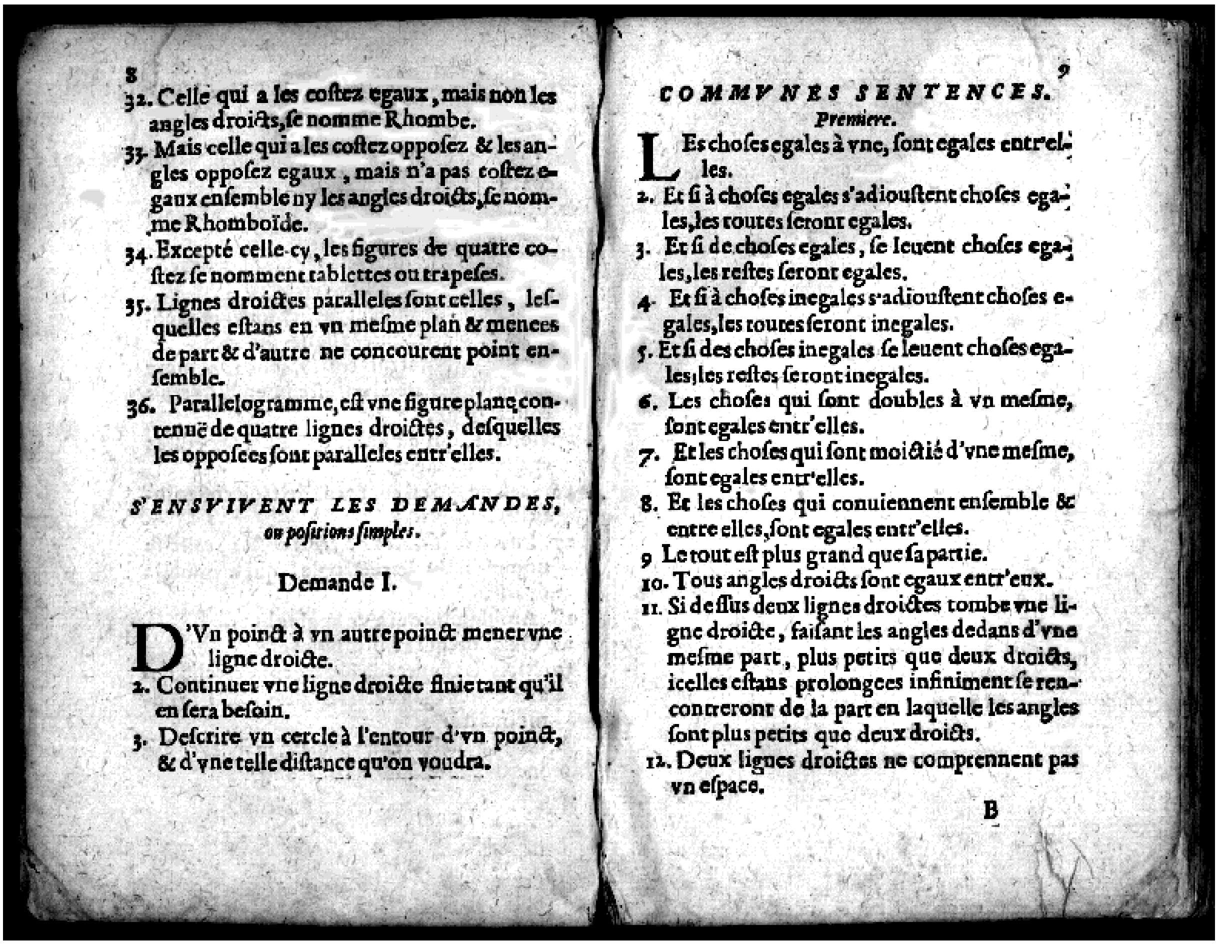
Les **livres XI, XII et XIII** sont consacrés à la géométrie à trois dimensions.

Livre XI : il comporte 28 définitions et 3 propositions sur les plans, les angles solides, les solides connus (pyramide, cylindre, cube, cône, dodécaèdre,…).

Livre XII : il comporte 18 propositions sur la mesure des figures avec la méthode d'exhaustion.

Livre XIII : il comporte 18 propositions sur les polyèdres réguliers.

Les livres XIV et XV sur les polyèdres réguliers peuvent ne pas être écrits par Euclide.
Finalement, le but des Eléments est de déduire 465 propositions à partir des 4 axiomes et des 5 postulats énoncés au livre I.
L'ordre utilisé va du simple et du connu au plus complexe et à l'inconnu. Il y a malgré tout matière à critiquer.
Le *V*ème *postulat* a donné lieu à de nombreux travaux, les définitions préliminaires ne sont pas très claires.
Et pourtant, cet ouvrage reste vénéré. Il a été comparé à la Bible. C'était le livre sacré de mathématiques et ce jusqu'au XIX ème siècle où l'on a commencé à parler de géométries non euclidiennes, prolongement logique des Eléments.



8

32. Celle qui a les costez egaux, mais non les angles droicts, se nomme Rhombe.

33. Mais celle qui a les costez opposez & les angles opposez egaux, mais n'a pas costez egaux ensemble ny les angles droicts, se nomme Rhomboïde.

34. Excepté celle-cy, les figures de quatre costez se nomment tablettes ou trapeses.

35. Lignes droictes paralleles sont celles, lesquelles estans en vn mesme plan & menees de part & d'autre ne concourent point ensemble.

36. Parallelogramme, est vne figure plane contenuë de quatre lignes droictes, desquelles les opposees sont paralleles entr'elles.

S'ENSVIVENT LES DEMANDES, *ou positions simples.*

Demande I.

D'Vn poinct à vn autre poinct mener vne ligne droicte.

2. Continuer vne ligne droicte finie tant qu'il en sera besoin.

3. Descrire vn cercle à l'entour d'vn poinct, & d'vne telle distance qu'on voudra.

9

COMMVNES SENTENCES.

Premiere.

Les choses egales à vne, sont egales entr'elles.

2. Et si à choses egales s'adioustent choses egales, les toutes seront egales.

3. Et si de choses egales, se leuent choses egales, les restes seront egales.

4. Et si à choses inegales s'adioustent choses egales, les toutes seront inegales.

5. Et si des choses inegales se leuent choses egales, les restes seront inegales.

6. Les choses qui sont doubles à vn mesme, sont egales entr'elles.

7. Et les choses qui sont moictié d'vne mesme, sont egales entr'elles.

8. Et les choses qui conuiennent ensemble & entre elles, sont egales entr'elles.

9 Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous angles droicts sont egaux entr'eux.

11. Si dessus deux lignes droictes tombe vne ligne droicte, faisant les angles dedans d'vne mesme part, plus petits que deux droicts, icelles estans prolongees infiniment se rencontreront de la part en laquelle les angles sont plus petits que deux droicts.

12. Deux lignes droictes ne comprennent pas vn espace.

B

Edition par Errard (1629)

Autres ouvrages d'Euclide :
Les Données comprennent 15 données et 95 propositions sur des règles algébriques ou des formules pour des équations quadratiques et linéaires.
Exemple : si A et le rapport A/B sont déterminés, alors B est déterminé.
La Division des Figures comprend 36 propositions sur la division des figures planes. Par exemple, construire une droite parallèle à la base d'un triangle et qui sépare le triangle en deux parties égales.
Les Phénomènes appliquent les mathématiques à l'astronomie élémentaire et l'Optique à la perspective.
Euclide influença ainsi pendant plusieurs siècles les mathématiciens.

g) ***Archimède et l'école d'Alexandrie :***

Archimède : (287 – 212 av J.C) :

Fils d'un astronome de Syracuse, il entretenait des liens amicaux avec le roi Hiéron de Syracuse. Il a été à l'école d'Euclide. Il est mort lors du siège de Syracuse par les romains dirigés par Marcellus, tué par un soldat romain qui ne l'avait pas reconnu.
D'ailleurs le siège a duré à cause de lui parce qu'à chaque fois il inventait des catapultes, des perches mobiles, …, pour résister à l'ennemi.
Légendes : On raconte que le roi Hiéron a soupçonné un orfèvre d'avoir remplacé l'or par de l'argent sur sa couronne et a demandé à Archimède de le vérifier sans abîmer la couronne. C'est ainsi qu'Archimède découvrit la première loi de l'hydrostatique, en étant dans sa

baignoire à réfléchir sur le problème de la couronne et il a prononcé le mot célèbre « *Eurêka* » en courant tout nu dans la rue.
Une autre fois, il étudiait les leviers et avait dit : « *donnez-moi un point d'appui, je soulèverai le monde* ».
Ses serviteurs devaient lui rappeler de manger et boire car il travaillait trop.
On a gravé, à sa demande, sur sa tombe, une sphère inscrite dans un cylindre, en souvenir de sa découverte sur le rapport de ces deux figures.

Archimède, très simple et modeste, a quand même écrit dix ouvrages :

- Le <u>Premier Livre des Equilibres</u> sur les centres de gravité des parallélogrammes et des triangles.
- La <u>Quadrature de la parabole</u>.
- Le <u>Deuxième livre des Equilibres</u> sur les centres de gravité des segments de parabole.
- <u>Sur la sphère et le cylindre I et II</u>.

<u>Exemples de résultats :</u>

> - La surface d'une sphère est 4 fois celle du grand cercle.
> - Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec une hauteur égale au diamètre de la sphère, alors le volume et la surface du cylindre sont une fois et demi le volume et la surface de la sphère.

