U.S.T.H.B. Janvier 2013
Faculté des mathématiques
Alg 3/ 2ème année Lic.Mat

Examen final

Exercice 1:

Soient $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degrés ≤ 3 et f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ défini par $f_\alpha(P) = X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P'$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire la matrice M_α de f_α relativement à la base canonique $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker f_\alpha$ et une base de Imf_α.
3. Donner les valeurs propres de f_α.
4. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α a des valeurs propres multiples.
5. L'endomorphisme f_{-4} est-il diagonalisable?

Exercice 2:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
2. Trouver une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de f est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Exprimer A' en fonction de A.

Exercice 3:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un endomorphisme p de E est appelé projecteur si $p^2 = p$ (p^2 désigne $p \circ p$).

1. Quelles sont les valeurs propres d'un projecteur p?
2. Montrer que si p est un projecteur alors:
   a. l'endomorphisme $Id_E - p$ noté $1 - p$ est aussi un projecteur.
   b. $\forall x \in E, (p(x) - x) \in \ker p$. En déduire que $E = Imp \oplus \ker p$.
3. Soient $p, q \in End(E)$ deux projecteurs.
   a. Montrer que si $p + q$ est un projecteur alors $p \circ q + q \circ p = 0 \qquad (*)$.

En composant $(*)$ par p, à gauche puis à droite, établir la relation $p \circ q - q \circ p = 0$.

   b. En déduire que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
   c. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que:
      i. $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
      ii. $Im(p+q) = Imp \oplus Imq$.

Corrigé de l'examen final

Exercice 1: Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f_\alpha(P) = X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P'$.

1. Pour déterminer la matrice M_α de f_α par rapport à la base $\mathcal{E}$, calculons $f_\alpha(1)$, $f_\alpha(X)$, $f_\alpha(X^2)$ et $f_\alpha(X^3)$.

$$\begin{aligned} f_\alpha(1) &= 0 \\ f_\alpha(X) &= 1+\alpha X \\ f_\alpha(X^2) &= X(X-1)(2) + (1+\alpha X)(2X) = 2(1+\alpha)X^2 \\ f_\alpha(X^3) &= X(X-1)(6X) + (1+\alpha X)(3X^2) = -3X^2 + 3(2+\alpha)X^3 \end{aligned}$$

On a alors

$$M_\alpha = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_\alpha(1) & f_\alpha(X) & f_\alpha(X^2) & f_\alpha(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\alpha) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(2+\alpha) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

2. Déterminons une base du noyau et une base de l'image de f_α par échelonnement de la matrice M_α.

$$M_\alpha \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_\alpha(X) & f_\alpha(X^3) & f_\alpha(X^2) & f_\alpha(1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 3(2+\alpha) & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On distingue 3 cas:

Si $\alpha = -1$ alors

$$M_{-1} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_{-1}(X) & f_{-1}(X^3) & f_{-1}(X^2) & f_{-1}(1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On déduit que

$Rg(f_{-1}) = 2$, $\dim\ker(f_{-1}) = 2$

$\{f_{-1}(X), f_{-1}(X^3)\} = \{1-X, -3(X^2-X^3)\}$ est une base de $Im(f_{-1})$ et $\{1, X^2\}$ est une base de $\ker(f_{-1})$.

Si $\alpha = -2$ alors

$$M_\alpha \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_{-2}(X) & f_{-2}(X^3) & f_{-2}(X^2) & f_{-2}(1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_{-2}(X) & f_{-2}(X^3) & 3f_{-2}(X^2)+2f_{-2}(X^3) & f_{-2}(1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On déduit que

$Rg(f_{-2}) = 2$, $\dim\ker(f_{-2}) = 2$,

$\{f_{-2}(X), f_{-2}(X^3)\} = \{1-2X, -3(X^2-X^3)\}$ est une base de $Im(f_{-2})$ et $\{1, 3X^2+2X^3\}$ est une base de $\ker(f_{-2})$.

Si $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq -2$ alors

$$\begin{array}{cccccc} & f_\alpha(X) & f_\alpha(X^3) & 3f_\alpha(X^2)+2(1+\alpha)f_\alpha(X^3) & f_\alpha(1) \\ M_\alpha \to & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3(2+\alpha) & 6(1+\alpha)(2+\alpha) & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Donc

$Rg(f_\alpha) = 3$, $\dim\ker(f_\alpha) = 1$

$\{f_\alpha(X), f_\alpha(X^3)\} = \{1+\alpha X, -3X^2+3(2+\alpha)X^3, X^3\}$ est une base de $Im(f_\alpha)$ et $\{1\}$ est une base de $\ker(f_\alpha)$.

