Faculté de Mathématiques Janvier 2016
$2^{\text{ème}}$ année Lic.Maths
Algèbre 3

Examen final

Exercice 1: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que si $a+b+c \neq 0$ alors $v = (a,b,c)$ est un vecteur propre de A. Préciser la valeur propre correspondante.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable? (Discuter suivant les valeurs des réels a, b, c.)
4. Dans chaque cas où f est diagonalisable, déterminer une base de chacun des sous-espaces propres, une matrice inversible P ainsi que son inverse et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c pour que A soit inversible. Trouver alors l'expression de A^{-1} en fonction de A.

Exercice 2:

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \varphi(M) = Tr(M) \end{array} \qquad (Tr(M) \text{ étant la trace de } M)$$

   est linéaire et surjective.

   En déduire la dimension du sous-espace $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / Tr(M) = 0\}$.

2. Soient A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & -M + Tr(M)A \end{array}$$

   (a) Montrer que f est linéaire.

   (b) On suppose que $Tr(A) \neq 1$.

   i. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f(M) = 0 \Rightarrow Tr(M) = 0.$$

   En déduire que f est bijective.

   ii. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = N$, montrer que $Tr(M) = \dfrac{Tr(N)}{Tr(A)-1}$.

   Déterminer alors f^{-1}.

   (c) On suppose que $Tr(A) = 1$.

   i. Déterminer $f \circ f$.

   ii. Montrer que $\ker f = \langle A \rangle$.

   iii. Donner $rg(f)$ et en déduire que $Im f = H$.

Faculté de Mathématiques $2^{\text{ème}}$ année Lic.Maths Algèbre 3 Janvier 2016

Corrigé de l'éxamen final

Exercice 1: On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $a+b+c \neq 0$ alors $v = (a,b,c) \neq 0$ et on a $Av = (a+b+c)v$. Donc v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a+b+c$.

2. Polynôme caractéristique de A :

   Par définition $P_A(X) = det(A - XI_3)$. En effectuant, par exemple, les opérations $C_1 \to C_1 - C_2$ et $C_2 \to C_2 - C_3$ sur les colonnes, on obtient $P_A(X) = -(X+(a+b+c))^2(X-(a+b+c)) = -(X+\lambda)^2(X-\lambda)$ où $\lambda = a+b+c$.

3. Diagonalisabilité de la matrice A suivant les valeurs des réels a, b, c:

   1^{er} cas $\lambda = a+b+c = 0$

   Dans ce cas $P_A(X) = -X^3$. Il y'a une seule valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité 3. On a alors

   A diagonalisable $\Leftrightarrow dimE_\lambda = dimkerA = 3 \Leftrightarrow rg(A) = 0$.

   Donc si $(a,b,c) = (0,0,0)$ alors A est diagonalisable

   si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ alors $rgA \neq 0$ donc A n'est pas diagonalisable.

   $2^{\text{ème}}$ cas $\lambda = a+b+c \neq 0$

   A possède deux valeurs propres:

   $\lambda_1 = \lambda$ de multipilicité 1

   $\lambda_2 = -\lambda$ de multipilicité 2.

   Par suite

   A diagonalisable $\Leftrightarrow dimE_{\lambda_2} = dimker(A+\lambda I_3) = 2 \Leftrightarrow rg(A+\lambda I_3) = 2 \Leftrightarrow rg(A+\lambda I_3) = 1$.

   Or $A + \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 2a \\ 2b & 2b & 2b \\ 2c & 2c & 2c \end{pmatrix}$.

   Comme $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ alors $rg(A+\lambda I_3) = 1$ donc A est diagonalisable.

4. Dans chaque cas où f est diagonalisable, déterminons une base des sous-espaces propres, une matrice inversible P ainsi que son inverse et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

   1^{er} cas $\lambda = a+b+c = 0$ et $(a,b,c) = (0,0,0)$

   Dans ce cas la matrice A est nulle, donc diagonale. On prend alors $P = I_3 = P^{-1}$ et $D = P^{-1}AP = (0)$.

   Les colonnes de la matrice A correspondent à $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base $\mathcal{E}$. Donc $E_0 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

$\underline{2^{\text{ème}}\ \textbf{cas}}$ $\lambda = a+b+c \neq 0$.

Une base de E_{λ_1}:

Nous avons montré, dans la question 1, que le vecteur non nul $v = (a,b,c)$ est dans E_{λ_1}. Comme $dim E_{\lambda_1} = 1$ alors $E_{\lambda_1} = \langle v \rangle$.

