Intégrales dépendant d'un paramètre

Très souvent, la solution d'une équation différentielle aboutit au calcul d'une primitive :

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Dans de nombreux cas, il n'y a pas de forme explicite pour cette primitive et il faut donc étudier la fonction $F(x)$ telle qu'elle nous est donnée, c'est-à-dire sous la forme d'une intégrale, qui dépend du paramètre x. Dans ce chapitre nous donnons des conditions afin que cette fonction $F(x)$ soit continue et dérivable. Le point-clé des démonstrations sera la continuité uniforme. Nous appliquons ces méthodes à la transformation de Laplace et à celle de Fourier. Ne vous lancez pas dans ce chapitre sans de solides bases d'analyse : révisez les chapitres sur les limites, la continuité, la dérivabilité, et l'intégration.

1. Continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

1.1. Fonction définie par une intégrale

Soit $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables, x et t. Nous considérons x comme un paramètre et $t \in [a,b]$ comme une variable d'intégration. Cela nous permet de définir

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Un x étant fixé, pour que $F(x)$ existe, il suffit que l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ soit continue sur $[a,b]$. Mais ceci ne garantit pas la continuité de la fonction F. Nous donnons des conditions suffisantes pour que F soit continue, puis dérivable.

1.2. Continuité

Théorème 1.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [a,b]$ un intervalle fermé borné. Soit f une fonction continue sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur I.

Exemple 1.
Soit

$$F(x) = \int_0^\pi \sin(x+t)\cdot e^{xt^2}\,\mathrm{d}t,$$

définie pour $x \in I = \mathbb{R}$. La fonction $(x,t) \mapsto f(x,t) = \sin(x+t)\cdot e^{xt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, donc la fonction $x \mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On calcule que $F(0) = \int_0^\pi \sin(t) \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi = 2$. Même si on n'a pas de formule pour $F(x)$ en général, on déduit de la continuité que $F(x) \to F(0) = 2$ lorsque $x \to 0$.

Les démonstrations de cette section utilisent la continuité uniforme, qui fait l'objet de la section suivante.

Démonstration. Soit x_0 un point de I. Quitte à restreindre l'intervalle en considérant $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, on suppose que I est un intervalle fermé borné. Le théorème de Heine (théorème 6) s'applique alors à la fonction f sur $I \times J$: elle est donc uniformément continue. En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, *pour tout* $t \in J$,

$$|x - x_0| < \delta \implies \big|f(x,t) - f(x_0,t)\big| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a} \, .$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \big|F(x) - F(x_0)\big| &= \left|\int_a^b \big(f(x,t) - f(x_0,t)\big) \, \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b \big|f(x,t) - f(x_0,t)\big| \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant (b-a)\frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon \, . \end{aligned}$$

Donc F est continue en x_0. □

1.3. Dérivabilité

Théorème 2.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [a,b]$ un intervalle fermé borné. On suppose que :
- *$(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est une fonction continue sur $I \times J$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),*
- *la dérivée partielle $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et est continue sur $I \times J$.*

Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t) \, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \, \mathrm{d}t \, .}$$

On peut retenir l'abréviation mnémotechnique d'interversion dérivée/intégrale :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^b = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}$$

Exemple 2.
Étudions $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}$ pour $x \in]0,+\infty[$. Posons $f(x,t) = \frac{1}{x^2+t^2}$. Alors :
- f est continue sur $]0,+\infty[\times [0,1]$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[\times [0,1]$.

On aura donc

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2} \mathrm{d}t.$$

Pour cet exemple on peut calculer explicitement $F(x)$:
- $F(x) = \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan \frac{t}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$.
- $F'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x} \arctan \dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2} \arctan \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} \dfrac{1}{1+x^{-2}}$.
- Ce qui prouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2} \mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Pour simplifier l'écriture nous supposerons que x_0 n'est pas une extrémité de I. Nous devons démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et $x \neq x_0$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \epsilon\,.$$

Écrivons :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right) \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in [a,b]$, il existe x_1 strictement compris entre x_0 et x tel que

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,t)\,.$$

Fixons $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ soit inclus dans I : la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ est uniformément continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [a,b]$, d'après le théorème de Heine (théorème 6). Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \delta$ *et pour tout* $t \in [a,b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| < \frac{\epsilon}{b-a}\,.$$

Si $|x - x_0| < \delta$, alors tout x_1 strictement compris entre x_0 et x est encore tel que $|x_1 - x_0| < \delta$, donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| < \frac{\epsilon}{b-a}\,.$$

En reportant dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| &= \left| (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \\ &\leqslant |x - x_0|\frac{\epsilon}{b-a}\,. \end{aligned}$$

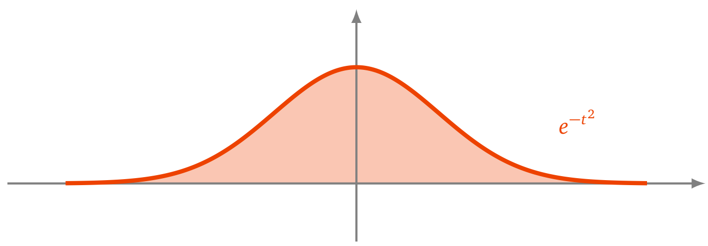
Il reste à intégrer par rapport à t entre a et b :

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |x - x_0|\frac{\epsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = |x - x_0|\epsilon\,,$$

d'où le résultat en divisant par $|x - x_0|$. □

Exemple 3.
Calculons *l'intégrale de Gauss* :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$



Posons, pour $x \in I = [0, +\infty[$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)^2 \qquad H(x) = F(x) + G(x)$$

1. **Étude de $F(x)$.**
   En posant $f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$, on note que :
   - f est une fonction continue sur $[0, +\infty[\times [0,1]$,
   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2+1)}$ est aussi continue.

   Donc, par le théorème 2, F est continue, dérivable et

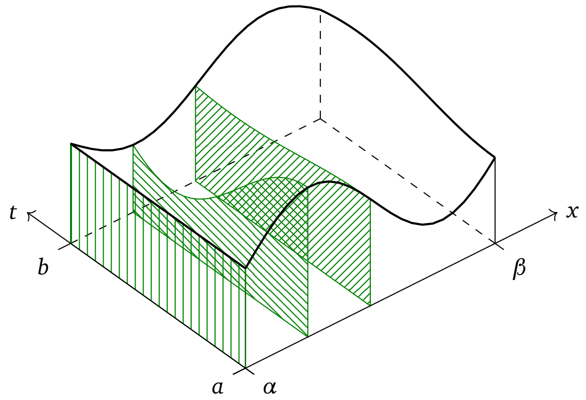
$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2\int_0^1 xe^{-x^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

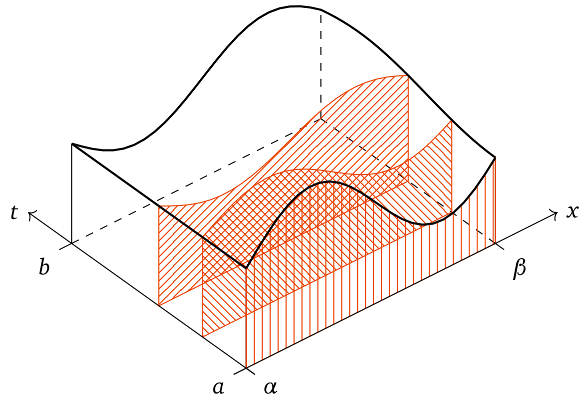
2. **Étude de $G(x)$.**
G n'est pas à proprement parler une intégrale dépendant d'un paramètre. Si on note $G_0(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, G_0 est simplement une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ et $G(x) = G_0(x)^2$. Comme $G_0'(x) = e^{-x^2}$ (la dérivée d'une primitive est la fonction elle-même), on a :
$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(G_0(x)^2\right) = 2G_0'(x)G_0(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u$$
Pour la dernière égalité, on a posé le changement de variable $t = xu$ (et donc $\mathrm{d}t = x\mathrm{d}u$, $u = \frac{t}{x}$ et u varie de 0 à 1 lorsque t varie de 0 à x).
3. **Étude de $H(x)$.**
Par nos calculs précédents, on trouve $H'(x) = F'(x) + G'(x) = 0$, pour tout $x \in [0, +\infty[$. Cela veut dire que la fonction H est une fonction constante. Or
$$H(0) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;+\; 0 = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
Donc H est la fonction constante égale à $\frac{\pi}{4}$.
4. **Limite de $H(x)$ en $+\infty$.**
   - Lorsque $x \to +\infty$, alors $G(x) \to \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.
   - Et $F(x) \to 0$ car
$$\left|F(x)\right| = \left|\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}\int_0^1 1\cdot\,\mathrm{d}t = e^{-x^2} \to 0.$$
   - Donc $H(x) = F(x) + G(x) \to \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.
5. **Conclusion.**
H est une fonction constante : $H(x) = \frac{\pi}{4}$, sa limite en $+\infty$ est donc aussi $\frac{\pi}{4}$. Mais on a calculé cette limite d'une autre façon, ce qui prouve :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1.4. Théorème de Fubini

