Université Paris Dauphine
DEMI2E 2e année
Algèbre linéaire 3

Examen de rattrapage - septembre 2013

Le sujet comporte **1** page. L'épreuve dure **2** heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1
Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer son rang et sa signature par la méthode de Gauss.
3. Déterminer la matrice A de la forme q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et retrouver ainsi le rang et la signature de la forme q.

Exercice 2
Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 3x_2 + 3$$

pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Etudier les extrema locaux de f dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes à cœfficients réels et de degré ≤ 3. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on pose

$$f_1(P) = P(0) \qquad f_2(P) = P(1) \qquad f_3(P) = P'(0) \qquad f_4(P) = P'(1).$$

1. Montrer que f_i est une forme linéaire sur E pour $i = 1, 2, 3, 4$ et que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base du dual E^* de E.
2. Déterminer une base $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ de E dont $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est la base duale.

Exercice 4
Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à n lignes et n colonnes, et à cœfficients dans $\mathbb{R}$.
Etant donnée une matrice $A = (A_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \qquad \text{et} \qquad N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$

où ${}^tA = (({}^tA)_{ij})$ est la matrice (transposée de A) de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji} \quad \text{pour} \quad i,\, j = 1, \cdots, n.$$

1. Montrer que l'application f définie sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ par

$$f(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB) \quad \text{pour} \quad A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$$

est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$N(AB) \leq N(A)\, N(B) \quad \text{pour} \quad A,\, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

3. Montrer que

$$|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\, N(A) \quad \text{pour} \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Corrigé

Exercice 1.
1. Pour $x,\ y \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$f(x,y) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1.$$

Pour y fixé, l'application $f(\cdot, y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire puisqu'elle est un polynôme homogène de degré 1, et de même pour x fixé, l'application $f(x,\cdot)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire. Par conséquent l'application f de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire.

Comme $q(x) = f(x,x)$, on en déduit que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

2. On applique la méthode de Gauss:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - (\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2.$$

Ainsi

$$q(x) = l_1(x)^2 - l_2(x)^2$$

avec

$$l_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \qquad l_2(x) = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

Comme l_1 et l_2 sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendantes, on en déduit que

$$\text{sign}(q) = (1,1) \qquad \text{et} \qquad \text{rang}(q) = 2.$$

3. La matrice de la forme q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2}).$$

La matrice symétrique réelle A admet donc la valeur propre 0, une valeur propre > 0, à savoir $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et une valeur propre < 0, à savoir $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Sa signature est donc $(1,1)$ et son rang 2.

Exercice 2

La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 6x_1 + 4x_2 - 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 4x_1 + 4x_2 - 3.$$

et donc le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ est le seul point critique de f. Ainsi f admet au plus un extremum local dans $\mathbb{R}^2$ et cet extremum éventuel est en ce point critique.

De plus f admet des dérvées partielles d'ordre 2 continues données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 4$$

et la matrice hessienne de f au point critique $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ est

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

qui est définie positive d'après la règle de Sylvester puisque ses deux mineurs principaux sont égaux à 6 et 8 qui sont > 0.

Par conséquent f admet un minimum local au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et c'est le seul extremum local de f dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

1. Pour P, $Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(P + \lambda\, Q)(x) = P(x) + \lambda\, Q(x)$$

donc f_1 et f_2 sont des formes linéaires sur E, et

$$(P + \lambda\, Q)'(x) = P'(x) + \lambda\, Q'(x)$$

donc f_3 et f_4 sont des formes linéaires sur E.

Soit λ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ des réels tels que

$$\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \lambda_3\, f_3 + \lambda_4\, f_4 = 0$$

c'est-à-dire pour tout $P \in E$

$$\lambda_1\, P(0) + \lambda_2\, P(1) + \lambda_3\, P'(0) + \lambda_4\, P'(1) = 0.$$

Prenant successivement $P(x) = 1$, x, x^2 et x^3 on a les quatre relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_2 + 3\lambda_4 = 0.$$

Les deux dernières relations assurent que $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$. La deuxième relation assure alors que $\lambda_3 = 0$, puis la première relation assure que $\lambda_1 = 0$.

