Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Généralités sur les séries numériques

1. Pour toute suite numérique $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ (que l'on notera $\sum_n u_n$ dans ce cours) définie par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + \cdots + u_n$$

2. La limite d'une série de terme général (u_n) , $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est simplement notée :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ ou encore } \sum_{n \geqslant n_0} u_k$$

Donc dans ce chapitre, à partir d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donnée, on mène l'étude conjointe des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le scalaire

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelé somme partielle d'ordre n de la série

Des exemples

1. On appelle **série géométrique** de raison a la série dont le terme général est $u_n = a^n$ On aura donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + \cdots + a^n$$

2. Une autre famille de séries est formée des **séries de Riemann** : ce sont les séries de terme général
$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
On a donc :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$
et parmi les séries de Riemann, une est célèbre, **la série harmonique**, qui correspond à l'exposant $\alpha = 1$
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
Le nombre H_n est souvent appelé nombre harmonique.
Une remarque culturelle : mais oui, c'est de la musique...
Une autre remarque : pour ces séries, on démarre par la valeur $n = 1$, par force.

1.1.1 Convergence

Soient $(u_n)_{n\in} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition 1.1. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est* ***convergente*** *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles a une limite finie. Une série qui ne converge pas est dite* ***divergente****. Ce peut être parce que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini, par exemple $\left[\left(\sum_{n\geq 0} 2^n\right)\right]$ ou parce que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite par exemple $\left[\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n\right)\right]$.Lorsqu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, la limite de la suite des sommes partielles est notée :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$$

Le caractére convergent ou divergent d'une série constitue sa ***nature****.*

Exemples

- Toute série dont le terme général est nul à partir d'un certain rang est bien sûr convergente puisque la suite de ses sommes partielles est stationnaire.
- La série de terme général constant égal à 1 est divergente.
- La série de terme général constant égal à $(-1)^n$ est divergente.

– On a
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}$$
si bien que la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge vers $\frac{3}{2}$

1.1.2 Critère de Cauchy pour les séries

Rappel : Critère de Cauchy pour les suites :
Une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si :
$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0\ \forall p > n_0 \quad |u_n - u_p| < \varepsilon$$

Théorème 1.2 (Critère de Cauchy pour les séries). *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles satisfait le critère de Cauchy :*
$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0\ \forall p > 0 \quad |S_{N+P} - S_N| < \varepsilon$$

Proposition 1.3 (Critère de triviale divergence). *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors son terme général u_n tend vers zéro. Autrement dit, si (u_n) ne tend pas vers zéro, la série diverge. On dit dans ce cas qu'elle diverge trivialement, ou grossièrement.*

Remarque et exemple :
La proposition précédente donne une condition nécessaire de convergence : elle n'est nullement suffisante.

$$\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ \textit{mais si} \ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ \not\Rightarrow \ \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$$

1. **la série géométrique** $\sum \alpha^n$. Si $|\alpha| \geqslant 1$ on a $|\alpha|^n \geqslant 1$ pour tout n, donc la série diverge trivialement
2. **La série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ La série harmonique est un exemple typique de série divergente non trivialement divergente. Pour montrer qu'elle diverge, considérons ses sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. On a
$$|S_{2N} - S_N| = \left|\frac{1}{N+1} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2N}\right| \geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$
Or si (S_N) convergeait vers S on aurait aussi convergence de la sous-suite (S_{2N}) vers S, donc $|S_{2N} - S_N|$ tendrait vers 0, ce qui est exclu vu l'inégalité précédente. De plus on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ mais $\sum\frac{1}{n}$ est divergente

3. Donnons encore une application la **Séries télescopiques**

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

On a

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(N+1)$$

donc $(S_N)_{N\geq 1}$ est divergente la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est divergente. Néanmoins, son terme général tend vers zéro

4. La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente de somme 1. En effet,

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$$

donc

$$S_N = \textstyle\sum_{n=2}^{N} \left(\dfrac{1}{(n-1)} - \dfrac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}$$

$$= 1 - \frac{1}{N} \Longrightarrow \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1$$

en démarrant bien sûr à l'indice 2 Ce sont les simplifications successives qui s'appellent «télescopage».