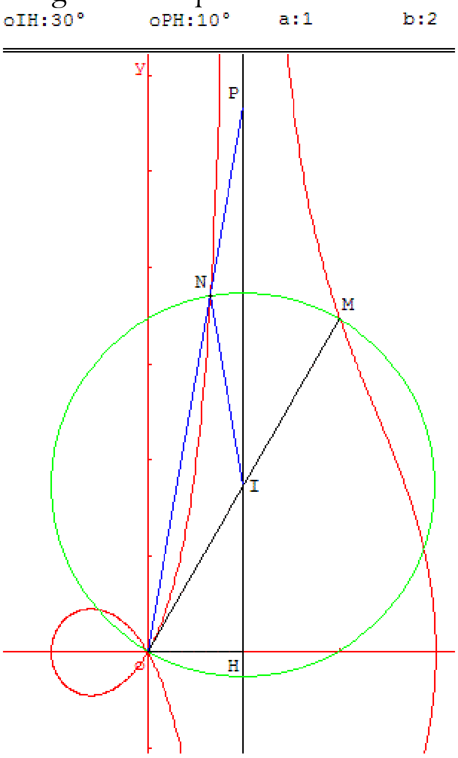
- <u>Sur les Spirales</u> (f= r θ)
- <u>Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes</u> : traite les volumes des ellipsoïdes, paraboloïdes et hyperboloïdes.
- <u>Sur la Mesure du Cercle</u> : exemple de résultat : le cercle est égal aux 11/14 du carré circonscrit si la circonférence a pour longueur 3 fois le diamètre plus un septième.
- <u>L'Arénaire :</u> système de numération des grands nombres (il veut écrire un nombre supérieur au nombre de grains de sable pour remplir tout l'univers et il a trouvé 10^{51}).
- <u>Des Corps Flottants I et II</u> : principe d'Archimède.
- <u>Le traité de la Méthode</u> : comment il fait sa recherche. Il procède par analogie.

h) ***Eratosthène : (vers 276 – 194 av J.C) :***

Mathématicien de talent, génie universel comme poète, historien, géographe, astronome et athlète, il est né à Cyrène, a vécu à Athènes et s'est fait invité par Ptolémée III d'Egypte auprès duquel il était précepteur de son fils et bibliothécaire à l'université d'Alexandrie.
Il a fait des évaluations du périmètre de la Terre (246620 stades, 1 stade = 1/10 du mile), des travaux de chronologie.
En théorie des nombres, il est connu pour son « **crible** » : extraire les nombres premiers à partir d'une suite illimitée de nombres impairs. On extrait 3 et on raye tous les multiples de 3, on extrait 5 et on raye les multiples de 5 etc., d'où l'obtention de nombres premiers.

i) ***Nicomède :***

Géomètre, on lui doit une courbe, la *conchoïde*, dont l'utilisation sert à résoudre la trisection d'un angle et la duplication d'un cube.



j) ***Apollonius de Perga : (vers 262 -200 av J.C) :***

Il séjourne longtemps à Alexandrie ensuite part à Pergame (Asie Mineure) où une université et une bibliothèque venaient d'être fondées. Il retourne à Alexandrie à la fin de sa vie.

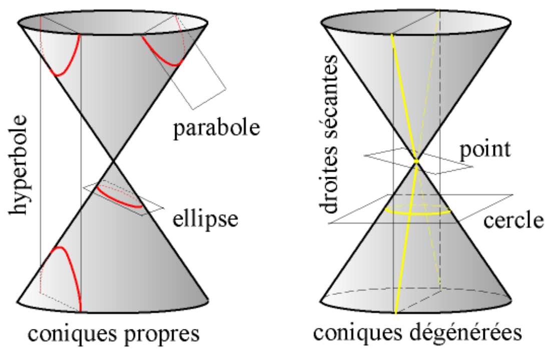
Astronome de talent, sa renommée provient essentiellement de ses **Sections Coniques** : on y voit presque de la géométrie analytique.
Ce traité se divise en huit livres contenant 400 propositions. Ses contemporains l'appelaient le *grand géomètre.*
Les 4 premiers livres, les seuls à nous parvenir comme textes grecs non traduits, représentent l'ensemble de la théorie des coniques avec des généralisations.
Les 4 derniers livres renferment des recherches originales. Le cinquième traite des normales aux coniques et détermine leur enveloppe. Le sixième considère la congruence et la similitude des coniques. Le septième contient des théorèmes de limitations englobant des diamètres conjugués. Le huitième, non connu sauf par son introduction, traite des problèmes comportant un nombre fini de solutions déterminées sur les coniques.
Il est le premier à montrer que les propriétés des coniques sont les mêmes en utilisant des cônes obliques ou droits.

SO est l'axe du cône oblique (scalène).
ASB un triangle.
DC la base d'une section à angle droit avec AB.

FE est l'axe de la section, GG' une corde de la section parallèle à CD qui coupe l'axe EF en M.
Alors M est le milieu de GG'.
Si c'est un cône droit ou si le plan de la section fait un angle droit avec la base du cône, GG' est perpendiculaire à EF.

a) Si FE est parallèle à AS on a une parabole.
b) Si FE coupe SA et SB, on a une ellipse.
c) Si FE coupe SA et SB au-delà de S, on a une hyperbole.

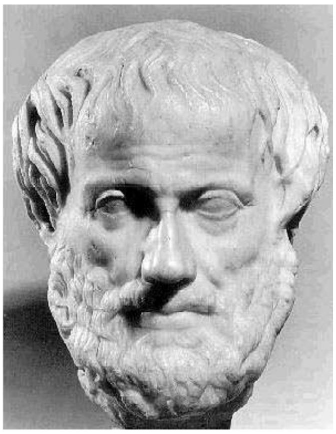
Les Coniques d'Apollonius est un traité très dense et difficilement assimilable. Il aura autant de succès que les Eléments d'Euclide.



C'est avec Apollonius que prit fin l'âge d'or des mathématiques grecques. En effet, à la fin de sa vie, Ptolémée IV prit le pouvoir et entraîna Alexandrie vers la décadence (il tua sa mère, son frère et ses amis).
Pourtant, l'Université d'Alexandrie a encore connu quelques noms célèbres.

- **<u>Aristarque de Samos (vers 310-230 av J.C) :</u>**

Il a été le premier à énoncer que *la Terre et les planètes tournent autour du soleil*, devançant Copernic de 17 siècles. Il a établi des rapports trigonométriques, par exemple la distance entre le Soleil et la Terre est 18 fois plus grande que la distance de la Lune à la Terre.



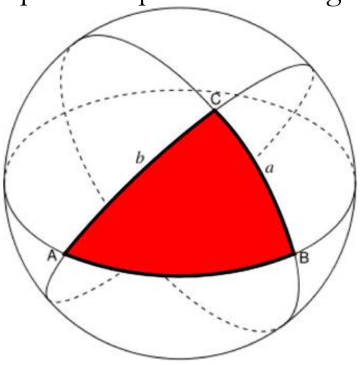
- **<u>Hipparque de Nicée (vers 180- 125 av J.C) :</u>**

Appelé le père de l'astronomie, il a écrit un traité introuvable de 12 livres sur le calcul des cordes dans un cercle. Il est le *fondateur de la trigonométrie.*
Il semble avoir été le premier à avoir créé l'astrolabe et la projection stéréographique.

Pendant ce temps, la société se dégradait (corruptions, meurtres). Cléopâtre, aidée de César, a vaincu son frère. Elle a reconstruit la bibliothèque, le Musée et l'université d'Alexandrie et l'Egypte est devenue une province romaine.

❖ Menelaüs d'Alexandrie (100 après J.C) :

Membre de l'université puis astronome à Rome, il a écrit 6 livres disparus sur les cordes dans un cercle. Il semble avoir été le premier à définir **le triangle sphérique**. Son ouvrage Sphoerica porte sur les figures sphériques.



Le théorème de Menelaüs (le produit de trois rapports de segments consécutifs des côtés d'un triangle plan construit par toute ligne transversale égale l'unité) va servir pour mieux comprendre la trigonométrie sphérique.
Soit ABC un triangle et D un point de la droite AC. Une droite passant par D coupe BC en E et BA en F
G, H, I sont les projections orthogonales respectives de A, B et C sur DF.

$(AD/CD) \times (CE/EB) \times (BF/FA) = 1$ ou encore $AD \times CE \times BF = CD \times BE \times AF$.

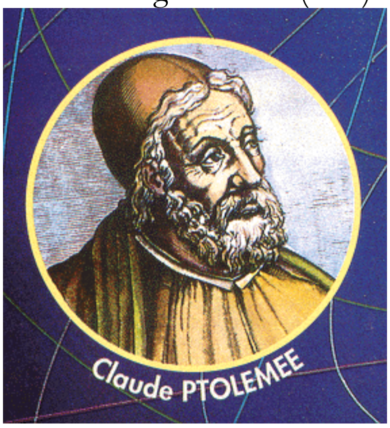
Pour un triangle sphérique, on aura :
$\sin AD \times \sin CE \times \sin BF = \sin CD \times \sin BE \times \sin AF$.

❖ Ptolémée Claude (vers 85-165 après J.C) :

Sans aucun lien avec la dynastie, membre de l'université d'Alexandrie, il composa un ouvrage en 13 livres appelé l'Almageste (de mageste, le plus grand) qui a joué en astronomie le même rôle que les Eléments d'Euclide en géométrie.
Les fondements mathématiques se trouvent dans le livre I et durant tout le Moyen Age, on n'en a pas amélioré le contenu trigonométrique.
Ptolémée a divisé le cercle en 360° et a donné :

$\pi = 3 + (8/60) + (30/60^2) = 3{,}14166$.

Il est à l'origine de $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et pour $\cos(a+b)$ aussi.