Théorème 3 (Théorème de Fubini).
Soient $I = [\alpha, \beta]$ et $J = [a, b]$ deux intervalles fermés bornés. Soit f une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par
$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
est intégrable sur I et
$$\int_\alpha^\beta F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\;.$$

On retient que l'on peut intervertir l'ordre d'intégration :
$$\int_\alpha^\beta \int_a^b = \int_a^b \int_\alpha^\beta$$
Géométriquement, on se souvient que calculer une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ revient à déterminer l'aire sous le graphe, comme somme de segments de hauteur $f(t)$. Ces segments sont en fait des rectangles de largeur infinitésimale $\mathrm{d}t$.





Ici, pour nos fonctions de deux variables, on calcule d'abord l'aire d'une tranche parallèle à l'axe des t (en vert sur la figure), puis on fait la somme (c'est-à-dire on effectue une seconde intégration) des aires de toutes les tranches (qui ont en fait une épaisseur infinitésimale). On pourrait faire la même opération en commençant par les tranches parallèles à l'axe des x (en rouge sur la figure). Le théorème de Fubini affirme que ces deux méthodes conduisent à la même valeur. Ce nombre correspond au volume sous la portion de surface.

Exemple 4.
Calculons :

$$I = \int_0^\pi \left(\int_0^1 (t \sin x + 2x)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

Première méthode. On intègre d'abord par rapport à t, puis à x :

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{t=0}^{t=1} (t \sin x + 2x)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\pi} \left[\frac{t^2}{2} \sin x + 2xt \right]_{t=0}^{t=1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\frac{\sin x}{2} + 2x \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{2} + x^2 \right]_{x=0}^{x=\pi} = \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Seconde méthode. On utilise le théorème de Fubini qui affirme que l'on peut d'abord intégrer par rapport à x, puis par rapport à t :

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{t=0}^{t=1} (t \sin x + 2x)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=1} \left(\int_{x=0}^{x=\pi} (t \sin x + 2x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \qquad \text{par Fubini} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \left[-t \cos x + x^2 \right]_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=1} (2t + \pi^2)\,\mathrm{d}t = \left[t^2 + \pi^2 t \right]_{t=0}^{t=1} = \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Démonstration. Par le théorème 1, la fonction F est continue sur I, donc intégrable. Pour $x \in I$, considérons la fonction :

$$\varphi(x,t) = \int_a^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\,.$$

C'est une fonction continue sur $I \times J$. (Pour le prouver considérer $\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0) = \int_{x_0}^x f(y,t)\,\mathrm{d}y + \int_a^{x_0} \big(f(y,t) - f(y,t_0)\big)\,\mathrm{d}y$. Le premier terme est petit pour x proche de x_0 car f est bornée ; le second est petit par continuité uniforme de f, exactement comme dans la preuve théorème du 1.)
La dérivée partielle par rapport à x de $\varphi(x,t)$ est $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$, qui est elle aussi continue sur $I \times J$. On peut donc lui appliquer le théorème 2. La fonction qui à x associe

$$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_a^x f(y,t)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t$$

est dérivable et sa dérivée est :

$$\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On obtient donc, pour tout $x \in I$:

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(y,t)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t = \Phi(x) = \int_a^x \Phi'(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^x \left(\int_a^b f(y,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y\,.$$

D'où le résultat en prenant $x = \beta$. □

1.5. Bornes qui varient

Une catégorie un peu différente d'intégrales est lorsque ce sont les bornes qui sont les paramètres de la fonction :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où u, v sont des fonctions de x.

Théorème 4.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u, v : I \to [a,b]$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors la fonction G définie sur l'intervalle I par

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$G'(x) = v'(x) f\big(v(x)\big) - u'(x) f\big(u(x)\big).$$

Exemple 5.
Calculons la dérivée de

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

pour $x > 1$. Pour appliquer le théorème 4, on se restreint à un intervalle $[a,b]$ tel que, pour x fixé, $x \in [a,b] \subset]1, +\infty[$. Avec $f(t) = \frac{1}{\ln t}$, $u(x) = x$, $v(x) = x^2$, on a :

$$G'(x) = v'(x) \cdot f\big(v(x)\big) - u'(x) \cdot f\big(u(x)\big) = 2x \frac{1}{\ln(x^2)} - 1 \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

Le plus simple n'est pas d'apprendre la formule mais de refaire le calcul à chaque fois, car ce calcul est juste la dérivée d'une composition.

Démonstration. Considérons d'abord la fonction H définie par

$$H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction H est la composée de deux fonctions :

$$H(x) = F\big(v(x)\big) = (F \circ v)(x)$$

où F est la primitive

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme F et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ alors H est de classe $\mathscr{C}^1$ et par la formule de dérivée d'une composition :

$$H'(x) = v'(x) \cdot F'\big(v(x)\big).$$

Mais comme $F'(x) = f(x)$ alors

$$H'(x) = v'(x) f\big(v(x)\big).$$

Si on fait le même calcul pour $K(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, on trouve $K'(x) = u'(x) f\big(u(x)\big)$.
Finalement

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = -K(x) + H(x),$$

donc

$$G'(x) = -K'(x) + H'(x) = -u'(x) f\big(u(x)\big) + v'(x) f\big(v(x)\big).$$

□

Mini-exercices. 1. Soit $F(x) = \int_0^1 \cos(x - \pi t)\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \in [0, \pi]$. F est-elle continue ? Dérivable ? Si oui, que vaut sa dérivée ? Calculer $\int_0^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x$ de deux façons différentes.

2. Soit $F(x) = \int_0^1 e^{t \sin x}\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. F est-elle continue ? Dérivable ? Si oui, que vaut sa dérivée ? Que valent les limites $\lim_{x\to 0} F(x)$ et $\lim_{x \to 0} F'(x)$? Retrouver ces résultats en calculant une expression explicite de $F(x)$.

3. Calculer le volume sous la portion de surface sous le graphe de $f(x,y) = \sqrt{x+xy} + \frac{y}{x+1}$ pour $(x,y) \in [0,1]\times[2,3]$.
4. Soit $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. Justifier que f peut être prolongée en une fonction continue en 0. Soit $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \in [0,+\infty[$. Calculer $F(0)$ et $F'(x)$. En déduire le signe de $F(x)$ pour x proche de 0.

2. Continuité uniforme

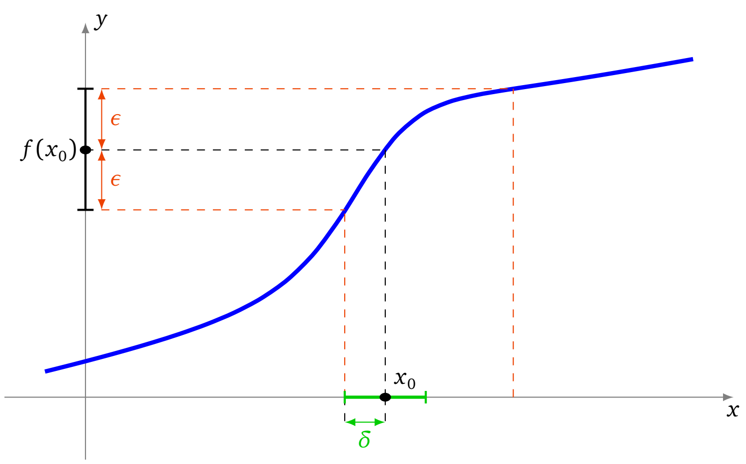
Cette section a pour but de détailler les outils qui ont servi aux preuves de la section précédente et peut être éludée lors d'une première lecture. Le résultat principal est le théorème de Heine qui affirme que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

2.1. Fonctions d'une variable

La continuité uniforme est une notion plus forte que la continuité. On peut dire que la continuité uniforme est à la continuité ce que la convergence uniforme est à la convergence simple.