1.2 Séries à termes positifs (A.T.P)

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux séries à termes positifs. Pour être plus précis, aux séries dont les termes sont tous positifs à partir d'un certain rang. Et ce en vertu de la remarque suivante :

Remarque :

1. La question de savoir si une série donnée converge ou non — ce qui revient à "déterminer la nature de la série" — est généralement délicate. À cet effet, le reste de ce chapitre est consacré à cette question et, pour plus de clarté, on adopte les

abbréviations suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ CV } \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \text{la série de terme général } u_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ DV } \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \text{la série de terme général } u_n \text{ diverge}$$

2. La nature d'une série est indépendante de ses premiers termes
3. Cela signifie que si deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont telles qu'il existe n_0 tel que $\forall n > n_0 u_n = v_n$, alors les deux séries sont de même nature ; il est en effet immédiat que les suites de sommes partielles diffèrent d'une constante (pour $\forall n > n_0$) donc convergent ou divergent en même temps. Par contre, bien sûr, les sommes des séries seront différentes. Après ce résultat général, plaçons nous dans l'hypothèse où tous les termes de toutes les séries qui interviennent sont positifs. L'observation essentielle est :

Théorème 1.4. *Une série $(A.T.P)$ est convergents ssi la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ des sommes partielles est majorée*

Démonstration. Ici borné se résume à majoré, et le résultat est immédiat si l'on observe que la suite des sommes partielles est forcément croissante. ■

Proposition 1.5. (i) –

$$\sum_{n\geq 0} u_n CV \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} u_k \text{ (\textit{Le reste d'une série convergente tend vers} 0)}$$

(ii) –

$$\sum_{n\geq 0} u_n \;\; CV \; et \sum_{n\geq 0} v_n \quad CV \;\Longrightarrow \alpha \sum_{n\geq 0} u_n + \beta \; \sum_{n\geq 0} v_n \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad CV$$

(iii) – *Attention*

$$\sum_{n\geq 0} u_n \;\; CV \quad et \quad \sum_{n\geq 0} v_n \;\; CV \quad \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n v_n \;\; CV$$

1.2.1 Théorème de comparaison

Rappel : L'énoncé $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$ signifie trés exactement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

et non (u_n est à peu près égal à v_n)

Proposition 1.6.
Soit (u_n) (v_n) *deux suites de nombres positifs*

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n \leqslant v_n \text{ et } \quad \sum_{n\geq 0} v_n \ \ CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \ \ CV$$

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n \leqslant v_n \text{ et } \quad \sum_{n\geq 0} u_n \ \ DV \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \ \ DV$$

Si l'on a $u_n \sim v_n$ *quand* $n \to +\infty$ *alors les séries de termes généraux*

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont de même nature.}$$

Exemples :

- La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. Effet, on a $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$ et la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge (série télescopique). Cet exemple sera généralis é plus loin
- La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$diverge. En effet $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
- La série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ est une série convergente, via l'inégalité $\sin(x) \leqslant x \ \ \forall x \geqslant 0$, et la convergence de la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

Proposition 1.7 (Séries de Riemann). *La série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \Longrightarrow \begin{cases} si & \alpha > 1 \quad CV \\ si & \alpha \leqslant 1 \quad DV \end{cases}$$

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ or la série harmonique diverge, donc il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$

Si $\alpha > 1$ et si on note $\beta = \alpha - 1$, la série télescopique

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right)$$

est donc convergente. Or on a aussi :

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right) = \frac{1}{n^\beta}\left(1 - \left(1 - \beta\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta}{n^{\beta+1}} = \frac{\alpha - 1}{n^\alpha}$$

Par la propriété des séries (positives) équivalentes, on en déduit que pour tout $\alpha > 1$ la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\alpha - 1}{n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.
■

Proposition 1.8 (Règle de Riemann). - *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $n^\alpha u_n$ *tend vers* 0*, alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge*

- *S'il existe* $\alpha \leqslant 1$ *tel que* $n^\alpha u_n$ *tend vers* $+\infty$*, alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge.*