3/ Polynôme caractéristique de M_α :

$$P_{M_\alpha}(X) = \det(M_\alpha - XI_4) = -X(\alpha - X)(2(1+\alpha)-X)(3(2+\alpha)-X).$$

Les valeurs propres de M_α sont donc

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \alpha, \lambda_3 = 2(1+\alpha), \lambda_4 = 3(2+\alpha).$$

4/ Les différents cas où les valeurs propres sont multiples:

Si $\alpha = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ est une valeur propre double et λ_3, λ_4 sont simples,

Si $\alpha = -1$ alors $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ est une valeur propre double et λ_2, λ_4 sont simples,

Si $\alpha = -2$ alors $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ sont des valeurs propres doubles,

Si $\alpha = -3$ alors $\lambda_2 = \lambda_4 = -3$ est une valeur propre double et λ_1, λ_3 sont simples,

Si $\alpha = -4$ alors $\lambda_3 = \lambda_4 = -6$ est une valeur propre double et λ_1, λ_2 sont simples.

5/ Pour $\alpha = -4$, d'après la question précédente, f_{-4} est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre de E_{-6} de $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 2. Déterminons donc E_{-6}.

$$E_{-6} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, f_{-4}(P) = -6P\}$$

Ecrivons $P(X) = aX + bX^2 + cX^3 + dX^4$ dans la base $\mathcal{E}$ sous la forme $[P]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

On a alors

$$E_{-4} = \{[P]_\mathcal{E} \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, (M_{-4} + 6I_4)\,[P]_\mathcal{E} = 0\}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 6a+b &= 0 \\ 2b &= 0 \\ -3d &= 0 \end{cases} \iff a = b = d = 0.$$

Par suite

$$E_{-6} = \left\langle (0,0,1,0)_\mathcal{E} = X^2 \right\rangle$$

$DimE_{-6} = 1$ donc f_{-4} n'est pas diagonalisable.

Exercice 2:

f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Puisque $\det A = 1 \neq 0$ alors f est un automorphisme d'espace vectoriel.

Un calcul rapide donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où l'on déduit que

$f^{-1}(x, y, z) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3y + z \\ x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$.

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} f(v_1) & = & v_1 \\ f(v_2) & = & v_1 + v_2 \\ f(v_3) & = & v_2 + v_3. \end{cases}$$

Posons $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2), v_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

De l'équation $f(v_1) = v_1$ on obtient le système

$$\begin{cases} y_1 & = & x_1 \\ z_1 & = & y_1 \\ x_1 - 3y_1 + 3z_1 & = & z_1 \end{cases}$$

qui équivaut à $x_1 = y_1 = z_1$. Par suite $v_1 = (x_1, x_1, x_1)$. On peut alors choisir $x_1 = 1$ et prendre $v_1 = (1, 1, 1)$.

Après avoir remplacer v_1 par $(1, 1, 1)$, l'équation $f(v_2) = v_1 + v_2$ s'écrit

$$\begin{cases} y_2 & = & 1 + x_2 \\ z & = & 1 + y_2 \\ x_2 - 3y_2 + 3z_2 & = & 1 + z_2 \end{cases}$$

D'où l'on tire $v_2 = (x_2, x_2 + 1, x_2 + 2)$. On peut choisir alors $v_2 = (0, 1, 2)$.

De manière analogue, l'équation $f(v_3) = v_2 + v_3$ donne $v_3 = (x_3, x_3, x_3 + 1)$. On peut prendre alors $v_3 = (0, 0, 1)$. On vérifie que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ est bien A'.

Exercice 3:

E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un endomorphisme p de E est appelé projecteur s'il vérifie $p^2 = p \circ p = p$.

1. Soit λ une valeur propre d'un projecteur p de E. Il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que $p(v) = \lambda v$.