Définition 1.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1. On dit que f est ***continue*** sur I si
$$\underline{\forall x_0 \in I} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \epsilon.$$
2. On dit que f est ***uniformément continue*** sur I si
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \underline{\forall x_0 \in I} \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \epsilon.$$



Rappelons que $|x - x_0| \leqslant \delta$ équivaut à $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
Évidemment, la continuité uniforme implique la continuité, mais la réciproque est fausse en général. La différence entre les deux est subtile. Dans la continuité simple, la valeur de δ peut dépendre non seulement de ϵ mais aussi de x_0. Dans la continuité uniforme, elle ne peut dépendre que de ϵ : pour un ϵ donné, on peut choisir le même δ pour tous les points de l'intervalle.

2.2. Théorème de Heine

Théorème 5 (Théorème de Heine)**.**
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

La démonstration est reportée en fin de section.

Comme applications immédiates :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$.

- La fonction $x \mapsto 1/x$ est uniformément continue sur tout intervalle du type $[\epsilon, 1]$ (avec $0 < \epsilon < 1$).

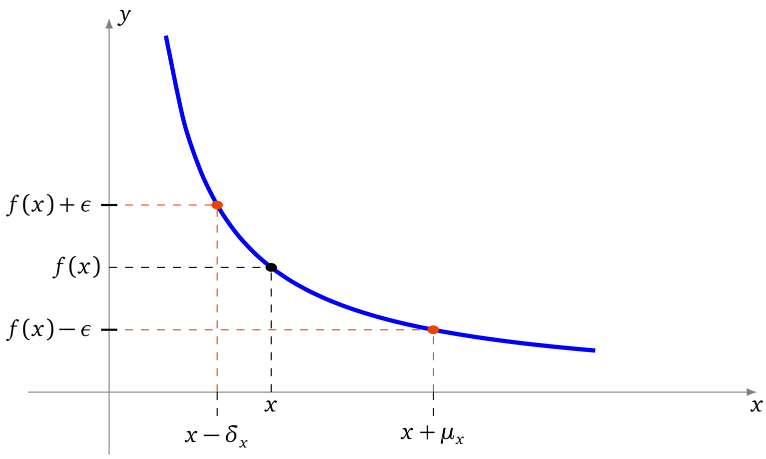
Pour bien comprendre la subtilité de la continuité uniforme, nous allons reprendre ces deux exemples à la main. Nous allons vérifier que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$, mais nous commençons par prouver que sur l'intervalle $]0,1]$ (qui n'est *pas* fermé borné) la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est *pas* uniformément continue.

Exemple 6.
Examinons la fonction inverse sur $I =]0,1]$:

$$\begin{array}{rccl} f & : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Soit $x \in]0,1]$ (x joue ici le rôle de x_0 dans la définition de la continuité uniforme) et soit $0 < \epsilon < 1$. L'image réciproque par f de l'intervalle $\big[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon\big]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}\Big(\big[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon\big]\Big) = \left[\frac{1}{f(x)+\epsilon}, \frac{1}{f(x)-\epsilon}\right] = \big[x-\delta_x, x+\mu_x\big]$$



où l'on a posé

$$\delta_x = x - \frac{1}{f(x)+\epsilon} = x - \frac{1}{\frac{1}{x}+\epsilon} = \frac{\epsilon x^2}{1+\epsilon x} \qquad \text{et} \qquad \mu_x = \frac{1}{f(x)-\epsilon} - x = \frac{1}{\frac{1}{x}-\epsilon} - x = \frac{\epsilon x^2}{1-\epsilon x}.$$

Notons que $\delta_x < \mu_x$. Ainsi $[x-\delta_x, x+\delta_x]$ est le plus grand intervalle symétrique dont l'image par f est contenu dans $[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon]$. Observons que, pour $\epsilon > 0$ fixé, δ_x tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Bien sûr, pour n'importe quel $\delta' < \delta_x$, l'implication

$$|x'-x| \leqslant \delta' \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x')-f(x)\big| \leqslant \epsilon$$

reste vraie. Mais il n'est pas possible de choisir un même $\delta' > 0$ tel que cette implication reste vraie pour *tous* les x de $]0,1]$. En effet un tel δ' devrait être inférieur à tous les δ_x, mais ceux-ci tendent vers 0. Conclusion : la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Exemple 7.
Examinons maintenant la fonction racine carrée sur l'intervalle $I = [0,1]$:

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Soient $x \in [0,1]$ et $0 < \epsilon < 1$.

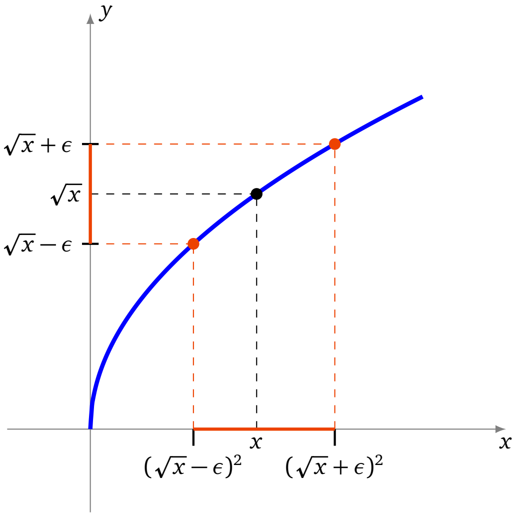
- Cas $\epsilon < f(x)$.
  L'image réciproque par f de l'intervalle $\big[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon\big]$ est l'intervalle :
  $$f^{-1}\Big(\big[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon\big]\Big) = \big[(\sqrt{x}-\epsilon)^2, (\sqrt{x}+\epsilon)^2\big] = \big[x-(2\epsilon\sqrt{x}-\epsilon^2), x+(2\epsilon\sqrt{x}+\epsilon^2)\big]$$
- Cas $\epsilon \geqslant f(x)$. On a :
  $$f^{-1}\Big(\big[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon\big]\Big) = \big[0, (\sqrt{x}+\epsilon)^2\big] = \big[0, x+(2\epsilon\sqrt{x}+\epsilon^2)\big]$$

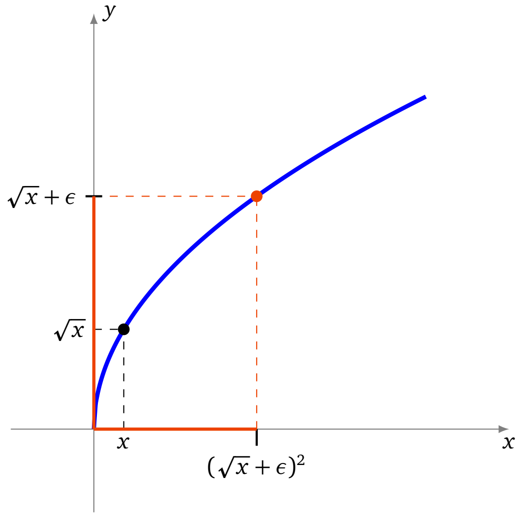
La longueur de ces intervalles dépend de x à priori. Posons $\delta = \epsilon^2$. Nous allons cependant démontrer que, pour tous $x, x' \in [0,1]$, si $|x'-x| < \delta$, alors $|f(x')-f(x)| \leqslant \epsilon$, ce qui entraînera que f est uniformément continue sur I.

- Supposons d'abord $\epsilon < \sqrt{x}$. Alors $2\epsilon\sqrt{x}+\epsilon^2 > 2\epsilon\sqrt{x}-\epsilon^2 > \epsilon^2 = \delta$. Donc l'intervalle $f^{-1}\Big(\big[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon\big]\Big)$ contient l'intervalle $[x-\delta, x+\delta]$: si x' vérifie $|x'-x| < \delta$, alors $|f(x')-f(x)| \leqslant \epsilon$.