<u>**Exemples :**</u> La série $\sum_{n\geq 1} e^{-2\sqrt{n}}$ est convergente. Puisqu'on a par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-2\sqrt{n}} = 0$

1.2.2 Critéres d'Alembert et de Cauchy

Théorème 1.9 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *une série à termes strictement positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

- *Si* $\lambda < 1$ *,* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge.*
- *Si* $\lambda > 1$ *,* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge trivialement.*

Donnons un exemple d'application : la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{2^n}$ est convergente. En effet, en notant $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ le terme général, il suffit alors de calculer le rapport

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2}$$

<u>**Remarque**</u>

Si $\lambda = 1$, les deux comportements sont possibles, comme le montrent les séries de Riemann. Lorsque $\lambda = 1$, on peut s'en sortir en écrivant un développement limité à l'ordre 1, en $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. C'est l'objet du résultat suivant (admis), que l'on peut donc voir comme un raffinement du critère de d'Alembert.

Proposition 1.10 (Critère de Raabe-Duhamel). *Soit* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *une série à termes strictement positifs telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \ \textit{tel que } \beta \geqslant 1$$

- *Si* $\lambda > 1$ *,* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge.*
- *Si* $\lambda < 1$ *,* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge*

Exemple.

La série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^n n!}{n^n}$ est divergente. On obtient cette fois :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{e^{(n+1)}\,(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e^{(n+1)}\,(n+1)!n^n}{(n+1)^{(n+1)}\,e^n n!}=e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e\;\exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=e\;\exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\sim\exp\left[1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]$$

$$=\exp\left[\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\sim 1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On voit donc que la règle de d'Alembert ne permettrait pas de conclure, mais que le critère de Raabe-Duhamel s'applique avec $\lambda=-\dfrac{1}{2}<1$ d'où la divergence de la série. Plus précisément, on peut en fait montrer la formule de Stirling :

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

Théorème 1.11 (Règle de Cauchy). *Soit $\sum_{n\geq 1}u_n$ une série ATP telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$*

Si $\lambda<1$, $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge.

- Si $\lambda>1$, $\sum_{n\geq 1}u_n$ diverge

Ces deux règles ne sont pas sans rapport, la règle de Cauchy semble approprié aux circonstances où l'on rencontre des exposant n dans u_n, par exemple la règle de Cauchy établit la convergence de la série

$$u_n=\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$$

Mais les deux règles ne sont pas équivalentes.

Théorème 1.12. *Soit (u_n) une suite ATP, de termes strictement positifs a partir d'un certain rang, alors, si la limite de*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe et vaut λ , la limite de

$$\sqrt[n]{u_n}$$

existe et vaut λ.

1.2.3 Complément : utilisation d'intégrales

Il y a beaucoup d'analogies entre la théorie des séries numériques et l'intégration des fonctions sur un intervalle non borné. Contentons-nous pour commencer d'examiner le cas d'une série de terme général$\sum f(n)$ où f est une fonction positive, décroissante. On a alors le théorème :

Théorème 1.13. *Si f est une fonction positive, décroissante $\sum f(n)$ converge si, et seulement si,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,n)} f(x)\,dx = \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Démonstration. Une remarque préalable : il est nécessaire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puisque le terme général $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ mais ce n'est pas suffisant, bien sûr. La démonstration repose sur :

$$\forall k,\ \forall x \in [k,\ k+1]\,,\ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

On en déduit, par le théorème d'intégration des inégalités :

$$\forall k,\quad f(k+1) \leqslant \int_{[k,\ k+1]} f(x)\,dx \leqslant f(k)$$

En échangeant les rôles :

$$\forall k,\quad \int_{[k,\ k+1]} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{[k-1,\ k]} f(x)\,dx$$

Il ne reste plus qu'à sommer, par exemple de $p+1$ à q

$$\forall k,\quad \sum_{k=p+1}^{q}\int_{[k,\ k+1]} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leqslant \sum_{k=p+1}^{q}\int_{[k-1,\ k]} f(x)\,dx$$

$$\forall k, \int_{[p+1,\ q+1]} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leqslant \int_{[p,\ q]} f(x)\,dx$$

Si donc la suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{(0,n)} f(x)\,dx$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge par le critère de Cauchy. La réciproque est du même tonneau. ■

On peut appliquer ce résultat, ou si on préfère cette méthode, aux séries de Riemann, que l'on a déjà étudiées, mais aussi aux séries de Bertrand.