Par suite $p(p(v)) = p(\lambda v)$ ie $p^2(v) = \lambda p(v)$. Comme p est un projecteur alors $p(v) = \lambda p(v)$. Donc $\lambda v = \lambda^2 v$. Ce qui donne $\lambda(\lambda - 1)v = 0$. Comme v est non nul, on déduit que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2. On suppose que P est un projecteur.

a. On a

$$(1 - p)^2 = 1 + p^2 - 2p = 1 + p - 2p = 1 - p$$

On déduit que $1 - p$ est aussi un projecteur.

b. Soit x dans E. Pour montrer que $p(x) - x$ est dans $\ker p$ il suffit de vérifier que $p(p(x) - x) = 0$. Ce qui est le cas car $p(p(x) - x) = p^2(x) - p(x) = p(x) - p(x) = 0$.

Montrons que $E = Imp \oplus \ker p$.

On a $Imp \subset E$ et $\ker p \subset E$ donc $Imp + \ker p \subset E$.

Tout $x \in E$ peut s'écrire $x = p(x) + (x - p(x))$ donc appartient à $Imp + \ker p$.

Par suite $E = Imp + \ker p$.

Vérifions, à présent, que $Imp \cap \ker p = \{0_E\}$.

Soit $x \in Imp \cap \ker p$ alors $x \in Imp$ et $x \in \ker p$. Donc il existe $t \in E$ tel que $x = p(t)$ et $p(x) = 0$. Par suite $p^2(t) = p(t) = 0$ ie $x = 0$. On déduit que $\{0_E\} \subset Imp \cap \ker p$. L'inclusion dans l'autre sens étant toujours vraie, il s'ensuit que $E = Imp \oplus \ker p$.

3. Soient $p, q \in End(E)$ deux projecteurs.

a. Si $p + q$ est un projecteur alors $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + pq + qp$ (où pq désigne $p \circ q$).

Donc $p + q = p + q + pq + qp$ ce qui implique $pq + qp = 0$ $(*)$.

On compose par p à gauche, on obtient $p(pq+qp) = 0$ ie $p^2q+pqp = 0$ donc $pq+pqp = 0$ (1).

On compose par p à droite, on obtient $(pq + qp)p = 0$ ie $pqp + qp = 0$ donc $pqp + qp = 0$ (2).

En faisant $(1) - (2)$ on obtient $pq - qp = 0$ $(**)$.

On somme les équations $(*)$ et $(**)$, on obtient $2pq = 0$ ie $pq = 0$ et donc $qp = 0$.

b. L'équivalence

$$p + q \text{ projecteur} \Leftrightarrow pq = qp = 0$$

est alors évidente.

c. On suppose $p + q$ projecteur. Montrons que:

i. $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$ alors $x \in \ker p$ et $x \in \ker q$ donc $p(x) = q(x) = 0$. D'où $p(x) + q(x) = (p + q)(x) = 0$ par suite $x \in \ker(p + q)$.

Soit, maintenant, x dans $\ker(p + q)$ alors $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$. D'où $p(x) = -q(x)$.

On compose par p à gauche, on obtient $p^2(x) = -pq(x)$. Donc, d'après 3/ b/, $p(x) = -pq(x) = 0$ ie $x \in \ker p$.

On compose par q à gauche, on obtient $qp(x) = -q^2(x)$. Donc, d'après 3/ b/, $q(x) = -qp(x) = 0$ ie $x \in \ker q$.

Par suite $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. D'où l'egalité.

ii. $Im(p + q) = Imp \oplus Imq$.

Soit $y \in Im(p + q)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (p + q)(x) = p(x) + q(x) \in Imp + Imq$ d'où l'inclusion $Im(p + q) \subset Imp + Imq$.

Soit $y \in Imp + Imq$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = p(x_1) + q(x_2)$. On a alors

$$\begin{aligned} p(y) &= p^2(x_1) + pq(x_2) = p(x_1) &\quad \text{car } pq = 0 \\ q(y) &= qp(x_1) + q^2(x_2) = q(x_2) &\quad \text{car } qp = 0 \end{aligned}$$

Par suite $p(y) + q(y) = p(x_1) + q(x_2)$ ieDonc $y = (p+q)(y)$. Donc $y \in Im(p+q)$. D'où l'inclusion dans l'autre sens.

Reste à vérifier que $Imp \cap Imq = \{0_E\}$.

Soit $y \in Imp \cap Imq$ alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = p(x_1) = q(x_2)$.

Par suite $p(y) = p^2(x_1) = (pq)(x_1)$. Comme $p^2 = p$ et $pq = 0$ on obtient $p(x_1) = 0$ ie $y = 0$. Donc $Imp \cap Imq \subset \{0_E\}$. L'inclusion dans l'autre sens est évidente.