- Supposons maintenant $\epsilon \geqslant \sqrt{x}$. Si $0 \leqslant x' \leqslant x+\delta$, alors $0 \leqslant x' \leqslant x+(2\epsilon\sqrt{x}+\epsilon^2)$, donc $|\sqrt{x'}-\sqrt{x}| \leqslant \epsilon$: si $|x'-x|<\delta$, alors $|f(x')-f(x)| \leqslant \epsilon$.

Conclusion : la fonction f est uniformément continue sur $[0,1]$. Bien sûr, c'est aussi une conséquence immédiate du théorème de Heine ; ce que l'on gagné en plus ici, c'est une valeur explicite pour δ : $\delta=\epsilon^2$, qui dépend du choix de ϵ, mais, comme on le souhaitait, pas du point $x \in [0,1]$.



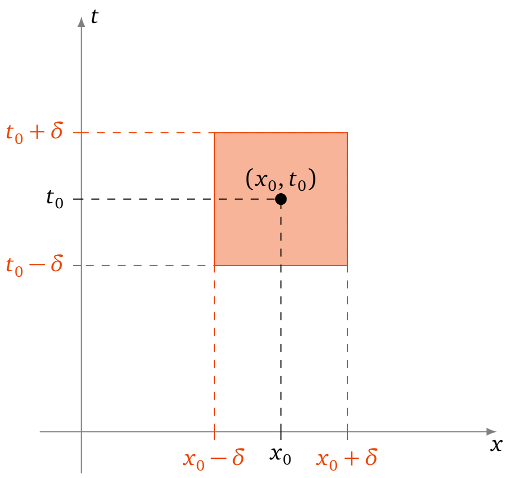


2.3. Fonctions de plusieurs variables

La continuité uniforme est une notion générale. Vous aurez noté que nous en avons eu besoin dans la section précédente pour des fonctions de deux variables.

Définition 2.
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f:(x,t)\longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1. On dit que f est ***continue*** sur $I\times J$ si
$$\underline{\forall (x_0,t_0)\in I\times J} \quad \forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall (x,t)\in I\times J$$
$$(x,t)\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[t_0-\delta,t_0+\delta] \implies \big|f(x,t)-f(x_0,t_0)\big| \leqslant \epsilon.$$
2. On dit que f est ***uniformément continue*** sur $I\times J$ si
$$\forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \underline{\forall (x_0,t_0)\in I\times J} \quad \forall (x,t)\in I\times J$$
$$(x,t)\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[t_0-\delta,t_0+\delta] \implies \big|f(x,t)-f(x_0,t_0)\big| \leqslant \epsilon.$$



Attention, il ne suffit pas que les applications partielles $x\mapsto f(x,t)$ et $t\mapsto f(x,t)$ soient continues sur I et J respectivement pour que f soit continue sur $I\times J$.

Théorème 6.
Soient I et J deux intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors f est uniformément continue sur $I \times J$.

2.4. Démonstration du théorème de Heine

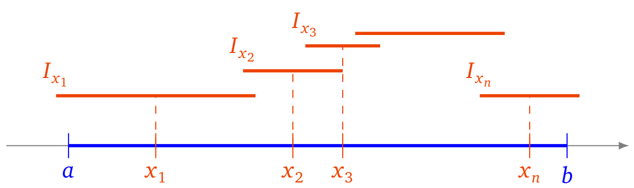
Nous commençons par rappeler le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir le chapitre « Suites »), dont une variante est le lemme de Borel-Lebesgue. Les deux sont des cas particuliers de résultats de topologie beaucoup plus généraux que vous apprendrez plus tard.

Théorème 7 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
Toute suite bornée de réels admet une sous-suite convergente.

Le lemme de Borel-Lebesgue affirme que, de tout recouvrement d'un intervalle $[a,b]$ fermé borné par des intervalles ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Lemme 1 (Lemme de Borel-Lebesgue)**.**
*Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Étant donné pour chaque $x \in [a,b]$ un intervalle ouvert I_x tel que $x \in I_x$, il existe un nombre **fini** de points $x_1,\dots,x_m \in [a,b]$ tels que*

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{x_i} .$$



Démonstration.
- La première étape consiste à montrer que, pour un certain entier n, tout intervalle de la forme $\left]y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}\right[$ est inclus dans au moins l'un des I_x :
$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [a,b] \quad \exists x \in [a,b] \qquad \left]y-\tfrac{1}{n}, y+\tfrac{1}{n}\right[\subset I_x$$
Supposons par l'absurde que cette affirmation soit fausse. C'est-à-dire, supposons que sa négation soit vraie :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \qquad \left]y-\tfrac{1}{n}, y+\tfrac{1}{n}\right[\not\subset I_x$$
Pour chaque n, soit $y_n \in [a,b]$ l'un des y dont l'existence est affirmée ci-dessus. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite $(y_{\phi(k)})$, qui converge vers $c \in [a,b]$. En particulier, aucun des intervalles $\left]y_{\phi(k)}-\frac{1}{\phi(k)}, y_{\phi(k)}+\frac{1}{\phi(k)}\right[$ n'est inclus dans I_c, ce qui est impossible, car c est la limite de $(y_{\phi(k)})$.
- En utilisant la première étape, nous allons démontrer le lemme par l'absurde : nous supposons donc qu'aucune réunion finie des intervalles I_x ne recouvre $[a,b]$. Fixons un entier n dont l'existence est affirmée ci-dessus. Soit y_1 un point de $[a,b]$. Il existe x_1 tel que $\left]y_1-\frac{1}{n}, y_1+\frac{1}{n}\right[\subset I_{x_1}$. Comme I_{x_1} ne recouvre pas $[a,b]$, il existe un point y_2 de $[a,b]$ qui n'appartient pas à I_{x_1}. Ce point est à distance au moins $\frac{1}{n}$ de y_1. Il existe un point x_2 tel que $\left]y_2-\frac{1}{n}, y_2+\frac{1}{n}\right[\subset I_{x_2}$. La réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$ ne recouvre pas $[a,b]$. Donc il existe y_3 en dehors de cette réunion : y_3 est à distance au moins $\frac{1}{n}$ de y_1 et de y_2. Par récurrence, on construit ainsi une suite (y_k) de points de $[a,b]$ telle que deux quelconques de ses éléments sont à distance au moins $\frac{1}{n}$. En appliquant une fois de plus le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite de (y_k) devrait converger, ce qui n'est pas possible. D'où la contradiction.

□

du théorème 5. Soient $[a,b]$ un intervalle fermé borné et f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue, pour tout $x \in [a,b]$, il existe un réel strictement positif, que nous noterons δ_x, tel que, pour tout $x' \in [a,b]$,

$$|x'-x| \leqslant \delta_x \implies \left|f(x')-f(x)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour chaque x, considérons l'intervalle ouvert $I_x = \left]x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2}\right[$. Par le lemme de Borel-Lebesgue, on peut extraire de cette famille d'intervalles ouverts un sous-recouvrement fini de $[a,b]$:

$$\exists x_1,\dots,x_m \in [a,b] \qquad [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{x_i}$$

On note $\delta = \min_{i=1,\dots,m} \frac{\delta_{x_i}}{2}$. Si $|x'-x| \leqslant \delta$, alors d'une part il existe $i \in \{1,\dots,m\}$ tel que $x \in I_{x_i}$; donc $|x-x_i| < \frac{\delta_{x_i}}{2} \leqslant \delta_{x_i}$. D'autre part $|x'-x_i| \leqslant |x'-x| + |x-x_i| \leqslant \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leqslant \delta_{x_i}$. Ainsi lorsque $|x'-x| \leqslant \delta$,

$$\left|f(x')-f(x)\right| \leqslant \left|f(x')-f(x_i)\right| + \left|f(x_i)-f(x)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,$$

par définition de δ_{x_i}. Ce qui prouve la continuité uniforme de f. □

Nous omettons la démonstration du théorème 6, qui repose sur le théorème 5.