Théorème 1.14 (Séries de Bertrand.). *La série de terme général*

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \quad \textit{converges si } \alpha > 1 \textit{ ou } \alpha = 1,\quad \beta > 1$$

1.3 Séries à termes quelconques

Il s'agit maintenant d'étudier des séries dont le terme général n'est pas positif. Plus précisément, les séries ATP pour n suffisamment grand, les séries à terme négatif pour n suffisamment grand, relèvent du paragraphe précédent. Commençons par une notion essentielle.

1.3.1 Séries absolument convergentes

Définition 1.15. *Une série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est convergente.*

Il faut bien sûr comprendre «convergence de la série des valeurs absolues» (ou des modules dans le cas complexe). Le résultat important est le suivant :

Théorème 1.16. *Toute série absolument convergente est convergente et l'on a alors :*

$$\left|\sum_{n\geqslant 1} u_n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |u_n|$$

On est donc maintenant en mesure de prouver la convergence de séries de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} ,\alpha > 1$$

Cela dit, l'histoire n'est pas terminée puisque nous allons montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

Proposition 1.17 (Critères d'absolue convergence). *Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes quelconques et $\sum_{n\geq 1} v_n$*

- *Si $|u_n| \leqslant v_n$ avec $\sum_{n\geq 1} v_n$ $CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |u_n|$ est absolument convergente.*
- *Si $|u_n| = O(v_n)$ avec $\sum_{n\geq 1} v_n$ $CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |u_n|$ est absolument convergente.*
- *Si $|u_n| \sim v_n$ avec $\sum_{n\geq 1} v_n$ $CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |u_n|$ est absolument convergente.*
- *S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha |u_n| = 0$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda < 1$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente. Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est trivialement divergente.*

- *S'il existe* $\lambda > 1$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\beta}}\right)$ *tel que* $\beta \geqslant 1$ *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est absolument convergente.*

Nota Bene

Pour des séries à termes quelconques, le critère d'équivalence n'est plus valable : on peut avoir $u_n \sim v_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *CV mais* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *divergente*

1.3.2 Séries semi-convergentes

Définition 1.18. *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Mais pour que nous soyons convaincus de ne pas travailler pour rien, il nous faut trouver des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. L'exemple le plus intéressant est donné par les séries alternées.

Définition 1.19. *On appelle série alternée une série de terme général* u_n *où* u_n *s'écrit* $u_n = (-1)^n a_n$ *avec* $a_n \geqslant 0$

Théorème 1.20 (Critère des séries alternées). *Soit la série alternée* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ *. Si la suite* (a_n) *décroît vers* 0*, alors la série est convergente.*

Exemple.

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est donc convergente. C'est un exemple typique de série semi-convergente. On peut montrer que sa somme est $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Montrer que la série $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est convergente.

Nota Bene. Pour pouvoir appliquer le critère des séries alternées, il est essentiel que la suite (a_n) elle-même soit décroissante : il ne suffit pas qu'un équivalent le soit. Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est alternée, avec $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ décroissante vers zéro. Mais (a_n) n'est pas décroissante puisque

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2n} \geq a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

on ne peut appliquer directement le critère des séries alternées. Néanmoins, par un développement limité en $\dfrac{1}{n}$ de $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ on montre que la série est bien convergente.