Les conquérants romains s'intéressent très peu aux sciences et plus aux philosophes, danseurs, acteurs, ce qui accéléra le déclin de la science grecque.

❖ **Héron d'Alexandrie (vers 75-150 après J.C) :**

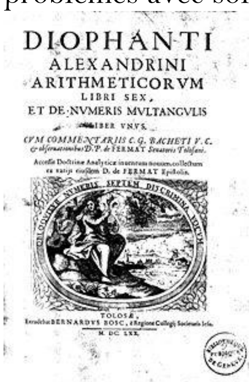
Il a des travaux de nature géométrique et des travaux sur les appareils mécaniques ingénieux.

La tendance est donc à l'application des mathématiques.

❖ **Diophante d'Alexandrie (vers 150 après J.C) :**

Il fut l'objet d'un casse-tête algébrique du V ou VIème siècle : « *Passant, c'est ici le tombeau de Diophante; c'est lui qui, par cette étonnante disposition t'apprend le nombre d'années qu'il a vécu. Sa jeunesse en a occupé la sixième partie ; puis sa joue se construit d'un premier duvet pendant la douzième. Il passera encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et cinq ans après, il eut un bel enfant qui, après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, périt d'une mort malheureuse. Son père fut obligé de lui survivre, en le pleurant pendant quatre années. De tout ceci, déduis son âge* ». (84ans).

Son ouvrage, Arithmétique, en 13 volumes dont 6 nous sont parvenus, comprend 189 problèmes avec solutions (d'où les équations diophantiennes).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
TOLOSÆ,
M. DC. LXX.

❖ **Pappus d'Alexandrie (IIIème – IVème siècle) :**

Il a écrit une *Collection Mathématique* de 8 livres, témoin des mathématiques grecques (Euclide, Archimède, Apollonius, Ptolémée).

Les livres I et II sont perdus. Le livre III traite des inégalités du triangle. Le livre IV fournit une extension du théorème de Pythagore. Le livre V parle des travaux de Zénodore sur l'isopérimétrie (comparaison d'aires de figures), mathématiques utilisées par les abeilles dans la construction des cellules de miel.

Le livre VI porte sur l'astronomie de Ptolémée.

Le livre VII parle des Données, Porismes et Lieux à la surface d'Euclide, des sections coniques d'Apollonius et sur les médiétés d'Eratosthène.

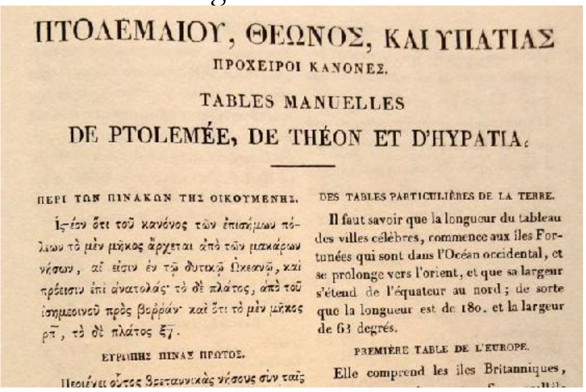
Le livre VIII est consacré à la mécanique.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Les Commentateurs :
Le déclin se ressent puisqu'on se contente de commenter.

❖ **Théon d'Alexandrie (vers 365) :**

Il commente l'Almageste de Ptolémée.



ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ, ΘΕΩΝΟΣ, ΚΑΙ ΥΠΑΤΙΑΣ
ΠΡΟΧΕΙΡΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ.

TABLES MANUELLES
DE PTOLEMÉE, DE THÉON ET D'HYPATIA.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΗΣ ΟΙΚΟΥΜΕΝΗΣ.

Ἰστέον ὅτι τοῦ κανόνος τῶν ἐπισήμων πόλεων τὸ μὲν μῆκος ἄρχεται ἀπὸ τῶν μακάρων νήσων, αἵ εἰσιν ἐν τῷ δυτικῷ Ὠκεανῷ, καὶ πρόεισιν ἐπὶ ἀνατολάς· τὸ δὲ πλάτος, ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς βορρᾶν· καὶ ὅτι τὸ μὲν μῆκος ρπ̄, τὸ δὲ πλάτος ξγ̄.

ΕΥΡΩΠΗΣ ΠΙΝΑΞ ΠΡΩΤΟΣ.

Περιέχει οὗτος Βρεταννικὰς νήσους σὺν ταῖς

DES TABLES PARTICULIÈRES DE LA TERRE.

Il faut savoir que la longueur du tableau des villes célèbres, commence aux îles Fortunées qui sont dans l'Océan occidental, et se prolonge vers l'orient, et que sa largeur s'étend de l'équateur au nord ; de sorte que la longueur est de 180. et la largeur de 63 degrés.

PREMIÈRE TABLE DE L'EUROPE.

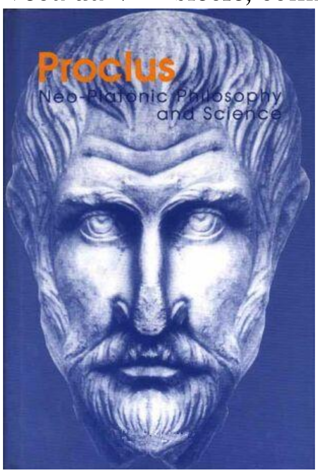
Elle comprend les îles Britanniques,

❖ **Hypatie : fille de Théon (la première mathématicienne connue ?) :**

Elle brille en mathématiques, en médecine et philosophie. Elle a commenté l'Arithmétique de Diophante et les Sections Coniques d'Apollonius .
Elle refusa la religion chrétienne et fut décapitée et coupée en morceaux répandus dans les rues d'Alexandrie.

❖ .**Proclus :**

Il a vécu au V^{ème} siècle, commentateur des Eléments d'Euclide.



L'école d'Athènes forme ses portes dès 529.

Chapitre III : Les civilisations chinoise et hindoue.

Il y a malheureusement très peu de documents avant le III^{ème} siècle avant J.C., mais ces civilisations sont probablement plus anciennes que celle des pharaons.

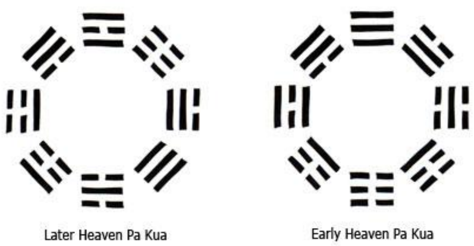
1) La civilisation chinoise :

Au III^{ème} millénaire avant J.C, du temps du premier empereur FOU-HI , on a effectué de nombreuses observations astronomiques.

Le I King :

Confucius a écrit les *Cinq Canons* et parmi eux se trouve le I King (livre des permutations ou changements).

La structure de ce livre est constituée du PA KUA (trigramme formé de combinaisons variées de lignes droites).



Une ligne continue symbolise le principe mâle (yang-hsio) et une ligne en 2 parties le principe femelle ou principe négatif (ying-hsio)

Les 8 trigrammes indiquent les 8 directions célestes.

Si on attribue au ying la valeur 0 et au yang la valeur 1 et en partant du bas, on a 000, 001, 010, 011, 111, 110, 101, 100 et suivant le sens des aguilles d'une montre ; c'est peut-être des symboles numériques.
On retrouve le PA KUA sur les compas utilisés par les devins de chaque ville, sur des talismans du Tibet,….
En plus, le I- King contient des carrés magiques dont le plus ancien a la forme suivante (des nœuds sur des cordes)

Il semble que l'empereur de l'époque (vers 2200 av J.C) a vu cette configuration sur la carapace d'une tortue.

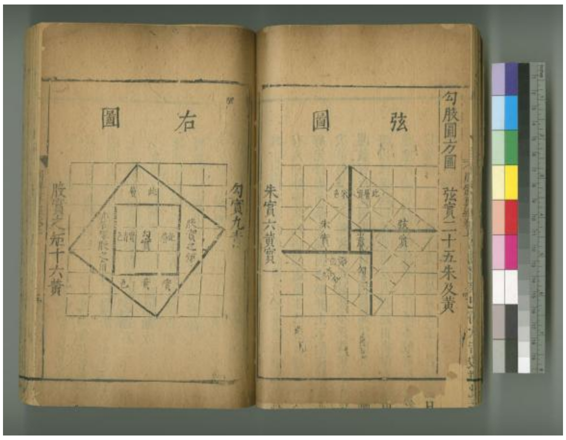
Systèmes de numération :

Il y avait deux notations : une de type multiplicatif à base 10, et une positionnelle.

Principales œuvres :

Ce qu'on appelle communément les *dix Classiques de Calcul* désigne des manuels de mathématiques compilés officiellement sous la dynastie des Tang vers 750 après J.C.

Le Zhoubi suanjing : est un traité sur l'histoire de l'astronomie chinoise avec des observations et des calculs. On y trouve l'équivalent du théorème de Pythagore mais obtenu par puzzle.



On obtient $c^2 = (b-a)^2 + ab/2$.

Et $(b+a)^2 = (b-a)^2 + 4ab$.