Mini-exercices. 1. Trouver une constante explicite δ (en fonction de ϵ) qui assure l'uniforme continuité de la fonction $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Même question avec $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0,1]$.
3. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est uniformément continue sur $]0,\pi]$.
4. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne (il existe k tel que $\left|f(x)-f(y)\right| \leqslant k|x-y|$ pour tous $x,y \in I$) alors f est uniformément continue sur I.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

3. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre

3.1. Fonction définie par une intégrale impropre

Comme si cela ne suffisait pas, nous avons encore une difficulté à ajouter : que se passe-t-il si l'intégrale définissant une fonction est prise sur un intervalle infini, ou bien si la fonction à intégrer tend vers l'infini en un point ? La convergence d'une intégrale s'étudie en isolant les problèmes. Chaque type de problème peut ensuite se ramener par un changement de variable au cas d'une intégrale sur $[0,+\infty[$. Afin de ne pas alourdir les notations, nous nous limiterons à ce dernier cas. Soit $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times [0,+\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que l'intégrale de l'application partielle $t \longmapsto f(x,t)$ soit convergente sur $[0,+\infty[$. Nous souhaitons étudier la fonction qui à $x \in I$ associe

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme vous le savez, une intégrale convergente est définie comme une limite d'intégrales sur des intervalles bornés. Posons

$$F_A(x) = \int_0^{A} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{d'où} \quad F(x) = \lim_{A\to+\infty} F_A(x)\,.$$

Les résultats des sections précédentes donnent des conditions sous lesquelles $F_A(x)$ est continue et dérivable *pour A fixé*. Pour passer à la limite quand A tend vers l'infini, nous allons ajouter une hypothèse dite de *convergence dominée*.

3.2. Convergence dominée

Définition 3.
Soit $f : I \times [0,+\infty[$ une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ vérifie l'hypothèse de ***convergence dominée*** s'il existe $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :
1. l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente,
2. et telle que

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad \forall x \in I \qquad \left|f(x,t)\right| \leqslant g(t)\,.$$

Remarque. 1. Noter que g est nécessairement à valeurs positives, donc $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est en fait absolument convergente.
2. Dans le cas de convergence dominée, pour chaque $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est donc aussi absolument convergente.

3. Il existe une hypothèse plus faible qui implique la convergence dominée et permet aussi d'énoncer les résultats suivants : c'est la convergence uniforme de (F_A) vers F, mais nous n'en parlerons pas ici.

Exemple 8.
Soit $f(x,t) = \frac{\sin x+\sin t}{1+x^2+t^2}$. Alors f vérifie l'hypothèse de convergence dominée sur $I = \mathbb{R}$ car

$$\left|f(x,t)\right| = \left|\frac{\sin x + \sin t}{1+x^2+t^2}\right| \leqslant \frac{2}{1+t^2} = g(t)$$

avec $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ qui converge.

3.3. Continuité

Sous l'hypothèse de convergence dominée, les résultats sont bien ceux que vous attendez.

Théorème 8.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [0,+\infty[$. Soit f une fonction continue sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et qui vérifie l'hypothèse de convergence dominée. *Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur I.

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors il existe $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$. Fixons un tel A. Cela implique que, *pour tout $x \in I$* :

$$\left|F(x) - F_A(x)\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^{+\infty} \left|f(x,t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_A^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$$

La fonction $F_A(x) = \int_0^A f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction définie par une intégrale sur l'intervalle fermé borné $[0,A]$, donc par le théorème 1, la fonction $x \mapsto F_A(x)$ est continue. Fixons x_0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour $|x - x_0| \leqslant \delta$ on ait $\left|F_A(x) - F_A(x_0)\right| \leqslant \epsilon$.
Pour conclure :

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| \leqslant \left|F(x) - F_A(x)\right| + \left|F_A(x) - F_A(x_0)\right| + \left|F_A(x_0) - F(x_0)\right| \leqslant 3\epsilon$$

Ce qui prouve la continuité de F. □

3.4. Dérivabilité

Théorème 9.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [0,+\infty[$. On suppose que :

- *$(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est une fonction continue sur $I \times J$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
- *la dérivée partielle $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe, est continue sur $I \times J$ et vérifie l'hypothèse de* convergence dominée.

Alors la fonction F, définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La preuve est similaire à celle du théorème 2, en la modifiant comme pour le théorème 8.

Exemple 9.
Calculons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. **F est continue.**
Soit $f(x,t) = \cos(2xt)e^{-t^2}$ définie et continue sur $I \times J = \mathbb{R} \times [0,+\infty[$. On a $\left|f(x,t)\right| \leqslant e^{-t^2}$. Or $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, avec $g(t) = e^{-t^2}$, on vient de prouver que f vérifie l'hypothèse de convergence dominée. Ainsi, par le théorème 8, la fonction $x \mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. **Dérivée de F.**
   On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t\sin(2tx)e^{-t^2}.$$
   Avec cette fois $g(t) = 2te^{-t^2}$ (dont l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge), on sait que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue et vérifie l'hypothèse de convergence dominée. Par le théorème 9, on obtient que $x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue, et surtout :
$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{+\infty}\cos(2xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(2xt)e^{-t^2}\right]\mathrm{d}t = -2\int_0^{+\infty}\sin(2tx)\,te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
3. **Calcul de $F'(x)$ en fonction de $F(x)$.**
   On fait une intégration par parties avec $u(t) = \sin(2xt)$ et $v'(t) = te^{-t^2}$ (donc $u'(t) = 2x\cos(2xt)$ et $v(t) = \frac{-e^{-t^2}}{2}$) :
$$F'(x) = -2\int_0^{+\infty}\sin(2tx)\cdot te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -2\left[\sin(2xt)\cdot\frac{-e^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}2x\cos(2xt)\cdot\frac{-e^{-t^2}}{2}\,\mathrm{d}t$$
   Le crochet vaut 0 et ainsi :
$$F'(x) = -2xF(x)$$
4. **Calcul de $F(x)$.**
   Ainsi F vérifie l'équation différentielle élémentaire $F'(x) = -2xF(x)$. En écrivant $\frac{F'(x)}{F(x)} = -2x$ et en intégrant, on obtient $\ln|F(x)| = -x^2 + c$, d'où
$$F(x) = F(0)e^{-x^2}.$$
   Or, on a vu que $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir l'exemple 3), d'où
$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}.$$

Sans l'hypothèse de convergence dominée, les théorèmes 8 et 9 ne sont plus valides.

Exemple 10.
Soit $f(x,t) = \dfrac{x}{1+(xt)^2}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ et
$$\begin{aligned} F_A(x) &= \int_0^A f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{x\,\mathrm{d}t}{1+(xt)^2} = \int_0^{xA}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \qquad \text{avec } u = xt \\ &= \Big[\arctan(u)\Big]_0^{xA} = \arctan(xA). \end{aligned}$$
Donc :
$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} F_A(x) = \lim_{A\to+\infty}\arctan(xA) = \begin{cases} +\pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Ainsi F est discontinue.

3.5. Théorème de Fubini

Théorème 10 (Théorème de Fubini).
Soient $I = [\alpha,\beta]$ un intervalle fermé borné et $J = [0,+\infty[$. Soit f une fonction continue sur $I\times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et qui vérifie l'hypothèse de convergence dominée. *Alors la fonction F est intégrable sur I et*
$$\int_\alpha^\beta F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta\left(\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\,.$$

Mini-exercices. 1. Soit $f(x,t) = \frac{\ln t}{x^2+t^2}$ définie pour $x\in[0,1]$ et $t\in[1,+\infty[$. Montrer que $F(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue, dérivable, de dérivée continue. Calculer $F'(x)$.

2. Même exercice avec $f(x,t) = t^x e^{-t}$ définie sur $[1,10]\times[1,+\infty[$.

3. Soit $f(x,t) = \phi(x)\cdot\psi(t)$ avec $\phi : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$, et $\psi : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction d'intégrale absolument convergente. Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue, dérivable. Trouver une formule simple pour $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+\sqrt{t}}$. Montrer que F est définie en $x = 0$. À l'aide d'un changement de variable sur t, montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$. Calculer la limite de F en 0. Que peut-on dire pour la dérivée ?