1.3.3 Techniques classiques

a-Développements asymptotiques

Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple. On a vu que pour les séries à termes positifs, il suffit de se ramener à un équivalent. Ceci n'est plus le cas avec des séries à termes quelconques (penser au contre-exemple suivant $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\right)$). Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure. Dans ces deux situations, il suffit souvent d'écrire un développement asymptotique du terme général, c'est-à-dire d'être plus précis dans l'approximation. Celui-ci est généralement en $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et s'arrête au premier terme absolument convergent, en $\frac{1}{n^2}$ ou $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Exemples :

– La série

$$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

est divergente. En effet, on sait que pour x voisin de 0

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\varepsilon(x)\,x^3 \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Puisque $\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$ on en déduit :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\varepsilon_n}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ avec } \lim_{n\to 0}\varepsilon_n=0$$

Or la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère des séries alternées, les séries $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\sum_{n\geq 2}\frac{\varepsilon_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont absolument convergentes par le critère de Riemann, mais $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2n}$ est divergente par ce même critère. Il s'ensuit que $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

Rappel. Presque tous les développements limités classiques au voisinage de 0 se déduisent des trois développements suivants :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

dont on déduit les développements limités de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ etc.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

dont on déduit les développements limités de

$$\frac{1}{1 \pm x^\alpha}, \quad \ln(1 \pm x^\alpha), \quad \arctan(x)$$

Celui-ci peut d'ailleurs être vu comme un cas particulier du développement limité de la fonction puissance

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

1.3.4 Transformation d'Abel

Il s'agit d'une transformation qui ressemble à une intégration par parties... Soit en effet deux suites (a_n) et (b_n) , les suites des sommes partielles sont notées (A_n) et (B_n).

On a alors :

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i = \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i (B_i - B_{i-1})$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i = a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

On va utiliser cette transformation dans le contexte de ce qu'on appelle la règle d'Abel

Théorème 1.21 (Règle d'Abel). *Soit une série* $\sum a_n b_n$ *où* (a_n) *est une suite réelle positive, qui converge en décroissant vers* 0*, tandis que* (b_n) *est une suite, éventuellement complexe, telle que la suite des sommes partielles* (B_n) *est bornée, par* B*. Alors la série*

$$\sum a_n b_n \quad \textit{est convergente}$$

corollaire 1.22. *La série* $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *où* $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ *et* $\alpha > 0$*, est convergente*

Démonstration. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge en décroissant vers 0. Reste à étudier les sommes partielles de $e^{in\theta}$ Or :

$$e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots\cdots + e^{in\theta} = e^{i\theta}\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

le dénominateur n'est pas nul, vue l'hypothèse, et, plus précisément :

$$|B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

En prenant partie réelle et partie imaginaire, on a donc la convergence des séries de terme général

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \text{ et } \sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

sous les mêmes hypothèses. Une question : quand, dans le cas des séries ci-dessus décrites, peut-on assurer qu'il y a absolue convergence ? ■

Remarque.

$(*)$ Dire que les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées signifie qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant M$$

$(**)$ La formule obtenue par transformation d'Abel :

$$\sum_{i=n+1}^{N+p} a_i b_i = a_{N+p} B_{N+p} - a_{N+1} B_N + \sum_{i=N+1}^{N+p-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

est à rapprocher de l'intégration par parties :

$$\int_{(a,b)} F(x)\, g(x)\, dx = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(b) - \int_{(a,b)} f(x)\, G(x)\, dx$$

1.4 Exercices corrigés

Exercice 1. *Calculer la somme des séries de termes géneral suivant :*

$$u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}\ ,\ v_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

Exercice 2. *Déterminer la nature des séries suivantes* (*convergente ou divergente*)

$$(1) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ (2) * \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right).\ (3) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln n}$$

$$(4) * \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\ \ (5) * \sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right),\ (6) * \sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

Exercice 3. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *deux séries à termes strictement positif vérifient :*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \ \forall n \geq n_0$$

prouver que $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *converge , alors* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *converge aussi .*

Exercice 4. *Déterminer la nature des séries suivantes*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-2}}{e^n\ n!}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{e^n\ n!}$$

Exercice 5. *Déterminer pour quelle valeur de* α *la série suivante converge :*

$$\sum_{n\geq 1} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

Exercice 6. *Etudier la convergence des séries suivantes :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}, \ \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ \ln n\ \ln\left(\ln n\right)}$$

Exercice 7. *Préciser la nature de chacune des séries suivantes :*

$(a) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(b) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $(c) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

$(d) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$, $(e) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln(n)}$, $(f) * \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

$(g) * \sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(n\right)$, $(h) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$(j) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 8.