<u>Le Jiuzhang suanshu :</u> ou *les neufs chapitres (ou les neuf sections) sur l'art du calcul* est une bible mathématique mais sans démonstrations. C'est un manuel d'enseignement : on y trouve 246 problèmes avec énoncé, réponse numérique et règle toute faite : calcul d'aires planes, curvilignes, problèmes sur les fractions, troc de marchandises avec règle de 3, partages proportionnels, détermination du côté d'un carré à partir de son aire, de la circonférence d'un cercle à partir de son aire, donc extraction de racines, évaluation de volumes, transport de marchandises, règle de fausse position double (en donnant une valeur arbitraire, on trouve qu'une certaine quantité est trop ou pas assez, alors on recommence), théorème de Pythagore, résolution des systèmes linéaires à n inconnues avec $n \leq 6$ et même la méthode de Gauss.

	gauche	milieu	droit												
Céréales sup	1	2	3		1	6	3		1		3				3
Céréales moy	2	3	2	⟶	2	9	2	⟶	2	5	2	⟶		5	2
Céréales inf	3	1	1		3	3	1		3	1	1		36	1	1
Graines	26	34	39		26	102	39		26	24	39		99	24	19

et $z=99/36$

3 bottes de céréales de qualité supérieure, 2 bottes de céréales de qualité moyenne et une botte de céréales de quantité inférieure donnent 34 dou de graines (c'est-à-dire $3x+2y+z=39$).

<u>Le Haidao Suanjing :</u> ou *classique de calcul de l'île océanique* (3ème siècle), traite de la détermination des points inaccessibles, comme la hauteur d'un sapin, la profondeur d'un ravin, la hauteur d'une tour, la largeur de l'embouchure d'un fleuve, la profondeur d'un abîme, les dimensions d'une ville vue de loin.
Le texte ne contient que de formules brutes.

<u>Le Sunzi Suanjing :</u> ou *classique de calcul de Sunzi*, est un manuel d'arithmétique relatif à la manière d'effectuer des multiplications et des divisions en manipulant des baguettes et une table de multiplication à un chiffre.

<u>Le Zhang Qiujian Suanjing</u>, ou *classique de calcul de Zhang Qiujian*, parle du ppcm, de progressions arithmétiques.

<u>Le Wucao Suanjing :</u> est destiné aux arpenteurs, à la gestion des troupes. On y calcule la superficie de champs en forme de serpent.

Le Qigu Suanjing : ou *classique de calcul continuateur des anciennes méthodes*, débute par un problème de poursuite d'un lièvre par un chien, ensuite la construction d'une tour d'observation astronomique, l'édification d'une digue. Ensuite viennent six problèmes de résolution de triangles rectangles (c'est-à-dire des équations bicarrées ou du troisième degré).

Le Shushu Jigi : ou *mémoires sur l'art arithmético- numérologique*, parle de l'écriture des nombres en fonction de divers systèmes de numération (d'origine indienne).

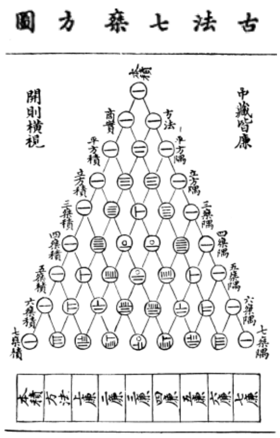
Quelques Mathématiciens Chinois :

Au III^ième^ siècle, **Liou Houi**, commentateur des Neuf Sections, a trouvé une approximation de **π** égale à 3,14159.

Vers la fin du IV^ième^ siècle, **Tsu Ch'ung-Chih** (430-501) et son fils donnent la valeur **π** = 3,1415927 comme borne supérieure et 3,1415926 comme borne inférieure.

Ensuite il faut attendre le XIII^ième^ siècle pour connaître d'autres mathématiciens.

Chou Chi-Kié (1280-1303) a écrit « *Miroirs précieux des quatre éléments* » sur l'algèbre. On y trouve le « triangle de Pascal » bien avant Pascal.



On a aussi, par exemple, le résultat suivant :

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$$

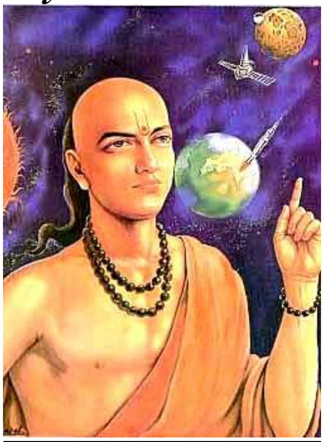
2) La civilisation de l'Inde :

L'Inde a été tellement de fois envahie qu'il a fallu attendre la chute de l'empire Romain au V$^{\text{ième}}$ siècle pour y voir une activité écrite.

Les Sulvasutras :
Ce sont les règles des cordes ou la science de construction des temples et autels (Sulva = corde, Sutra = règle).
C'est écrit en vers : construction d'angle droit, théorème de Pythagore, construction d'un carré dont l'aire égale celle d'un rectangle donné, d'un carré égal à la différence de deux carrés.

Les Siddhantas :
Systèmes astronomiques (IV$^{\text{ième}}$ siècle) ; on y trouve de la trigonométrie, notamment la notion de sinus.

Aryabhata :



Il a écrit en 499 un ouvrage consacré entièrement aux mathématiques (écrit en vers). On y trouve les règles de calcul usuelles en astronomie et dans les mathématiques, de la mesure (certaines règles de calcul sont fausses).
La deuxième partie de l'ouvrage est consacrée à la mesure du temps et à la trigonométrie sphérique.
Vers le IX$^{\text{ième}}$ siècle, les astronomes hindous ont substitué des noms aux nombres :

1= Lune
2= Yeux
3= Feu ou Frère
…..

car ils écrivent en vers.
212 = Yeux Lune Ailes , 0= trou.
Cela permet de mémoriser une table de sinus.

Brahmagupta :

Mathématicien hindou du VII^{ième} siècle, il a écrit un ouvrage d'astronomie, le *système révisé de Brahma.* On y trouve des erreurs mais on a les solutions générales des équations quadratiques avec des racines positives et négatives, l'arithmétique des nombres négatifs et du zéro, la solution générale des équations linéaires diophantiennes $ax+by=c$ avec a, b et c entiers.

Bhaskara :

Mathématicien du XII^{ième} siècle, il a compilé des problèmes de Brahmagupta et d'autres dans un ouvrage du nom de sa fille. Dans un autre ouvrage, il énonce qu'un nombre différent de zéro divisé par zéro donne un quotient infini. Il a corrigé Brahmagupta.

Donc les mathématiques hindoues, faites par des prêtres, fournissent un développement de calcul numérique et algébrique, une trigonométrie basée sur le sinus, mais une géométrie pauvre.
Leur apport a surtout été le système de numération brahmi, ancêtre de notre système décimal.

Chapitre IV : Les Mathématiques Arabes.

1. Introduction :

Le noyau central où apparut l'Islam est la péninsule arabique (Arabie) et le Croissant Fertile (ancienne Syrie, Palestine et Irak).
Avant l'Islam, deux puissances dominaient la région : l'Empire Byzantin et l'Empire Perse. Le premier pratiquait le christianisme orthodoxe comme religion officielle, le second le mazdéisme comme religion dominante (fondé par Zarathoustra sur deux principes en opposition : le bien et le mal), le sabéen (adoration des étoiles) et d'autres religions polythéistes.
L'Arabie était peuplée de tribus embrassant toutes ces religions et comptait Médine et La Mecque comme villes commerçantes.
Mohammed le prophète (Que la Paix soit sur Lui) est né vers 570. Orphelin très tôt, il a été élevé par un de ses oncles, au sein de la tribu des Quraysh (Requins). Chef de caravane chez une dame riche, Khadidja, il l'épousa .
Il côtoyait des juifs, des chrétiens et des païens adorant des idoles dont al-Lãt, Manãt et al-^{c}Uzzã.
En 610, descendirent les premiers versets du Coran. Le prophète s'est entouré de compagnons dont certains ont dû s'exiler en Ethiopie, pays chrétien.
En 622, persécuté, le prophète quitte la Mecque pour Médine : c'est l'Hégire (l'exil), début du calendrier musulman.
A Médine, il édifie un Etat. Revenu en vainqueur en 630 à la Mecque, il y meurt en 632. Pendant la période 622-632, les versets médinois et le comportement du prophète, ses pratiques, ses dires et ses silences (corpus du Hadith), vont être les principes fondamentaux du fonctionnement de l'Etat. S'y ajoutent des éléments venant des coutumes et des habitudes en héritage (par exemple, le Mouloud, fêté bien après la mort du prophète, rappelle la fête de la naissances du Christ).
L'Etat islamique ainsi constitué accepte plusieurs confessions, même au sein du pouvoir (par exemple, des Secrétaires d'Etat comme Ibn Toufil, chrétiens, des ministres juifs). Mais le roi ou Calife (successeur du prophète) doit être musulman. Après la mort du prophète, la lutte pour le pouvoir intervient entre ses compagnons. Les quatre premiers Califes, **Abu Bakr** (632-634), **^{c}Umar** (634-644), **^{c}Uthman** (644-656), **^{c}Ali** (656-661), appelés les bien guidés, étaient parmi les plus proches du prophète (les deux derniers étaient ses gendres). Les trois derniers moururent assassinés. Le Calife avait les mêmes pouvoirs que le prophète : chef religieux, chef politique et chef des armées.
Après l'Arabie, l'Etat s'agrandit avec la Syrie en 634, l'Egypte en 642, le Maghreb en 647, Chypre en 649, la Perse en 651, la Péninsule Ibérique en 711.
L'Islam n'imposait rien dans le domaine culturel pour les non musulmans, d'où l'adhésion des peuples. Il n'y a pas eu de stratégie de destruction. La bibliothèque d'Alexandrie n'existait plus en tant que telle quand les arabes sont venus en Egypte. Il n'y a pas eu de conversion forcée mais certaines religions ont été marginalisées.
La science avait une place de choix, déjà dans le Coran (le mot « *science* » y est cité plus de 400 fois). On peut par exemple se référer aux versets :

- « *Dieu placera sur des degrés élevés ceux d'entre vous qui croient et ceux qui auront reçu la science* » (LVIII, 11)