4. Transformée de Laplace

Cette section est une introduction à la transformée de Laplace, qui est une opération mathématique très utilisée en électronique, où elle correspond à changer une fonction qui dépend du temps t en une fonction qui dépend de la fréquence s. Elle est aussi utile pour résoudre les équations différentielles, car la transformée de Laplace permet de transformer des opérations d'analyse (dérivation/intégration) en des opérations algébriques (multiplication/division).

4.1. Définition

Définition 4.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La ***transformée de Laplace*** de f est la fonction F définie par :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Si l'on veut insister sur la dépendance vis-à-vis de la fonction f (plutôt que du paramètre s), alors on note plutôt cette même intégrale par :

$$\mathscr{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Remarque.
Dans ce cours :

- Nous supposerons que s est un paramètre réel. (Alors qu'en toute généralité $s \in \mathbb{C}$.)
- Nous supposerons les fonctions continues. (Alors qu'en électronique les fonctions sautent souvent d'une valeur à une autre.)
- Lorsque l'on écrit $F(s)$, cela signifiera par convention que l'intégrale converge.

Exemple 11. 1. Soit $f(t) = 1$, la fonction constante égale à 1. Alors, pour $s > 0$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right) - \left(\frac{-e^{0}}{s}\right) = \frac{1}{s}.$$

2. Soit $f(t) = e^t$. Alors, pour $s > 1$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(1-s)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-1}.$$

3. Soit $f(t) = t$. On effectue une intégration par parties avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-st}$. Alors pour $s > 0$:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[t \cdot \frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{-e^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{s}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}$$

Voici un critère simple qui garantit l'existence et de bonnes propriétés pour la transformée de Laplace.

Proposition 1.
Supposons qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^n} = 0.$$

1. *Alors, pour tout $s > 0$, l'intégrale $F(s)$ existe.*
2. *La fonction $s \mapsto F(s)$ est continue sur $]0, +\infty[$.*
3. $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$.
4. *La fonction $s \mapsto F(s)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et*

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} t f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

Remarque : on pourrait raffiner la condition. En effet, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{f(t)}{e^{\alpha t}} \to 0$ (lorsque $t \to +\infty$), alors les mêmes conclusions sont valides, mais seulement pour $s > \alpha$.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que l'application $(s,t) \mapsto \varphi(s,t) = f(t)e^{-st}$ vérifie l'hypothèse de convergence dominée sur $[s_0,+\infty[\times[0,+\infty[$, quel que soit $s_0 > 0$. Nous avons supposé f continue en 0, donc le seul point incertain est $+\infty$. Fixons $s_0 > 0$. Pour $s \geqslant s_0$, on écrit simplement que $|\varphi(s,t)| \leqslant |f(t)|e^{-s_0 t}$. Il nous reste à montrer que $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-s_0 t}\,dt$ est absolument convergente. Comme $f(t)/t^n \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, alors il existe $A > 0$, tel que pour $t \geqslant A$, $|f(t)|/t^n \leqslant 1$. Ainsi

$$\int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-s_0 t}\,dt = \int_A^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t^n} t^n e^{-s_0 t}\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} t^n e^{-s_0 t}\,dt.$$

Cette dernière intégrale est convergente. Donc φ vérifie l'hypothèse de convergence dominée.

1. $\varphi(s,t)$ vérifiant l'hypothèse de convergence dominée, alors, pour chaque $s > 0$, l'intégrale $F(s)$ est absolument convergente.
2. Par le théorème 8, la fonction $s \mapsto F(s)$ est continue.
3. Comme ci-dessus, pour $t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant t^n \leqslant e^{\alpha t}$ pour un certain $\alpha > 0$.
   - Sur $[0,A]$, f est continue donc majorée par un certain $M > 0$. Aussi :
   $$\int_0^A |f(t)|e^{-st}\,dt \leqslant M\int_0^A e^{-st}\,dt = M\Big[-\frac{e^{-st}}{s}\Big]_0^A = M\frac{1-e^{-sA}}{s} \to 0 \quad \text{lorsque } s \to +\infty$$
   - Sur $[A,+\infty[$, on peut écrire pour $s > \alpha$:
   $$\int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-st}\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-st}\,dt = \Big[\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\Big]_A^{+\infty} = \frac{-e^{(\alpha-s)A}}{\alpha-s} \to 0 \quad \text{lorsque } s \to +\infty$$

   Conclusion : $\big|F(s)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} \big|f(t)\big|e^{-st}\,dt \to 0$ lorsque $s \to +\infty$.
4. La dérivée partielle $(s,t) \longmapsto \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) = -tf(t)e^{-st}$ vérifie l'hypothèse de convergence dominée (car $tf(t)/t^{n+1} \to 0$). Donc par le théorème 9, $s \mapsto F(s)$ est dérivable et sa dérivée est celle attendue.

□

4.2. Propriétés

Proposition 2. *1.* ***Linéarité.*** $\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{L}(f) + \mu\mathscr{L}(g)$.

2. ***Dérivation.*** $\boxed{\mathscr{L}(f') = s\mathscr{L}(f) - f(0)}$
3. ***Intégration.*** $\mathscr{L}(\int f) = \frac{1}{s}\mathscr{L}(f)$ *où* $\int f$ *est la primitive de* f *s'annulant en* $s = 0$.
4. ***Théorème du retard.*** $\mathscr{L}\big(f(t-\tau)\big) = e^{-s\tau}\mathscr{L}\big(f(t)\big)$.
5. ***Théorème de la valeur initiale.*** $\lim_{s\to+\infty} sF(s) = f(0)$.
6. ***Théorème de la valeur finale.*** *Si la limite de* $f(t)$ *existe et est finie lorsque* t *tend vers* $+\infty$*, alors* $\lim_{s\to0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Nous prouvons ces résultats sous les hypothèses suivantes :
- f est continue sur $[0,+\infty[$.
- Il existe $n \geqslant 0$ tel que $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^n} = 0$.
- Il en est de même pour f'.

Démonstration. 1. C'est la linéarité de l'intégrale.

2. On effectue une intégration par parties, pour $s > 0$:
$$\int_0^{+\infty} f'(t)\cdot e^{-st}\,dt = \Big[f(t)\cdot e^{-st}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\cdot\big(-se^{-st}\big)\,dt$$
Le crochet vaut $-f(0)$ car $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} = 0$, ce qui donne la formule :
$$\mathscr{L}(f') = -f(0) + s\mathscr{L}(f)$$
3. C'est le résultat précédent appliqué à la primitive de f (au lieu de f), en remarquant que $\int f$ vérifie les mêmes hypothèses que f et donc $\mathscr{L}(\int f)$ est bien définie.

4. La fonction retard $g(t) = f(t-\tau)$ est définie par $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ f(t-\tau) & \text{si } t \geqslant \tau \end{cases}$. C'est une fonction continue par morceaux, mais il est facile de montrer que sa transformée de Laplace est bien définie. En effet, en posant $u = t - \tau$:
$$\mathscr{L}(g) = \int_0^{+\infty} g(t)\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(u)\cdot e^{-s(u+\tau)}\,\mathrm{d}u = e^{-s\tau}\mathscr{L}(f)$$
5. On note $F(s) = \mathscr{L}(f)$ et $G(s) = \mathscr{L}(f')$. On part de la formule de dérivation $G(s) = sF(s) - f(0)$. Par la proposition 1, on sait que $\lim_{s\to+\infty} G(s) = 0$, lorsque $s \to +\infty$. Ce qui donne $\lim_{s\to+\infty}\big(sF(s) - f(0)\big) = 0$.
6. Notons que G est définie en 0 car $G(0) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\big]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0)$ est une valeur finie (l'existence de cette dernière limite est une hypothèse de l'énoncé). D'autre part la continuité de G (voir proposition 1, mais ici sur $[0,+\infty[$) implique $G(s) \to G(0)$.
   On repart maintenant de la formule de dérivation $G(s) = sF(s) - f(0)$. Ainsi $G(0) = \lim_{s\to0} G(s) = \lim_{s\to0}\big(sF(s) - f(0)\big)$. Conclusion : $\lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to0}\big(sF(s) - f(0)\big)$, d'où le résultat.

$\square$

4.3. Transformées de Laplace usuelles

Voici quelques transformées de Laplace classiques.

