Test 2

Exercice : On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $E = \langle e_1, e_2 + e_3, e_4 \rangle$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $e_1, e_2 + e_3$ et e_4.

1. Vérifier que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2 + e_3, e_4\}$ est une base de E.
2. Soit $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $X \in E$, ${}^tLXL \in E$.
3. Montrer que l'application f définie sur E par $f(X) = {}^tLXL$ est un endomorphisme de E.
4. Ecrire la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.
5. Calculer A^2. Conclure.
6. 0 est-elle une valeur propre de f? Justifier (Sans faire de calculs).
7. Trouver un élément $Y \in E$ tel que $f(Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Conclure.
8. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de E.
9. Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
10. Déterminer $Com(P)$ et P^{-1}.
11. Donner la matrice $M = P^{-1}AP$.
12. Sans calculs, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f.

Corrigé

$\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Il est de dimension 4 et sa base canonique est $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère le sous-espace vectoriel $E = \langle e_1, e_2 + e_3, e_4 \rangle$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1/ $\mathcal{B} = \{e_1, e_2+e_3, e_4\}$ est une base de E car $\mathcal{B}$ est une famille génératrice (par définition) et libre. En effet, soient α, β et γ des réels tels que $\alpha e_1 + \beta(e_2+e_3) + \gamma e_4 = 0$, c'est à dire $(\alpha, \beta, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0)$ d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

2/ Soit $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrons que pour tout $X \in E$, ${}^tLXL \in E$.

Soit $X = ae_1 + b(e_2 + e_3) + ce_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$,

${}^tLXL = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + c & 2a - 3b + c \\ 2a - 3b + c & 4a - 4b + c \end{pmatrix}$.

Donc ${}^tLXL = (a - 2b + c)e_1 + (2a - 3b + c)(e_2 + e_3) + (4a - 4b + c)e_4 \in E$.

3/ Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & X & \longmapsto & {}^tLXL \end{array}$$

f est bien définie. Montrons que f est un endomorphisme de E. Soient $X, Y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha X + Y) = ({}^tL)(\alpha X + Y)L = (\alpha({}^tL)X + ({}^tL)Y)L = \alpha({}^tL)XL + ({}^tL)YL = \alpha f(X) + f(Y)$. D'où f est un endomorphisme de E.

4/ Matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$:

- $f(e_1) = {}^tLe_1L = {}^tL \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = e_1 + 2(e_2 + e_3) + 4e_4 = (1, 2, 4)_{\mathcal{B}}$.
- $f(e_2+e_3) = {}^tL(e_2+e_3)L = {}^tL \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = -2e_1 - 3(e_2+e_3) - 4e_4 = (1, 2, 4)_{\mathcal{B}}$.
- $f(e_4) = {}^tL(e_4)L = {}^tL \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + (e_2 + e_3) + e_4 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$.

Donc $A = Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

5/ $A^2 = I_3$, d'où A est inversible et $A^{-1} = A$.

6/ A est inversible donc f l'est aussi on en déduit que 0 n'est pas une valeur propre de f car si P_f est le polynôme caractéristique de f alors $P_f(0) = det(f) = det(A) \neq 0$.

7/ Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$ tel que $f(Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$Y = f^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où $f(Y) = -Y$ et donc (-1) est une valeur propre de f.

8/ $e'_1 = e_1 - 2e_4 = (1, 0, -2)_{\mathcal{B}}$; $e'_2 = e_1 + (e_2+e_3) + 2e_4 = (1, 1, 2)_{\mathcal{B}}$ et $e'_3 = (e_2+e_3) + 2e_4 = (0, 1, 2)_{\mathcal{B}}$. On échelonne la matrice formée des vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 suivant les colonnes,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice échelonnée a trois colonnes non nulles, on déduit que $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de E.

Une autre façon de faire: $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

9/ Matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

10/ Comatrice de P:

Par définition, $Com(P) = (P_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ où $P_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$ où M_{ij} est la matrice obtenue à partir de P en supprimant la ligne i et la colonne j. On obtient après calculs:

$$Com(P) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverse de P:

On a $det(P) = -2$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{det(P)}{}^t(Com(P)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

11/ Pour avoir $M = P^{-1}AP$, on peut faire le produit des trois matrices ou alors:

$f(e'_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -e'_1$, $f(e'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e'_2$ et $f(e'_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -e'_3$.

Donc $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

12/ On déduit de ce qui précède que le polynôme caractéristique de f est:

$P_f(X) = P_A(X) = P_M(X) = -(X+1)^2(X-1)$, ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = 1$ (de multiplicité 1), les sous-espaces propres sont $E_{-1} = \langle e'_1, e'_3 \rangle$ de dimension 2 et $E_1 = \langle e'_2 \rangle$ de dimension 1.