- « *Seigneur, accordes moi plus de science* » (XX, 114)

  Le prophète était aussi en faveur des sciences et des savants :
- « *Cherchez la science, même en Chine* » (authenticité non garantie)
- « *La quête de la science est un devoir pour tout musulman* »

Le fait que l'activité critique s'est développée pour regrouper les versets du Coran en un seul Livre Sacré au temps du Calife ^{c}Uthman, pour authentifier le contenu du Hadith, la recherche pour asseoir les principes de la langue arabe, l'influence des œuvres philosophiques grecques, tout cela a favorisé le développement d'un esprit rationnel. D'autre part, des demandes concrètes vont accélérer le développement des mathématiques :

- les problèmes d'héritage, déjà connus avant l'avènement de l'Islam, vont favoriser le développement des calculs de fractions, jusqu'à résoudre des équations du second degré.
- le problème de la connaissance de la direction de la Mecque pour prier va développer l'astronomie, d'autant plus qu'au début, on avait affaire à trois qiblas comme, par exemple au Caire : les mosquées du quartier d'al-Qahira sont orientées selon la qibla des compagnons du prophète (27° sud-est), la mosquée des Mamelouks selon la qibla des astronomes (37° sud-est), celle d'al-Qarãfa est orientée plein sud (orientation de la qibla du prophète quand il était à Médine -située au nord de la Mecque-) et il a fallu attendre le IX^{ème} siècle pour avoir un calcul de la direction de la Qibla en tout point de la terre.

Les sciences arabes (VIII^{ème}- XIX^{ème} siècles) étaient divisées de la manière suivante :

1) les sciences de transmission

- *Sciences religieuses* (lecture coranique, sciences du Hadith, fondements du droit, théologie, mystique soufi).
- *Géographie* (géographie descriptive, cartographie, relations de voyages).
- *Sciences de la langue* (linguistique, grammaire, métrique, lexicographie, littérature).
- *Sciences historiques* (généalogies, chronologies, biobibliographie, chroniques, analyse historique).

2) Les sciences rationnelles

- *Sciences physiques* : sciences des êtres vivants et des plantes (médecine, sciences vétérinaires, sciences de l'élevage, agronomie, botanique), sciences des instruments (poids spécifiques, moments d'inertie, leviers, miroirs ardents, machines de guerre, mécanique hydraulique), sciences des corps terrestres (pharmacologie, chimie, géologie, météorologie).
- *Philosophie* : logique, fondements des mathématiques, fondements de la physique, métaphysique.
- *Sciences mathématiques* : **sciences numériques** (calcul indien, théorie des nombres, algèbre, analyse combinatoire), **sciences géométriques** (géométrie des figures et des courbes, géométrie de la mesure, constructions géométriques, arpentage, architecture, optique théorique), **astronomie** (science de l'observation, trigonométrie, théories planétaires, instruments astronomiques, science du temps), **musique** (théories musicales, pratiques musicales, instruments musicaux)).

3) Les sciences intermédiaires

- *Science des héritages* (droit, arithmétique, algèbre).
- *Astrologie* (divination, astronomie, arithmétique).
- *Kalãm* (théologie, philosophie).

2. Les mathématiques arabes :

Des auteurs comme al-Farabi, Ibn Sinã et Ibn Khaldoun classent les mathématiques en 4 rubriques :

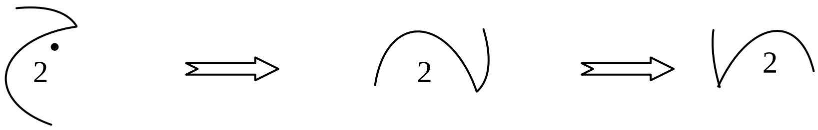
- la science du nombre ;
- la géométrie ou science des grandeurs ;
- l'astronomie ;
- la musique.

On appellera l'ensemble de ces rubriques le *quadrivium* en Europe.
Cette répartition est bien sûr influencée par les mathématiques grecques. Mais des matières nouvelles, inconnues des Grecs, apparaissent : *l'arithmétique indienne* (al-Hisab al-hindi) dans la tradition des Siddhanta, *l'algèbre*, *la trigonométrie* et *l'analyse combinatoire* (ensemble de dénombrements que l'on pourrait réaliser avec un ensemble d'objets).

a) Les disciplines traditionnelles

Il y a eu d'abord une relecture des traités classiques (les Eléments dont le livre X a été arithmétisé et sorti du contexte géométrique dans lequel il était, le livre V a abouti à une extension du concept de nombre avec les travaux d'Al-Khayyam et des techniques d'approximation, le livre de la sphère et du cylindre d'Archimède où certains résultats ont été démontrés par les Arabes).
L'étude des nombres premiers a été menée par **Thabit Ibn Qurra** (m en 901), **Ibn al-Haytham** (m en 1041) et **al-Farisi** (m vers 1320).
La relecture des Arithmétiques de Diophante a suscité des travaux sur la résolution des systèmes d'équations diophantiennes d'**Abu-Kamil** (m en 930) et d'**al-Karaji** (m en 1023) et sur l'étude des nombres congruents, notamment la célèbre conjecture de Fermat dans les cas $n = 3$ et $n = 4$. Il y a enfin l'étude des suites et des sommes finies d'entiers pour la détermination de surfaces et de volumes (méthode d'exhaustion d'Eudoxe- Archimède).
En géométrie, on compte des recherches sur la possibilité de construire des figures planes avec la règle et le compas, sur les propriétés de courbes, sur les problèmes de mesure avec la méthode d'exhaustion.
Le V$^{\text{ème}}$ postulat du livre I des Eléments d'Euclide, propriété des droites non parallèles, a donné lieu à plusieurs travaux (Thabit Ibn Qurra au IX$^{\text{ème}}$ siècle, An Nayrizi au X$^{\text{ème}}$ siècle, Ibn al-Haytham et ^{c}Umar al-Khayyam au XI$^{\text{ème}}$ siècle, Nasir Eddine at-Tusi et Mahyi Eddine al-Maghribi au XIII$^{\text{ème}}$ siècle).
Postulat : si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

En numération, on a eu droit aux *chiffres ghobar* qui étaient de mise au Maghreb et qui ont donné naissance aux chiffres utilisés actuellement.
En arithmétique, les premiers symboles mathématiques ont apparu par l'introduction du symbole racine carrée, de la multiplication par tableaux (ou par grillages ou par jalousies).



b) La naissance de l’Algèbre

La publication du petit traité de **Mohammed Ibn Moussa al-Khawarizmi** intitulé *Abrégé du calcul par la restauration (al-gabr) et la comparaison (al-muqabala)*, dédié au Calife Al-Ma’mun, est l’acte de naissance officiel de l’Algèbre en tant que discipline. On y trouve la résolution des équations du premier et du second degré à une seule inconnue.

Après al-Khawarizmi (IXème siècle), on peut citer les travaux d’**Abu-Kamil** (les coefficients et les racines des polynômes deviennent des réels positifs autres qu’entiers et fractions, extension à des monômes de degré quelconque).

Al-Karaji et **As-Samaw’al** vont développer une algèbre des polynômes. On a une théorie des équations cubiques par **Abu-l-Jud**, **Al-Khayyam** et **Sharaf-Eddine at-Tusi** (m en 1213), une théorie de l’approximation par **Ibn-Lubban** (Xème siècle), **Ibn Mun ᶜim**, **At-Tusi** et **Al-Kashi** (m en 1429).

On trouve une tendance à se libérer de la géométrie chez **Abu-Kamil**, **Al-Karaji** qui propose des preuves algébriques à côté des preuves géométriques, **Sharaf-Eddine At-Tusi** qui raisonne algébriquement et illustre par des figures.

Ibn-al-Banna (m en 1321), au Maghreb, écrit deux ouvrages purement algébriques. C’est dans les ouvrages maghrébins du XIVème et du XVème siècles qu’apparaissent les premiers symboles mathématiques.

Exemple : la méthode de fausse position d’Ibn Qunfudh

On les trouve dans les ouvrages d'**Ibn Qunfudh** (m en 1406), d'**al-Qalasadi** et d'**Ibn Ghazi**.

c) L'analyse combinatoire

Cette branche est née à partie d'activités algébriques et astronomiques, mais surtout à partir de recherches en linguistique, en lexicographie, en grammaire et en poésie.
Dans le livre *Fiqh al-Hisab* (la science du calcul) du maghrébin **Ibn Mun ^{c}im** (XIII$^{\text{ème}}$ siècle) apparaît pour la première fois semble-t-il, un chapitre combinatoire. Cela dénote une longue pratique.
Thabit Ibn Qurra, dans son *Epître sur la figure sécante*, utilise des tableaux pour énumérer et dénombrer différents cas ; **al-Biruni** a dénombré, dans son livre *sur les clés de l'astronomie*, toutes les équations issues d'un triangle sphérique. Dans ces deux cas, on n'a pas encore de formule combinatoire. Il faut attendre **al-Khalil Ibn Ahmed**, le premier linguiste arabe pour avoir les premiers calculs à caractère combinatoire : c'est le dénombrement de toutes les combinaisons des 28 lettres de l'alphabet pour former des mots de 2, 3, 4 ou 5 lettres.
Cette tradition s'est perpétrée et améliorée par les grammairiens **Sibawayh** (m en 796) et **Ibn Jinni**, le lexicographe **Ibn Durayd** (m en 933).
Le mathématicien **Ibn Mun ^{c}im** se réfère à tous ces travaux. Il énonce ainsi les règles (qu'il démontre) qui permettent de dénombrer les mots de n'importe quelle langue, donc les combinaisons de n objets p à p. Pour cela, il établit le fameux triangle arithmétique, longtemps attribué à Pascal puis à Cardan. Il donne les formules sur les permutations de lettres avec ou sans répétition.
Au XIV$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien maghrébin **Ibn-al-Banna** reprend les résultats
d'Ibn Mun ^{c}im et y ajoute une formule arithmétique qui évite les tableaux dans le calcul des combinaisons (redécouverte par Pascal, trois siècles plus tard)

$$C_n^p = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p(p-1)....3.2.1}$$

Plusieurs applications mathématiques et non mathématiques apparaissent : détermination du nombre de prières à effectuer pour compenser celles qui ont été oubliées, calcul du nombre de lectures d'une phrase.