Une base de E_{λ_2}:

Par définition $E_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A + \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$. On obtient le système

$$\begin{cases} a(x+y+z) = 0 \\ b(x+y+z) = 0 \\ c(x+y+z) = 0. \end{cases}$$

La somme des trois équations donne $(a+b+c)(x+y+z) = 0$. Comme $\lambda = a+b+c \neq 0$ alors $x+y+z = 0$ d'où $z = -x-y$. Par suite $E_{\lambda_2} = \langle u = (1,0,-1), w = (0,1,-1) \rangle$. Puis que $dim E_{\lambda_2} = 2$ alors $\{u, w\}$ est une base de E_{λ_2}. On vérifie que $\mathcal{B} = \{v, u, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$. On a

$$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b+c) \end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}\, {}^t(Com(P)) = \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & -a & -a \\ -b & a+c & -b \end{pmatrix}.$$

5. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible:

   A inversible $\Leftrightarrow detA = P_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = a+b+c \neq 0$

   Expression de A^{-1} en fonction de A :

   D'après le théorème de Cayley-Hamilton $P_A(A) = (0)$. Donc $A^3 + 2\lambda A^2 - \lambda^2 A - \lambda^3 I_3 = (0)$. D'où $A(A^2 + \lambda A - \lambda^2 I_3) = \lambda^3 I_3$. On déduit que $A^{-1} = \dfrac{1}{\lambda^3}(A^2 + \lambda A - \lambda^2 I_3)$.

Exercice 2:

1. Il est clair que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \varphi(M) = Tr(M) \end{array} \qquad (Tr(M) \text{ étant la trace de } M)$$

   est linéaire. La surjective provient du fait que pour tout réel a il existe une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a = \varphi(M)$ (on peut prendre pour M la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf a_{11} qui vaut a. On déduit que $rgf = 1$.

   Dimension de H :

   Remarquons que H n'est rien d'autre que le noyau de f. D'après le théorème du rang

$$dimH = dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - rgf = n^2 - 1.$$

2. Soient A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & -M+Tr(M)A \end{array}$$

(a) Linéarité de f :
Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f(\lambda M+N) = -\lambda M - N + (\lambda Tr(M)+Tr(N))A = \lambda f(M)+f(N)$.

(b) On suppose que $Tr(A) \neq 1$.

i. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcll} f(M)=0 & \Rightarrow & -M+Tr(M)A=0 & \\ & \Rightarrow & M=Tr(M)A & \\ & \Rightarrow & Tr(M)=Tr(M)Tr(A) & (\text{car } Tr(M)\in\mathbb{R}) \\ & \Rightarrow & Tr(M)(Tr(A)-1)=0 & (Tr(A)\neq 1) \\ & \Rightarrow & Tr(M)=0. & \end{array}$$

Noyau de f :
$kerf = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/f(M)=0\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/-M+Tr(M)A=0\}$.
Comme $Tr(M)=0$ alors
$kerf = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M=0\} = \{0\}$.
L'endomorphisme f est donc injectif par suite bijectif.

ii. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $f(M)=N$.
On a

$$\begin{array}{rcll} f(M)=N & \Rightarrow & -M+Tr(M)A=N & (*) \\ & \Rightarrow & -Tr(M)+Tr(M)Tr(A)=Tr(N) & \\ & \Rightarrow & Tr(M)=\dfrac{Tr(N)}{Tr(A)-1} & \end{array}.$$

Expression de f^{-1} :
$(*)$ devient $-M+\dfrac{Tr(N)}{Tr(A)-1}A=N$. D'où $M=-N+\dfrac{Tr(N)}{Tr(A)-1}A$.
Par suite

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & -M+\dfrac{Tr(M)}{Tr(A)-1}A \end{array}$$

(c) On suppose que $Tr(A)=1$.

i. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{array}{rcl} (f\circ f)(M) & = & f(-M+Tr(M)A) = M - Tr(M)A + (-Tr(M)+Tr(M)Tr(A))A \\ & = & -f(M). \end{array}$$

D'où $f\circ f = -f$.

ii. Montrons que $kerf = \langle A \rangle$.
D'une part

$$\ker f = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/f(M)=0\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M=Tr(M)A\} \subset \langle A \rangle.$$

D'autre part
$A \in kerf$ car $A = Tr(A)A$. Donc $\langle A \rangle \subset kerf$.
D'où $kerf = \langle A \rangle$.

iii. Grâce au théorème du rang $rg(f) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - dimkerf = n^2-1 = dimH$. Pour avoir l'égalité $Imf = H$ il suffit donc d'avoir $Imf \subset H$. Soit alors $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N=-M+Tr(M)A$. Par suite $Tr(N) = -Tr(M) + Tr(M)Tr(A) = -Tr(M)+Tr(M) = 0$. Donc $N \in H$. On conclut que $Imf = H$.