$f(t)$	$F(s)$	validité
c	$\frac{c}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$s > \alpha$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$	$s > 0$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s > 0$

Voici quelques preuves :

1. **Transformée de Laplace de t^n.**
   On effectue une intégration par parties afin de trouver une formule de récurrence, pour $n \geqslant 1$:
$$F_n(s) = \int_0^{+\infty} t^n\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[t^n\cdot\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s}F_{n-1}(s)$$
   On a déjà calculé $F_0(s) = \frac{1}{s}$, d'où par récurrence $F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
2. **Transformée de Laplace de $\sin(\omega t)$.**
   Par la formule d'Euler, $\sin(\omega t) = \frac{e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}$. Or
$$\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega t}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(-s+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-s+\mathrm{i}\omega}e^{-st}e^{\mathrm{i}\omega t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-\mathrm{i}\omega}.$$
   De même, la transformée de Laplace de $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ est $\frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}$. Par linéarité,
$$F(s) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{2\mathrm{i}\omega}{|s-\mathrm{i}\omega|^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

3. **Transformée de Laplace de $\frac{1}{\sqrt{t}}$.**
   Notons que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est définie sur $]0,+\infty[$ seulement.
   On effectue le changement de variable $u = \sqrt{st}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{s}}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$:
   $$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$
   On a calculé $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ dans l'exemple 3.

Exemple 12.
Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = \frac{\sin t}{t}$: $F(s) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-st}\,\mathrm{d}t$. Par la formule de dérivée (proposition 1), on sait en utilisant les tables que :
$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} t\frac{\sin t}{t}e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\sin t\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s^2+1}$$
On intègre pour obtenir $F(s) = -\arctan s + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Comme on sait que $F(s) \to 0$ (lorsque $s \to +\infty$, toujours par la proposition 1) alors $c = +\frac{\pi}{2}$. Donc
$$F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}.$$
En admettant que la formule reste valable en $s = 0$, on trouve :
$$F(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

4.4. Transformée de Laplace inverse

Il existe un théorème qui prouve que la transformée de Laplace $F(s)$ détermine la fonction $f(t)$.

Théorème 11.
Soient $f,g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues et soient F et G leurs transformées de Laplace. Si pour tout $s > 0$, $F(s) = G(s)$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = g(t)$.

Ce théorème permet de parler de la transformation de Laplace inverse, c'est-à-dire passer de $F(s)$ à $f(t)$. Il n'existe pas de formule à notre portée pour rendre ce passage explicite. C'est donc l'intérêt des tables des transformées de Laplace : connaissant $F(s)$, on cherche à la main à quel $f(t)$ cela correspond.

Exemple 13.
À quelle fonction $f(t)$ correspond la transformée de Laplace
$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2+1} - \frac{3}{(s-2)^2} \quad ?$$
On décompose $F(s)$ en
$$F(s) = 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} - 3\frac{1}{(s-2)^2}.$$
Par la table et par linéarité, la fonction est :
$$f(t) = 2\cos t - \sin t - 3te^{2t}$$
La preuve est très jolie, mais peut être passée lors d'une première lecture. On commence par rappeler le théorème d'approximation de Weierstrass :

Théorème 12 (Théorème d'approximation de Weierstrass).
Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par des polynômes. Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[t]$ tel que :
$$\|f - P\|_\infty < \epsilon$$

On a noté $\|f-P\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}\big|f(t) - P(t)\big|$. Le théorème d'approximation de Weierstrass se reformule aussi : « Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite uniforme d'une suite de polynômes. »

Corollaire 1.
Si pour tout $n \geqslant 0$, $\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

du corollaire 1. Par linéarité, l'hypothèse implique que, pour tout polynôme $P(t)$, $\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Comme f est continue sur $[a,b]$ donc bornée, notons M un majorant de $|f|$. Fixons $\epsilon > 0$. Soit P un polynôme approchant f à ϵ près. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{car la seconde intégrale est nulle.}\\
&= \left|\int_a^b \big(f(t)-P(t)\big)f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|\big(f(t)-P(t)\big)f(t)\right|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \int_a^b \|f-P\|_\infty M\,\mathrm{d}t \leqslant \|f-P\|_\infty M(b-a) \leqslant \epsilon M(b-a)
\end{aligned}$$

Donc $t \mapsto f(t)^2$ est une fonction positive, continue, et son intégrale est aussi petite que l'on veut, donc nulle. Ainsi $t \mapsto f(t)^2$ est la fonction nulle. Ainsi $f(t) = 0$, pour tout $t \in [a,b]$. □

du théorème 11.
- Nous allons faire la preuve dans le cas où les fonctions vérifient $f(t)/t^{n_0} \to 0$ et $g(t)/t^{n_0} \to 0$ (lorsque $t \to +\infty$) pour un certain $n_0 \geqslant 0$.
- Soient f et g deux fonctions ayant la même transformée de Laplace : $F(s) = G(s)$ pour tout $s > 0$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \big(f(t)-g(t)\big)e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0$. Il s'agit de montrer que $f - g = 0$.
- On suppose donc que l'on a une fonction $h = f - g$ telle que sa transformée de Laplace $\int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0$ et on va montrer que h est la fonction nulle. On effectue le changement de variable $u = e^{-t}$ (donc $t = -\ln u$, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$ et u varie de 1 à 0 lorsque t varie de 0 à $+\infty$), et l'intégrale devient :
$$\int_0^1 h(-\ln u)u^{s-1}\,\mathrm{d}u = 0.$$
- La dernière égalité est vraie pour tout $s > 0$, donc en particulier pour les s de la forme $s = n+2$. Autrement dit, si on pose $k(u) = uh(-\ln u)$, on a pour tout $n \geqslant 0$:
$$\int_0^1 u^n k(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$
Comme $\frac{h(t)}{t^{n_0}} \to 0$ (lorsque $t \to +\infty$) alors $k(u) = u(-\ln u)^{n_0} \times \frac{h(-\ln u)}{(-\ln u)^{n_0}} \to 0$ (lorsque $u \to 0$). Ainsi la fonction k peut être prolongée par continuité en 0. Par le corollaire 1, la fonction k est nulle : $k(u) = 0$ pour tout u. Donc $h(t) = 0$ pour tout t, et ainsi $f(t) = g(t)$, pour tout $t \in [0,+\infty[$.

□

4.5. Équations différentielles

Si $F(s)$ est la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, alors $sF(s) - f(0)$ est la transformée de Laplace de $f'(t)$. La transformée de Laplace remplace donc l'opération de dérivation sur $f(t)$ par une opération de multiplication par s sur $F(s)$.
Voici comment on peut résoudre des équations différentielles :

$$\begin{tikzcd}
\text{équation différentielle} \arrow[r, squiggly, "\text{transformation de Laplace}"] & \text{équation algébrique} \arrow[d, squiggly] \\
\text{solution différentielle} & \text{solution algébrique} \arrow[l, squiggly, "\text{transformation inverse de Laplace}"']
\end{tikzcd}$$

On transforme un problème différentiel en problème algébrique, on résout le problème algébrique, puis on transforme la solution algébrique en une solution différentielle. Afin de respecter les usages, dans la suite on note $y(t)$ les fonctions, au lieu de $f(t)$.

Exemple 14.
Quelle est la solution de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = t \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 3 \quad ?$$

1. **Transformées de Laplace.**
   On calcule les transformées de Laplace des objets qui apparaissent :
   - notons $F(s) = \mathscr{L}(y)$,
   - alors on sait que $\mathscr{L}(y') = sF(s) - y(0)$,
   - enfin $\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2}$.
2. **De l'équation différentielle à l'équation algébrique.**
   Comme $y'(t) + y(t) = t$ alors $\mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(t)$. Ce qui donne $sF(s) - y(0) + F(s) = \frac{1}{s^2}$. Et comme par hypothèse $y(0) = 3$ alors
   $$(s+1)F(s) = 3 + \frac{1}{s^2}.$$
3. **Résolution de l'équation algébrique.**
   Il s'agit simplement de
   $$F(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)}.$$
   Mais nous aurons besoin de la décomposition en éléments simples :
   $$F(s) = \frac{3}{s+1} + \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s+1}.$$
4. **Retour à la solution différentielle.**
   Il reste à trouver à quelle fonction $y(t)$ correspond notre solution algébrique $F(s)$. C'est là où les tables sont utiles :
   - pour $F_1(s) = \frac{1}{s}$, c'est $y_1(t) = 1$,
   - pour $F_2(s) = \frac{1}{s^2}$, c'est $y_2(t) = t$,
   - pour $F_3(s) = \frac{1}{s+1}$, c'est $y_3(t) = e^{-t}$.