3. Quelques mathématiciens arabes

Parmi les savants, membres de la « *Maison de la Sagesse* », fondée par le calife Al-Ma'mun, figurait l'astronome et mathématicien al-Khawarizmi, dont la célébrité provient avant tout d'un ouvrage sur l'algèbre et de son arithmétique.
A partir du X$^{\text{ème}}$ siècle, certains savants arabes utilisaient des symboles hindous de numération alors que d'autres favorisaient plutôt une traduction arabe de l'alphabet grec. A la fin, le système de numération hindou prévalut et de nombreuses variantes apparaissent çà et là, se modifient peu à peu et le forme utilisée par les musulmans de la partie ouest de l'empire prend le dessus une fois pour toutes. C'est de ces symboles modernisés indo-arabes que provient notre système actuel.
La divergence de vues au sujet du système de numération utilisé parmi les savants de l'Islam se retrouve, par analogie, lorsqu'il s'agit de la trigonométrie. On sait, d'une part, que les Grecs utilisaient une géométrie des cordes comme celle qui est contenue dans l'*Almageste* et que, d'autre part, les Hindous avaient construit des tables de sinus. Encore une fois, les Arabes ont préféré adopter les tables de sinus provenant des mathématiques hindoues et généralement la trigonométrie arabe fut construite sur la base de la fonction sinus. Déjà au

IX^{ème} siècle, al-Khawarizmi utilisait des tables de sinus et de cotangentes, et Thabit Ibn Qurra employait aussi des tables de sinus.
Dans un ouvrage intitulé *Sur le mouvement des étoiles*, **al-Battani** (vers 850-929), connu en Europe sous le nom d'Albatenius, fit un grand usage du sinus et donna une table des tangentes et des cotangentes pour chaque degré de 0° à 90°, des formules trigonométriques telles que
b = a sin (90° - A)/ sin A , dans laquelle les fonctions sinus et sinus de l'angle complémentaire apparaissent et où la loi des cosinus appliquée au triangle sphérique est présentée.

Al-Khawarizmi

Al-Khawarizmi était originaire de Khowarizm, la ville moderne de Khiva, qui fait actuellement partie de l'Uzbekistan. On n'a sur la vie de ce savant aucun renseignement précis. On sait seulement qu'il travailla dans la bibliothèque d'Al-Ma'mun, peu après l'époque où Charlemagne régnait sur l'Occident.

Dans son ouvrage d'arithmétique intitulé en latin *De numero Indrum* (l'origine arabe ne nous est pas parvenue), Al-Khawarizmi présente diverses règles pour le calcul numérique.
Le principal ouvrage d'Al-Khawarizmi est « *hisab al-jabr w'l-muqabala* » qui signifie « *calcul par la restauration (al-jabr) et la comparaison (al-muqabala)* » où le terme « al-jabr » est devenu algèbre, synonyme de la science des équations.
Al-Khawarizmi écrit dans les premières pages et en hommage à Al-Ma'mun, qu'il a été encouragé par son calife à composer un court traité sur le calcul utilisant les règles de complétion et de réduction, le but confiné à ce qui est le plus facile et le plus utilisé dans l'arithmétique.
La première partie du livre s'intitule *opérations de calcul* : on y trouve la définition du système décimal hérité de l'Inde et les objets de l'algèbre, à savoir les *nombres* (entiers et rationnels positifs), *le mal* (le bien) et la *racine du mal* (dite aussi *la chose*) et enfin les six équations canoniques :

$$\begin{array}{rclcrcl} ax & = & b\sqrt{x} & , & ax+b\sqrt{x} & = & c \\ ax & = & c & , & ax+c & = & b\sqrt{x}, \\ b\sqrt{x} & = & c & , & b\sqrt{x}+c & = & ax \end{array}$$

constituées de 3 quantités, à savoir des racines, des carrés et des nombres (a, b, c).
Le terme « al-jabr » correspond à l'opération algébrique qui consiste à faire passer un terme négatif d'un membre à l'autre dans une équation, de telle manière qu'il n'en résulte de part et d'autre que des termes positifs. Par ailleurs, le mot « muqabala » se réfère plutôt à la réduction ou au balancement des équations, donc simplifier l'équation en comparant les termes de la même espèce. Par exemple, l'équation

$$6x^2-6x+4=4x^2-2x+8 \text{ devient :}$$
$$6x^2+4+2x=4x^2+6x+8 \text{ par al-jabr}$$
$$3x^2+2+x=2x^2+3x+4 \text{ par al-hatt}$$
$$x^2=2x+2 \text{ par al-muqabala}$$

[al-hatt représente l'opération qui consiste à diviser les deux membres d'une équation par un même nombre].
Al-Khawarizmi débute son ouvrage par une courte traduction sur le principe de la valeur des nombres, puis procède à la solution de 6 sortes d'équations .
Dans le premier chapitre, il traite du cas de carrés égaux à des racines, ce qui correspond, en notation moderne, à l'équation $ax^2 = bx$. Dans tous les cas traités, la racine nulle ($x = 0$) est écartée. Le deuxième chapitre couvre le cas des carrés égaux à des nombres du type $ax^2 = c$ et le troisième chapitre couvre les équations englobant l'égalité de racines avec les nombres : cas $bx = c$, chaque chapitre contenant 3 illustrations qui correspondent au fait que le coefficient du terme variable peut prendre une valeur plus petite, égale ou plus grande que l'unité. Les 3 autres chapitres traitent respectivement des équations du type $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ et $bx + c = ax^2$.
Dans le chapitre IV, nous trouvons les 3 illustrations suivantes :
$x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 4$ et $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$.
Nous constatons l'inexistence de la racine négative pour chacun des cas présentés dans ce chapitre.
Le chapitre V offre un intérêt particulier, bien qu'il ne présente qu'un seul exemple : $x^2 + 21 = 10x$, car, en plus de fournir les 2 racines positives 3 et 7, obtenues par la formule $x = 5 \pm \sqrt{25 - 21}$, l'auteur attire l'intention sur la quantité sous le radical – ce que nous appelons discriminant – qui doit être positive. Enfin, dans le chapitre VI, le seul exemple utilisé, $3x - 4 = x^2$, est solutionné méticuleusement par la complétion du carré (lorsque le coefficient de x n'est pas égal à un, l'auteur indique alors qu'il faut diviser ce coefficient par lui-même pour le rendre égal à un, avant d'effectuer la complétion du carré), afin d'obtenir la solution $x = 3 + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$, délaissant encore une fois la racine négative.
L'Algèbre d'Al-Khawarizmi comprend, en seconde partie, divers éléments : citons entre autres des règles d'opération concernant des expressions binomiales de la forme (a + b)(a - b), (a + b)(a - c), etc…, des preuves géométriques supplémentaires à certaines équations algébriques traitées dans les premiers chapitres, comment étendre les opérations élémentaires aux objets de l'algèbre et la règle des signes, une variété de problèmes qui illustrent des applications des différentes sortes d'équations (la manière d'algébriser un problème donné afin de le ramener à l'une des six équations), par exemple la résolution de problèmes de transactions commerciales, d'arpentage, et de calcul de donation en héritage.
L'Algèbre d'Al-Khawarizmi est traditionnellement considérée comme le premier ouvrage et le meilleur exposé élémentaire d'algèbre jusqu'à l'avènement des temps modernes et, de ce fait, il a joui d'un privilège analogue à celui des Eléments d'Euclide. En revanche, l'absence d'une notation symbolique adéquate l'a empêché de jouer un rôle vraiment efficace dans l'évolution de l'algèbre et il faudra attendre le XVI^{e} siècle pour voir surgir ce complément indispensable qui, dans les mains de Descartes et de Fermat, permettra de réaliser la fusion de la géométrie et de l'algèbre.

Abu Kamil

Livre des choses rares

Cet algébriste égyptien (il fut surnommé le *calculateur égyptien)* aura autant de renommée qu'Al Khawarizmi et proposera, dans son "*Algèbre"*, livre de la *transposition* (*al jabr*) et de la *réduction* (*al muqabala*), 69 problèmes du premier et du second degré où il manipule brillamment les radicaux (racines carrées) dont la découverte remonte aux Pythagoriciens et y expose la résolution complète de l'équation du second degré de la forme $x^2 + p = qx$ lorsque les solutions sont positives.

Thabit Ibn Qurra

La seconde partie du IX^e siècle a également connu un savant de premier plan en la personne de Thabit Ibn Qurra (836-901, originaire de l'actuelle Turquie), dont la réputation repose sur ses talents de traducteur. Il fonda d'ailleurs une école de traducteurs.

Il était aussi spécialisé en médecine (qu'il exerça à Bagdad) et en astronomie, où il constata et étudia l'instabilité de l'inclinaison de l'écliptique.

Ses travaux portent sur les méthodes infinitésimales par exhaustion, sur l'arithmétique pythagoricienne, dont la source fut principalement le traité d'arithmétique de Nicomaque de Gérase, et sur la géométrie d'Euclide et de Ménélaüs qu'il traduisit (partiellement) en arabe.