Soit $\alpha \neq 0$. *Etudier la nature des séries de terme général suivant (Utiliser un développement limité).*

$$(a) * u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} + (-1)^{n+1}};\ (b) * v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} + (-1)^n}$$

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos\left(n\right)}{n^{\alpha} + \cos\left(n\right)}, \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1* *Si* $\alpha > 1$ *montrer que la série converge absolument.*

2* *Si* $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, *montrer que la série converge*

3* *Si* $\alpha = \frac{1}{2}$ *montrer que la série diverge*

Corrigé d'exercice 1

On veut connaître la somme des séries de termes géneral suivant :

(a) Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire sous la forme :

$$\tfrac{1}{4x^2-1} = \frac{\alpha}{2x+1} + \frac{\beta}{2x-1} = \frac{\alpha\left(2x-1\right)+\beta\left(2x+1\right)}{4x^2-1}$$

$$= \frac{\beta-\alpha+2x\left(\alpha+\beta\right)}{4x^2-1}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta-\alpha=1 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}$$

alors

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

(b) Voir alors que dans la somme partielle :

$$S_N = \textstyle\sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{N} \displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2N+1}\right]$$

des termes se télescopent, et en déduire une expression simple de

$$S_N = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2N+1}\right]$$

donc la somme de la série est

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2N+1}\right] = \frac{1}{2}$$

De même pour la série de termes géneral

$$v_n = \frac{1}{n\left(n-1\right)} = \frac{1}{\left(n-1\right)} - \frac{1}{n}$$

alors

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{N}$$

donc la somme de la série est

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1$$

Corrigé d'exercice 2

- La série

$$(1) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

est à termes positifs et de plus on a

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \text{car } \ln(1+x) \leqslant x \ \forall x \in]-1, +\infty[$$

alors la série est convergente en effet la série de Rieman $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente

- La série

$$(2) * \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right)$$

est à termes positifs et de plus on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{2}{(n-1)}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{(n-1)}$$

$$\leqslant \frac{2}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \text{ (Théorème de comparaison)}$$

alors la série est convergente en effet la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$ est convergente

- La série

$$(3) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln n}$$

On a

$$\ln\left(x^2\right) \leqslant x^2 \ \forall x \in \left]0,+\infty\right[$$

alors

$$2\ln n \leqslant n^2 \Longrightarrow \frac{\ln n}{n^2} \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{\ln n}{n^2} \geqslant -\frac{1}{2} \Longrightarrow 1-\frac{\ln n}{n^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1-\frac{\ln n}{n^2}} \leqslant 2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^2\left[1-\frac{\ln n}{n^2}\right]} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^2-\ln n} \leqslant \frac{2}{n^2} \ \text{(Théorème de comparaison)}$$

donc la série est convergente en effet la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente

- La série

$$(4) * \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

On a

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}}$$

donc

$$\exists n_0 \ \in \mathbb{N}, \quad \ln\ln n_0 \geq 1$$

La série est donc convergente.

- La série

$$(5) * \sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+O\left(x^3\right)$$

alors

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!} \Longrightarrow 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

La série est donc convergente.

- La série

$$(6) * \sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

on utilise la règle de Cauchy donc on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}-1=0<1$$

La série est donc convergente.

- La série

$$(5) * \sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+O\left(x^3\right)$$

alors

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sim 1-\frac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}{2!} \Longrightarrow 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$$

La série est donc convergente.

- La série

$$(6) * \sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

on utilise la règle de Cauchy donc on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}-1=0<1$$

La série est donc convergente.

Corrigé d'exercice 3

On pose

$$c_n=\frac{a_n}{b_n}$$

Par hypothèse,

$$c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}=c_n \Longrightarrow c_{n+1}\leqslant c_n$$

La suite $\{c_n\}$ est donc décroissante pour $n\geqslant n_0$ Ceci implique que la suite est bornée, autrement dit, qu'il existe $C>0$ tel que

$$0\leqslant c_n\leqslant C$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ D'où,

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n = \sum_{n \geqslant 1} c_n b_n \leqslant C \sum_{n \geqslant 1} b_n$$

ce qui complète la démonstration de la proposition.