Ainsi les quatre formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 sont linéairement indépendantes dans E^*, et comme $\dim E^* = \dim E = 4$, elles forment une base de E^*.

2. On cherche une base $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ de E telle que pour pour $i, j = 1, 2, 3, 4$

$$f_i(P_j) = \delta_{ij}.$$

On doit avoir

$$f_1(P_4) = f_2(P_4) = f_3(P_4) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_4(P_4) = 1$$

c'est-à-dire

$$P_4(0) = P_4(1) = P_4'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_4'(1) = 1.$$

Ainsi P_4 s'annule en 0 et 1 et P_4' s'annule en 0, donc le polynôme P_4 de degré ≤ 3 s'annule à l'ordre 2 en 0 et à l'ordre 1 en 1; il est donc de la forme

$$P_4(x) = \alpha_4 x^2(x-1).$$

En particulier

$$P_4'(x) = \alpha_4(2x(x-1) + x^2) = \alpha_4(3x^2 - 2x)$$

et comme $P_4'(1) = 1$, alors $\alpha_4 = 1$.

Ainsi

$$P_4(x) = x^2(x-1).$$

Ensuite on doit avoir

$$f_1(P_3) = f_2(P_3) = f_4(P_3) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_3(P_3) = 1$$

c'est-à-dire

$$P_3(0) = P_3(1) = P_3'(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_3'(0) = 1.$$

Ainsi P_3 s'annule en 0 et 1 et P_3' s'annule en 1, donc le polynôme P_3 de degré ≤ 3 s'annule à l'ordre 2 en 1 et à l'ordre 1 en 0; il est donc de la forme

$$P_3(x) = \alpha_3 x(x-1)^2.$$

En particulier

$$P_3'(x) = \alpha_3((x-1)^2 + 2x(x-1)) = \alpha_3(x-1)(3x-1)$$

et comme $P_3'(0) = 1$, alors $\alpha_3 = 1$.

Ainsi

$$P_3(x) = x(x-1)^2.$$

De même on calcule P_1 et P_2 avec

$$P_1(x) = (2x+1)(x-1)^2$$

$$P_2(x) = x^2(-2x+3).$$

Exercice 4

1. On note tout d'abord que pour A, $B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA) \qquad \operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$$

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \quad \text{et} \quad {}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB.$$

1.1. L'application f est bilinéaire. En effet pour A, B, $C \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a d'après les propriétés de linéarité notées précédemment

$$f(A + \lambda B, C) = \operatorname{tr}({}^t(A + \lambda B)C) = \operatorname{tr}({}^tAC + \lambda {}^tBC) = \operatorname{tr}({}^tAC) + \lambda \operatorname{tr}({}^tBC) = f(A, C) + \lambda f(B, C)$$

donc l'application $f(\cdot, C)$ est linéaire pour tout $C \in M_n(\mathbb{R})$. De même l'application $f(C, \cdot)$ est linéaire pour tout $C \in M_n(\mathbb{R})$.

1.2. L'application f est symétrique. En effet pour $A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$f(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = f(B,A).$$

1.3. L'application f est définie positive. En effet pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$f(A,A) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}({}^tA)_{ij}A_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ji}A_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ji}^2$$

donc $f(A,A) \geq 0$ et $f(A,A) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

Ainsi l'application f de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. L'application N est la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire f.

De plus pour $A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

$$N(AB)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj})^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^2)(\sum_{l=1}^{n}B_{lj}^2)$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_{ik}^2B_{lj}^2 = (\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}^2)(\sum_{l,j=1}^{n}B_{lj}^2) = N(A)^2N(B)^2.$$

Ainsi

$$N(AB) \leq N(A)\,N(B)$$

puisque tous les termes sont ≥ 0.

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

$$(\mathrm{tr}(A))^2 = (\sum_{i=1}^{n}A_{ii})^2 = (\sum_{i=1}^{n}1\,A_{ii})^2 \leq (\sum_{i=1}^{n}1^2)(\sum_{i=1}^{n}A_{ii}^2) = n\sum_{i=1}^{n}A_{ii}^2 \leq n\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}^2 = nf(A,A) = n(N(A))^2$$

d'après le calcul de la question 2. Ainsi

$$|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\,N(A).$$