Thabit Ibn Qurra connaissait parfaitement le grec et il traduisit également l'Almageste de Ptolémée, les sections coniques d'Apollonius, La sphère et le cylindre d'Archimède, la sphère d'Eutochyus.

Ayant assimilé à fond le contenu mathématique des classiques qu'il traduisit, il suggéra des modifications et même des généralisations. En géométrie, il nous a légué la généralisation du théorème de Pythagore :

Si d'un sommet A d'un triangle ABC, on trace deux droites AD et AE formant avec la base BC les angles respectifs ADB et AED, les deux étant égaux à l'angle BAC, alors la somme des carrés sur les côtés AB et AC est égale au rectangle (BE+CD) multiplié par BC. Si l'angle BAC est obtus, alors E et D seront permutés, donc :

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BC(BD + CE).$$

Thabit ne fait qu'énoncer le théorème sans le démontrer, mais on peut proposer une démonstration basée sur les triangles semblables.

Thabit étudia en particulier les *nombres parfaits* (égaux à la somme de leurs diviseurs propres) et les *nombres amicaux*, dits aussi *amiables* (paire de nombres tels que l'un soit la somme des diviseurs propres de l'autre).

Il énonça le résultat suivant :

« Si a, b et c sont des nombres premiers de la forme a = 3. 2^n - 1, b = 3. 2^{n-1} – 1 et c = 9. 2^{n+1} – 1 alors les nombres a . b . 2^n et c . 2^n sont amicaux ».
Exemple C'est le cas de 220 et 284 .
Cette condition suffisante n'est pas nécessaire car il suffit de considérer les nombres amicaux : 1184 et 1210.

Abou l-Wafa

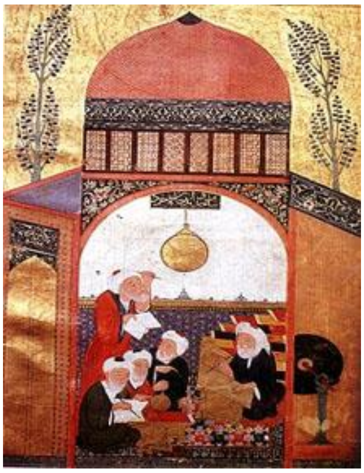
Dans la deuxième moitié du X^ème^ siècle, Abou l-Wafa (940-998), originaire d'une province du nord-est de l'Iran (Perse) et appartenant à une famille de savants, se rendit célèbre en astronomie et en mathématiques.
On lui doit la notion trigonométrique nouvelle de *tangente d'un angle* : mesure du segment [AM] sur un cercle dont le rayon est pris comme unité de mesure des longueurs.
Il systématisa toute la trigonométrie connue en un système déductif dans lequel, par exemple, les théorèmes sur les formules d'angles doubles et de demi-angles sont clairement démontrés. Il énonça la loi des sinus pour les triangles sphériques. Il introduisit l'équivalent de la sécante et de la cosécante et utilisa les six fonctions trigonométriques ainsi que les relations entre elles, mais cette utilisation des six fonctions ne semble pas avoir été propagée durant la période médiévale. Il construisit aussi une nouvelle table des sinus pour des angles différents de 15' chacun et avec une approximation équivalente à huit décimales. Il compléta les tables de Ptolémée en y ajoutant une table des tangentes.
Abou l-Wafa fut aussi intéressé par l'algèbre, car il commenta l'*Algèbre* d'Al-Khawarizmi et traduisit du grec le grand classique de Diophante, l'*Arithmétique*. Il aurait aussi commenté Euclide et Diophante.

Al-Karkhi

Al-Karkhi (vers 1020), a été fortement influencé par Abu-Kamil. Bien qu'il ait suivi la tradition arabe en donnant des preuves géométriques concernant les équations quadratiques, il suit cependant Diophante, sans se limiter – comme al-Khawarizmi – aux équations du second degré. En particulier, on attribue à ce savant les premières solutions numériques aux équations de la forme $ax^{2n} + bx^n = c$ en termes de racines positives seulement. Dans son approche à la résolution de ce type d'équations, il ne fit pas comme Diophante qui ne considérait que des nombres rationnels.

On considère aussi qu'il a été le premier Arabe à donner et prouver des théorèmes de la théorie des nombres portant sur la somme de carrés et de cubes pour les *n* premiers nombres naturels.
Enfin, il fut un des rares mathématiciens arabes à utiliser une algèbre syncopée rudimentaire.

Ibn Al-Banna Al-Marrakuchi



Ibn Al-Banna (1256-1321) a étudié les Eléments d'Euclide, les travaux d'Archimède, les coniques d'Apolonius, l'arithmétique de Nicomaque et ses commentaires d'Al-Kindi, les travaux d'Ibn Mun ^{c}im sur l'analyse combinatoire, les travaux d'Algèbre d'Al-Mou'taman Ibn Houd et d'Abu Kamil.
Il a écrit un traité sur les *fondements et préliminaires de l'algèbre,* un *mémento de formules* (talkhiss), un *commentaire philosophico-mathématique pour*
- *expliciter le contenu scientifique du talkhiss,*
- *commenter sa matière mathématique,*
- *expliquer les fondements.*

On y trouve des démonstrations purement algébriques. La base décimale y est clairement présentée ; l'infini apparaît comme un jugement mais pas un attribut. Ibn Al-Banna recommande de ne plus poursuivre des recherches sur les nombres amiables et les carrés magiques.

Ibn Qunfud Al-Qasantini

Ibn Qunfud (1339-1407) est né à Constantine ; il a étudié, enseigné et publié à Fès. Il a écrit un commentaire du talkhiss d'Ibn Al-Banna qui comprend :
- *huit recommandations pour lire un ouvrage,*
- *une liste des écrits d'Ibn Al-Banna,*
- *un commentaire du talkhiss,*
- *une introduction aux carrés magiques.*

Il a aussi écrit un *commentaire sur l'Algèbre d'Ibn Al-Yassamin,* un *commentaire sur la science des héritages* et un *commentaire sur son commentaire du talkhiss.*

Al-Qalasadi

Al faraid

D'origine berbère, Al-Qalasadi (1412-1486) vécut en Andalousie (à Baza et Grenade, au sud de l'Espagne alors conquise par les Maures) ensuite en Afrique du Nord. Si les travaux de cet algébriste ne sont pas véritablement novateurs (travaux en partie hérités d'Al-Khawarizmi), sa symbolique, usant de lettres pour désigner la racine carrée, l'égalité ou encore l'inconnue dans une équation, prépare les bases de l'Algèbre :

- L'inconnue dans une équation est appelée la chose : شيء (*chaÿ*), ce qui va être traduit par *la cosa* en italien et noté R (du latin *res* = *chose*). Al-Qalasadi utilisait la première lettre de ce mot : ش. Ainsi 12x s'écrivait : ش 12.

- Le carré de l'inconnue est symbolisé par un م, première lettre de *mal* signifiant carré :

  م 6 signifie $6x^2$

- La racine carrée est symbolisée par ج, première lettre du mot arabe جذر signifiant racine (jidr) :

  √7 s'écrit alors : ج 7

- La lettre ل, équivalent à la lettre L, symbolisait notre signe = et une égalité comme

√9 = 3, s'écrit alors, de droite à gauche :

3 ل ج 9

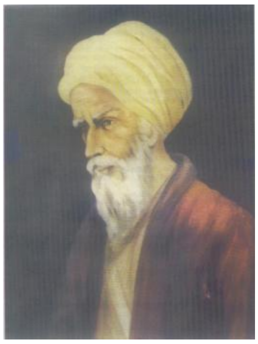
Ibn Sina

Ibn Sina (980-1037), connu en Occident sous le nom d'Avicenne, fut un savant dont les connaissances encyclopédiques s'étendaient à toutes les sciences : toutefois les mathématiques n'ont joué qu'un rôle secondaire dans sa vie. Il traduisit Euclide, expliqua la preuve par neuf et appliqua les mathématiques à la physique et à l'astronomie. Il influença beaucoup la philosophie occidentale du Moyen Age.

Al-Biruni

Al-Biruni (973-1048) est un savant universel, né à Khiva, tout comme al-Khawarizmi. Il fit un séjour en Inde et profita de ce voyage pour écrire un ouvrage considérable intitulé *Ta'rikh al-Hind*. Dans ce livre, il donna une ample description géographique de l'Inde ainsi que des croyances religieuses et des connaissances scientifiques du peuple hindou. Il y décrivit aussi en détail les *Siddhantas* et le principe positionnel de numération.
En géométrie, il démontra d'une façon originale la formule de Héron concernant l'aire d'un triangle. Il démontra aussi la formule de Brahmagubta, $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, relative à l'aire du quadrilatère inscrit et insista sur le fait qu'elle n'est applicable qu'au quadrilatère cyclique. Pour inscrire un nonagone régulier, al-Biruni ramena le problème, par l'usage de la formule trigonométrique relative à cos 3θ, à la résolution de l'équation $x^3 = 1 + 3x$, dont il donna la solution estimée en fractions sexagésimales, comme 11, 52, 15, 17, 13 – équivalente à 1.8798352468 – avec une précision d'au moins six chiffres significatifs. Enfin, il construisit une table de cordes pour tous les multiples de 3° en se basant sur le théorème de la corde brisée – la première démonstration est due à Archimède – et sur un second théorème de la corde brisée, ces deux théorèmes lui permettant alors d'évaluer les cordes 72°, 6°, 3°.
Al-Biruni a aussi écrit un traité complet sur la connaissance des ombres projetées par un gnomon. Dans cet ouvrage, il affirme que, parmi les Orientaux, il est de coutume d'utiliser un gnomon dont la longueur équivaut à celle d'une main, ceci étant la dimension de nombreux objets courants tels que piquet, règle, couteau ordinaire, etc. Une corde équivaut à la largeur de trois mains de quatre doigts. Ainsi, ces unités conventionnelles étaient accessibles à tous.
Il rapporte que, pour ces peuples, la longueur du gnomon était 12. Il arrive aussi qu'un homme utilise son propre corps comme gnomon et mesure son ombre avec ses pieds, considérés comme étant le septième de sa hauteur (le gnomon est alors égal à 7). Bien d'autres exemples sont présentés dans son traité et il mentionne que peu de gens ont compris l'inconvénient d'utiliser un rayon différent de un.
Cependant, Abou l-Wafa et Al-Biruni ont mis un terme aux valeurs différentes attribuées à la longueur du rayon en posant que ce rayon devait être égal à un. Par contre, cette mesure adoptée a très peu influencé leurs contemporains et elle fut ignorée pendant tout le Moyen Age.

