Faculté de Mathématiques | Année 2016/2017
Algèbre 3, 2Lic.Math

Test 1 (version 1)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Discuter suivant les valeurs de α le rang de A_α.
2. Soient $v_1 = (0,1,2), v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Vérifier que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire chacun des vecteurs de la base canonique $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{B}$.
4. Donner la matrice P de passage de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{B}$.
5. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ la matrice $M = A_2$ obtenue en posant $\alpha = 2$.
   (a) Déterminer une base de $ker f$ et une base de $Im f$.
   (b) A-t-on $\mathbb{R}^3 = ker f \oplus Im f$?
   (c) M est-elle inversible?
6. Donner, en fonction de M, l'expression de la matrice N de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}$.
7. Pour $X = (2,-1,0)$ dans la base $\mathscr{B}$, donner les coordonnées de $f(X)$ dans la base $\mathscr{E}$.
8. En déduire $f(x,y,z)$ pour (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1/ On échelonne la matrice A_α suivant les colonnes ou les lignes. Suivant les colonnes, en faisant les opérations élémentaires suivantes $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - \alpha C_1$ pour $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ on a $rg(A_\alpha) = 3$) ensuite $C_3 \leftarrow (\alpha - 4)C_3 + \alpha C_2$ si $\alpha \neq 4$ (et pour $\alpha = 4$ on a $rg(A_\alpha) = 3$) on obtient la matrice échelonnée:

$A_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha - 4 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha^2 - 4 \end{pmatrix}$

On déduit que $rg(A_\alpha) = 2$ si $\alpha = \pm 2$ et $rg(A_\alpha) = 3$ si $\alpha \neq \pm 2$.

2/ On vérifie que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une partie libre d'un espace vectoriel de dimension 3 c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3/ Ecriture des vecteurs de la base canonique $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{B}$.

- $e_1 = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})_{\mathscr{B}}$.
- $e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})_{\mathscr{B}}$.
- $e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})_{\mathscr{B}}$.

4/ Matrice P de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$:

$$P = pass(\mathscr{E}, \mathscr{B}) = Mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5/ $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tel que $M = Mat(f, \mathscr{B}) = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, pour tout $1 \leq i \leq 3$, la colonne C_i de M représente les coordonnées de $f(v_i)$ dans la base $\mathscr{B}$.

(a) Une base de l'image de f et une base du noyau de f:

D'après 1/ $rg(A_2) = 2$, (on voit bien que $C_2 = C_3$), on échelonne la matrice M suivant les colonnes; à l'aide des opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ on obtient la matrice échelonnée;

$M \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ où $C_1 = f(v_1)$, $C_2 = f(v_2 - 2v_1)$ et $C_3 = f(v_3 - v_2)$, ces vecteurs étant écrits dans la base $\mathscr{B}$.

Les colonnes non nulles de la matrice échelonnée correspondent à une base de Imf, donc $\{[f(v_1)]_{\mathscr{B}}, [f(v_2 - 2v_1)]_{\mathscr{B}}\}$ est une base de Imf (et aussi $\{[f(v_1)]_{\mathscr{B}}, [f(v_2)]_{\mathscr{B}}\}$). La colonne nulles de la matrice échelonnée est l'image d'un vecteur de $kerf$. Donc on a:

$Imf = \langle (1, 2, -1)_{\mathscr{B}}, (0, -2, 3)_{\mathscr{B}} \rangle = \langle (1, 2, -1)_{\mathscr{B}}, (2, 2, 1)_{\mathscr{B}} \rangle$, ou encore
$Imf = \langle (1, 3, 1), (1, -2, 3) \rangle$ les vecteurs étant écrits dans la base canonique et
$kerf = \langle v_3 - v_2 \rangle = \langle (0, -1, 1)_{\mathscr{B}} \rangle = \langle (0, -1, 1) \rangle$.

(b) On a $(0, -1, 1) \notin Imf$ donc $Imf \cap kerf = \{0\}$.
Comme $dim(\mathbb{R}^3) = dim(kerf) + dim(Imf) = dim(kerf + Imf)$, on déduit que $\mathbb{R}^3 = kerf \oplus Imf$.

(c) $rg(f) = rg(M) = 2$ donc M n'est pas inversible.

6/ $N = Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{E}) = Mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}, \mathscr{E})Mat(f, \mathscr{B}) = PM$.