Corrigé d'exercice 4

- La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-2}}{e^n \ n!}$$

on utilise la formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

on obtient

$$\frac{n^{n-2}}{e^n \ n!} \sim \frac{n^{n-2}}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{n^2 \sqrt{2\pi n}} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série est donc convergente

** ou on utilise le critère de Raabe-Duhamel donc on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n-1}}{e^{(n+1)} \ (n+1)!}}{\dfrac{n^{n-2}}{e^n \ n!}} = \frac{1}{e} \frac{(n+1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{e} e^{(n-2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{e} \exp\left[\frac{(n-2)}{n} - \frac{(n-2)}{2n^2} + O\left(\frac{(n-2)}{n^3}\right)\right]$$

$$\sim \frac{1}{e} \exp\left[1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{(n-2)}{n^3}\right)\right]$$

$$\sim 1 - \frac{5}{2n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{(n-2)}{n^3}\right)$$

La série est donc convergente.

Corrigé d'exercice 5

- La série

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \tag{1.1}$$

On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^4\right)$$

alors

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

donc

$$\left(1 - n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} = \frac{1}{6^{\alpha}n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

Les valeur de α pour que la série soit convergente est

$$2\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

Corrigé d'exercice 6

Remarque 1.23 (Condensation de Cauchy). *On note respectivement S_n et $\widetilde{S}_n$ les sommes partielles des séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n u_{2^n}$$

On a alors, pour $n \leqslant 2^k$

$$S_n \leqslant u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leqslant u_1 + 2u_2 + \cdots + 2^k u_{2^k} = \widetilde{S}_k$$

Pour $n > 2^k$, on a

$$S_n \geqslant u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2^{k+1}-1} + \cdots + u_{2^k} \geqslant u_1 + 2u_2 + \cdots + 2^{k-1}u_{2^k} = \frac{1}{2}\widetilde{S}_k$$

Les suites $\{S_n\}$ et $\left\{\widetilde{S}_n\right\}$ sont donc soit toutes les deux bornées, soit toutes les deux non bornées.

Remarque 1.24 (Théorème de Schlömilch). *(une généralisation du théorème de Cauchy).Si $\{g_k\}$ est une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant*

$$(g_{k+1} - g_k) \leqslant C\left(g_k - g_{k-1}\right), \ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

et si $\{v_n\}$ est une suite positive strictement décroissante, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(g_{n+1} - g_n\right) v_{g_n} < +\infty$$

- La série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$$

- On applique le test de condensation de Cauchy. La série condensée étant

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{2^n\,(\ln 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}\,(\ln 2)^{\alpha}}$$

la série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $0 < \alpha \leqslant 1$. Si $\alpha \leqslant 0$ la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ se déduit immédiatement du test de comparaison.

- La série

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ \ln n\ \ln(\ln n)}$$

On applique le test de condensation de Cauchy. La série condensée étant

$$\sum_{n\geq 3} \frac{2^n}{2^n\ \ln 2^n\ \ln(\ln 2^n)} = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\,[\ln 2]\ \ln[n\,(\ln 2)]}$$

$\alpha = 1$ donc la série est divergente.

Corrigé d'exercice 7

- La série

$$(a) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente (Critère des séries alternées).

- La série

$$(b) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a la fonction $\sin(x)$ est croissante en $]0,\pi[$ donc

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ décroît vers } 0$$

alors la série est convergente (Critère des séries alternées).

- La série

$$(c) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$(c) * \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \pm 1 \neq 0$$

donc la série est divergente.

- La série

$$(d) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$$

on a la fonction $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est croissante en $]0, e^2[$ et decroissante en $]e^2, +\infty[$ donc

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \text{ décroît vers } 0$$

alors la série est convergente (Critère des séries alternées).

- La série

$$(e) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln(n)}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln(n)} = \pm\infty \neq 0$$

donc la série est divergente.

- La série

$$(f) * \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

donc la série est divergente.