Ibn al-Haitham



Ibn al-Haitham (vers 965-1039), l'*Alhazen* des Occidentaux, fut médecin et mathématicien. On connaît de lui prés de 92 titres d'ouvrages dont 25 portent sur les mathématiques. Dans son plus important traité, intitulé *les trésors de l'optique*, il ne s'est pas contenté de commenter Ptolémée sur la réflexion et la réfraction des rayons lumineux mais a apporté une contribution originale en substituant aux rayons visuels des opticiens grecs, issus de l'œil, les rayons lumineux allant de l'objet vers l'œil. Parmi les questions traitées, on trouve la structure et le fonctionnement de l'œil, l'augmentation apparente de la dimension de la lune prés de l'horizon, l'estimation de la hauteur de l'atmosphère à partir de l'observation que les rayons du soleil demeurent visibles jusqu'au moment où le soleil est situé à 19° sous l'horizon, etc. Un problème d'optique géométrique porte encore son nom :
Etant donné un miroir circulaire, trouver un point sur le miroir qui a la propriété de réfléchir vers un observateur un rayon lumineux issu d'une source distincte.
Ses travaux ont particulièrement influencé les savants du monde médiéval, surtout en Europe.

Omar Khayyâm

Omar Khayyâm (vers 1050-vers1122, Nîsâbûr, Iran) est à la fois un grand poète iranien, un algébriste et le réformateur de l'ancien calendrier persan. Il est l'auteur des célèbres quatrains réunis dans livre intitulé *Rubaiy* ^{c}*at*. Il a écrit une *Algèbre* qui dépasse celle d'al-Khawarizmi car elle inclut des équations du troisième degré. Pour les équations quadratiques, il a utilisé la tradition arabe en fournissant des démonstrations arithmétiques et géométriques ; il refuse aussi les solutions négatives. En ce qui a trait aux équations cubiques, il croyait faussement que seules des solutions géométriques étaient possibles.
Le processus impliquant l'utilisation de coniques ayant des intersections communes dans la résolution d'équations cubiques fut mis de l'avant par Menechme, Archimède et Ibn al-Haitham. Cependant, le mérite d'Omar Khayyâm est d'avoir généralisé la méthode pour qu'elle s'applique à toutes les équations du troisième degré (racines positives seulement). Ayant constaté l'impossibilité géométrique de résoudre l'équation cubique à l'aide de la règle et du compas, il affirma alors que la solution exigeait l'emploi des sections coniques. Le procédé d'Omar Khayyâm pour solutionner l'équation cubique est difficile à appliquer et

exige une manipulation assez encombrante. On peut cependant résumer sa méthode comme suit :
Etant donné une équation cubique, substituer à x^2 *l'expression 2m, pour obtenir une nouvelle équation représentant une hyperbole, puis tracer l'hyperbole et la parabole* $x^2 = 2my$ *dans un même système d'axes ; on obtient par intersection les racines de l' équation cubique* . Evidemment, plusieurs paires de coniques peuvent être utilisées pour résoudre l'équation cubique.

4. Petit aperçu sur les mathématiques maghrébines du XIII^{ème} et XIV^{ème} siècles :

L'un des meilleurs témoignages sur les mathématiques maghrébines du XIII^{ème} et XIV^{ème} siècles est bien celui d'**Ibn Khaldoun** (1332-1406) dans sa *Al-Mouqadimat*. Il y montre d'ailleurs une culture mathématique assez poussée, dûe en grande partie aux leçons d'**Al-Abili (**1285-1357), un mathématicien maghrébin né à Tlemcen, qui n'a jamais rien laissé d'écrit.

Les Sciences des Nombres (que les Européens appelleront plus tard quadrivium) comportent l' Arithmétique, la Géométrie, l'Astronomie et la Musique.

Arithmétique :
C'est la science des propriétés des nombres combinés en progression arithmétique ou géométrique. Ibn Khaldoun cite les travaux de Nicomaque de Gérase et parle du symbolisme naissant comme les tableaux.
L'Arithmétique comporte plusieurs branches :

- **le calcul** : sous forme de combinaisons (addition, multiplication) et séparations (soustraction et division) ; il applique le calcul aux fractions et distingue les nombres clairement exprimés (rationnels) et les nombres qu'on ne peut clairement exprimer (irrationnels ou sourds).

Le calcul est nécessaire pour les affaires. Il est enseigné aux enfants (11-12 ans) dans les villes ; il donne des connaissances claires et des démonstrations systématiques. Il forme des têtes bien faites, habituées à raisonner juste. On prétend qu'on doit faire confiance à celui qui a étudié le calcul dès son enfance, car il a acquis des bases solides, pour la contestation, qui lui deviennent comme une seconde nature, de sorte qu'il s'habitue à l'exactitude et s'en tient à la méthode (du calcul).
Ibn Khaldoun cite comme livre de base celui d'**Al-Hassar.**

- **l'algèbre** : c'est la science de la réduction et de la confrontation ; elle permet de calculer une inconnue en partant de données connues, lorsqu'il existe un rapport mutuel qui l'autorise (on a le nombre n, la chose x et le capital x^2 dans une équation). Ibn Khaldoun cite **Al-Khawarizmi**, **Abu Kamil**, **Al – Qurashi** de Béjaïa.

- **les transactions commerciales :** c'est l'arithmétique appliquée aux affaires dans les villes pour la vente, le cadastre, les aumônes légales (az-zakat). Ibn Khaldoun cite **Az-Zahrawi**, **Ibn As – Samh, Abu Muslim b. Khaldun.**
- **les lois successorales:** il cite **Al-Hawfi** pour le rite malikite et **Al Haramayn** pour le rite chafi ^{c}ite.

Géométrie :
C'est la science des mesures continues (lignes, surfaces, solides) ou discontinues (les nombres).
La géométrie ouvre l'esprit et lui donne le goût de la rigueur. L'erreur ne peut guère y avoir accès. Nos maîtres comparaient l'effet de la géométrie sur l'intelligence à l'action du savon sur les vêtements : elle en enlève les souillures et nettoie les tâches.
Ibn Khaldoun cite **Euclide, Ibn Sina, Ibn As-Salt.**
La géométrie comporte les branches suivantes :
- **les sphères et cônes :** la géométrie des figures sphériques (d'après Théodose et Menelaüs) nécessaire pour l'astronomie et les sections coniques utiles dans la charpente et l'architecture. Ibn Khaldoun cite en particulier les travaux des frères **Shakir** (IX^{ème} siècle).
- **l'optique :** c'est la branche de géométrie qui explique les causes d'erreurs de vision et d'illusions d'optique. Ibn Khaldoun cite les travaux d'**Ibn Al-Haytham.**

5. Un aperçu des savants qui ont vécu ou séjourné à Tlemcen du XIII^{ème} au XV^{ème} siècles :

C'est une période très prospère sous le règne des Zianides.
- **Al-Machadali :**très fort en médecine mais ne voulait pas qu'on le sache et n'a rien écrit dans ce domaine.
- **Abu Abdallah El Cadi Ech Cherif de Marrakech** (XIV^{ème} siècle).
- **Ibn Al Banna El Marrakuchi** (1256-1321).
- **Ibn An-Nadjar**, mort jeune de la peste à Tunis en 1349,
- **Al-Abili** (1285-1357), maître d'Ibn Khaldoun
- **Abu l-Hassan ^{c}Ali Al-Qalasadi al-Basti** (1412-1486).
- **Ibn Ghazi Al-Meknassi** (1437-1513).
- **El-Okbani** (1330-1408), né à Tlemcen, disciple d'Al-Abili, a été pendant 40 ans cadi de Bejaïa, ensuite de Tlemcen, Oran, Marrakech et Salé.
- **Ibn Marzouq et-Tilimsani** (1311-1379), maître d'**Ibn Qunfudh Al-Qasantini** (1340-1407) qui a lui-même séjourné à Tlemcen en 1374.
- **Ibn Zaghou** (1380-1441), élève d'Al-Oqbani et maître d'Al-Qalasadi,spécialiste de la science des héritages,
- **Az –Zeidoun ou Az- Zawiduri** (mort en 1441), maître d'Al-Qalasadi.
- **Ibn Daoud** (semble avoir été traduit en latin par Abendaoud).
- **Al-Maghraoui** (vivait en 1611).
- **Aberkane** (mort en 1454).
- **Achour ou Aïchour** (né après 1614, mort en 1605).
- **Al-Habbag.**
- **Es-Senoussi** (1428-1490), élève d'Al-Habbag
Peu de ces savants ont été vraiment étudiés.