7/ Pour $X = (2, -1, 0)_{\mathscr{B}}$ on a $f(X) = [f(X)]_{\mathscr{E}} = NX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8/ Soit $V = [V]_{\mathscr{E}} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors $[V]_{\mathscr{B}} = pass(\mathscr{B}, \mathscr{E})[V]_{\mathscr{E}} = P^{-1}[V]_{\mathscr{E}}$ et
$f(V) = [f(V)]_{\mathscr{E}} = [f([V]_{\mathscr{B}})]_{\mathscr{E}} = N[V]_{\mathscr{B}} = NP^{-1}[V]_{\mathscr{E}} = NP^{-1}V$ avec
$P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient alors

$f(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(8x + y + z, 9x + 3y + 3z, 14x + y + z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Faculté de Mathématiques — Année 2016/2017
Algèbre 3, 2Lic.Math

Test 1 (version 2)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3)$.

1. Discuter suivant les valeurs de α le rang de A_α.
2. Soient $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (2, 1, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Vérifier que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire chacun des vecteurs de la base canonique $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{B}$.
4. Donner la matrice P de passage de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{B}$.
5. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ la matrice $M = A_2$ obtenue en posant $\alpha = 2$.
   (a) Déterminer une base de $kerf$ et une base de Imf.
   (b) A-t-on $\mathbb{R}^3 = kerf \oplus Imf$?
   (c) M est-elle inversible?
6. Donner, en fonction de M, l'expression de la matrice N de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}$.
7. Pour $X = (2, -1, 0)$ dans la base $\mathscr{B}$, donner les coordonnées de $f(X)$ dans la base $\mathscr{E}$.
8. En déduire $f(x, y, z)$ pour (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

Pour les détails lire le corrigé du test (version 1).

$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1/ $rg(A_\alpha) = 2$ si $\alpha = \pm 2$ et $rg(A_\alpha) = 3$ si $\alpha \neq \pm 2$.

2/ On vérifie que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une partie libre d'un espace vectoriel de dimension 3 c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3/ Ecriture des vecteurs de la base canonique $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{B}$.

- $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})_{\mathscr{B}}$.
- $e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})_{\mathscr{B}}$.
- $e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4})_{\mathscr{B}}$.

4/ Matrice P de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$:

$P = pass(\mathscr{E}, \mathscr{B}) = Mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

5/ $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tel que $M = Mat(f, \mathscr{B}) = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(a) Une base de l'image de f et une base du noyau de f:

$Imf = \langle (1, 2, -1)_{\mathscr{B}}, (0, -2, 3)_{\mathscr{B}} \rangle = \langle (1, 2, -1)_{\mathscr{B}}, (2, 2, 1)_{\mathscr{B}} \rangle$, ou encore
$Imf = \langle (-1, 0, 3), (6, 1, -5) \rangle$ les vecteurs étant écrits dans la base canonique et
$kerf = \langle v_3 - v_2 \rangle = \langle (0, -1, 1)_{\mathscr{B}} \rangle = \langle (2, 0, -2) \rangle$.

(b) On a $(0, -1, 1) \notin Imf$ donc $Imf \cap kerf = \{0\}$.

Comme $dim(\mathbb{R}^3) = dim(kerf) + dim(Imf) = dim(kerf + Imf)$, on déduit que $\mathbb{R}^3 = kerf \oplus Imf$.

(c) $rg(f) = rg(M) = 2$ donc M n'est pas inversible.

6/ $N = Mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{E}) = PM = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7/ Pour $X = (2, -1, 0)_{\mathscr{B}}$ on a $f(X) = [f(X)]_{\mathscr{E}} = NX = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

8/ Soit $V = [V]_{\mathscr{E}} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors $[V]_{\mathscr{B}} = pass(\mathscr{B}, \mathscr{E})[V]_{\mathscr{E}} = P^{-1}[V]_{\mathscr{E}}$ et
$f(V) = [f(V)]_{\mathscr{E}} = [f([V]_{\mathscr{B}})]_{\mathscr{E}} = N[V]_{\mathscr{B}} = NP^{-1}[V]_{\mathscr{E}} = NP^{-1}V$ avec
$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On obtient alors
$f(x, y, z) = (\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, 2x - y + 2z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.