- La série

$$(g) * \sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sin(n)$$

On pose $a_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \sin(n)$ on a

$$a_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

est une suite réelle positive, qui converge en décroissant vers 0 tandis que les sommes partielles $b_n = \sin(n)$ est bornée

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin(n)\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sin(0.5)}\right|$$

Alors la série la règle d'Abel assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sin(n)$

- La série

$$(h) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

est convergente en effet

$$\left| (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

- La série

$$(j) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est convergente en effet

$$\left| (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Corrigé d'exercice 8

- Pour la série

$$(a) * u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}$$

Cette série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ puisque :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente pour $\alpha > 1$. Mais cette série n'est pas absolument convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$ puisque :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$.

C'est une série alternée, car de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^{n+1}} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut lui appliquer le critère des séries alternées puisque la suite (a_n) est décroissante en effet :

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^\alpha + 1} - \frac{1}{(2n)^\alpha - 1} = \frac{(2n)^\alpha - (2n+1)^\alpha - 2}{[(2n+1)^\alpha + 1]((2n)^\alpha - 1)} \leqslant 0$$

de plus on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha + (-1)^{n+1}} = 0$$

donc la série est semi-convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$

- Pour la série

$$(b) * v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Cette série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ puisque :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente pour $\alpha > 1$. Mais cette série n'est pas absolument convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$ puisque :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$

C'est une série alternée, car de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^n} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ Cependant on ne peut lui appliquer le critère des séries alternées puisque la suite (a_n) n'est donc pas décroissante en effet :

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^\alpha - 1} - \frac{1}{(2n)^\alpha + 1} = \frac{(2n)^\alpha - (2n+1)^\alpha + 2}{[(2n+1)^\alpha + 1]((2n)^\alpha - 1)} \geqslant 0$$

Un développement asymptotique de $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ est :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right] = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right)$$

c'est-à-dire que le terme général de la série est la somme des trois termes

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha},\ \beta_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} \ \ et \ \ \delta_n = O\left(\frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right)$$

La série $\sum \alpha_n$ est convergente par le critère des séries alternées, la série$\sum \beta_n$ est convergente par le critère de Riemann si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ et la série $\sum \delta_n$ est convergente a fortiori. Par conséquent, la série initiale est convergente pour $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

- Pour la série

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}$$

Cette série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ puisque :

$$|u_n| = \left|\frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha - 1} \leqslant \frac{2}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente pour $\alpha > 1$.

Un développement asymptotique de $\frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}$ est :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{\cos(n)}{n^\alpha}\left[\frac{1}{1 + \frac{\cos(n)}{n^\alpha}}\right] = \frac{\cos(n)}{n^\alpha}\left(1 - \frac{\cos(n)}{n^\alpha} + O\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \right)$$

$$= \frac{\cos(n)}{n^\alpha} - \frac{\cos^2(n)}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{\cos^3(n)}{n^{3\alpha}}\right)$$

La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge en décroissant vers 0.Reste à étudier les sommes partielles de $\cos(n)$ Or :

$$e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots\cdots + e^{in\theta} = e^{i\theta}\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|}$$

alors la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^{\alpha}}$ est convergente par la Règle d'Abel pour $0 < \alpha \leqslant 1$, mais la série $(A.T.P)$ $\sum \frac{\cos^2(n)}{n^{2\alpha}}$ est convergente par le critère de Riemann si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ et la série $\sum O\left(\frac{\cos^3(n)}{n^{3\alpha}}\right)$ est convergente a fortiori. Par conséquent, la série initiale est convergente pour $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ la

$$\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2(n)}{n} + O\left(\frac{\cos^3(n)}{n^{3\alpha}}\right)$$

La série $(A.T.P)$ $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$ est divergente donc la série initiale est divergente pour $\alpha = \frac{1}{2}$

Chapitre 2

Séries entières

Introduction

On étudie dans ce chapitre une famille particulière de séries de fonctions : celles de la forme $\sum a_n x^n$, dites séries entières. On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés de la somme d'une série entière (domaine de convergence, continuité, etc.). On verra ensuite comment exprimer les fonctions usuelles comme des sommes de séries entières.