   Donc par linéarité la solution est $y(t) = -y_1(t) + y_2(t) + 4y_3(t)$, et ainsi :
   $$y(t) = -1 + t + 4e^{-t}$$
   On se rassure en vérifiant que cette fonction vérifie $y'(t) + y(t) = t$ et $y(0) = 3$.

On reprend rapidement un autre exemple :

Exemple 15.
Résolvons :
$$y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t} \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$$

1. Notons $F(s) = \mathscr{L}(y)$. On a $\mathscr{L}(y') = sF(s) - y(0)$, et donc $\mathscr{L}(y'') = s\mathscr{L}(y') - y'(0) = s^2F(s) - sy(0) - y'(0)$. Vues nos conditions initiales, on a ici $\mathscr{L}(y'') = s^2F(s) - 1$. Enfin $\mathscr{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$.
2. L'équation $y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t}$ devient $s^2F(s) - 1 - 4F(s) = \frac{3}{s+1}$. Donc $(s^2 - 4)F(s) = 1 + \frac{3}{s+1}$.
3. Ainsi après décomposition en éléments simples :
   $$F(s) = \frac{1}{s^2-4} + \frac{3}{(s+1)(s^2-4)} = \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$
4. Avec les tables, on reconnaît la solution :
   $$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} - e^{-t}$$

Mini-exercices. 1. Montrer que, si pour un certain $s_0 > 0$, l'intégrale $F(s_0) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ converge, alors c'est aussi vrai pour tout $s \geqslant s_0$.
2. Calculer la transformée de Laplace de $f_1(t) = e^{\alpha t}$. Puis $f_2(t) = t^2$, $f_3(t) = \operatorname{sh} t$, $f_4(t) = \operatorname{ch}(3t)$.
3. Montrer que si $F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, alors la transformée de Laplace de $f(kt)$ (avec $k > 0$) est $\frac{1}{k}F(\frac{s}{k})$.
4. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - y(t) = e^t - t + 1$ avec $y(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace.
5. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) = 3y'(t) - 2y(t) + e^t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace.

5. Transformée de Fourier

Cette section est une introduction à la transformée de Fourier. Comme la transformée de Laplace, la transformée de Fourier change une fonction qui dépend du temps en une fonction qui dépend de la fréquence et est très utilisée en théorie du signal. La transformée de Fourier s'applique à des fonctions non périodiques, contrairement aux séries de Fourier.

5.1. Définition

Définition 5.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La ***transformée de Fourier*** de f est la fonction F définie par :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t$$

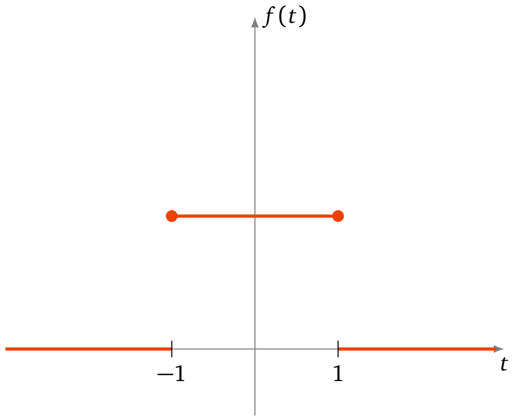
On la note aussi $\mathscr{F}(f)$.

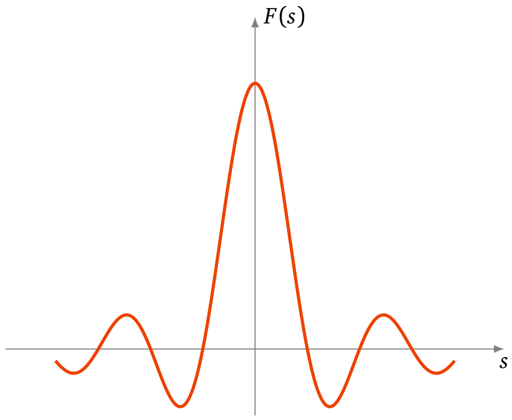
Exemple 16. 1. Soit f la fonction définie par $f(t) = 1$ si $t \in [-1,+1]$ et $f(t) = 0$ sinon. Alors

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{s}\frac{e^{-\mathrm{i}s} - e^{+\mathrm{i}s}}{2\mathrm{i}} = +\frac{2\sin s}{s}.$$

2. Quelle est la transformée de Fourier $F(s)$ de la fonction définie par $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, avec $\alpha > 0$?

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha(-t)}e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{(\alpha-\mathrm{i}s)t}}{\alpha-\mathrm{i}s}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-\alpha-\mathrm{i}s)t}}{-\alpha-\mathrm{i}s}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha-\mathrm{i}s} - \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{(\alpha-\mathrm{i}s)t}}{\alpha-\mathrm{i}s} + \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{(-\alpha-\mathrm{i}s)t}}{-\alpha-\mathrm{i}s} - \frac{1}{-\alpha-\mathrm{i}s} \\
&= \frac{1}{\alpha-\mathrm{i}s} + 0 + 0 + \frac{1}{\alpha+\mathrm{i}s} \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2+s^2}
\end{aligned}$$





Remarque.
- On trouve dans la littérature d'autres définitions, avec des constantes différentes. Pour les formules, il faut donc bien faire attention à la définition que l'on choisit.
- L'intégrale impropre a deux points incertains $-\infty$ et $+\infty$. On rappelle que par définition une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge ***et*** l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
- Contrairement à la transformée de Laplace, la transformée de Fourier est souvent à valeurs dans $\mathbb{C}$, même si l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$.

Nous donnons une condition simple pour que la transformée de Fourier existe.

Proposition 3.
Supposons que f soit continue et que l'intégrale de f soit absolument convergente, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| \,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

Alors :

1. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(s)$ existe.*
2. *La fonction $s \mapsto F(s)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *La fonction $s \mapsto F(s)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$F'(s) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t.$$

En fait, pour la continuité de F, on pourrait montrer qu'il suffit que f soit continue par morceaux (au lieu de continue partout).
Pour la démonstration dans le cas où f est continue, il s'agit juste de remarquer que le module de $\phi(s,t) = f(t)e^{-\mathrm{i}st}$ est égal au module de $f(t)$, donc $\phi(s,t)$ vérifie l'hypothèse de convergence dominée. On applique alors les théorèmes 8 et 9, comme nous l'avons fait avec la transformée de Laplace.

5.2. Propriétés

Lemme 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.**
Soit f une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$ soit convergente. Alors

$$\lim_{s \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Le même résultat est vrai lorsque $s \to -\infty$. Autrement dit :

$$\lim_{s \to -\infty} F(s) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$$

Comme $s \mapsto F(s)$ est continue, on en déduit que la transformée de Fourier est une fonction bornée.
Nous donnons la preuve uniquement lorsque f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration. On commence par prouver le lemme de Riemann-Lebesgue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$:

$$\lim_{s \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = 0$$

On effectue une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{e^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{e^{-\mathrm{i}st}}{-\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-\mathrm{i}s}\left(f(b)e^{-\mathrm{i}sb} - f(a)e^{-\mathrm{i}sa} - \int_a^b f'(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right)$$

On en déduit la majoration :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|s|}\left(\left|f(b)\right| + \left|f(a)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\right)$$

Sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, la fonction f' est continue donc bornée : notons $M = \sup_{t\in[a,b]} \left|f'(t)\right|$. On a donc

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|s|}\left(\left|f(b)\right| + \left|f(a)\right| + M(b-a)\right).$$

Ainsi lorsque $|s| \to +\infty$ alors $\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t \to 0$.

Pour l'intégrale impropre, fixons $\epsilon > 0$. On reprend le raisonnement précédent en fixant d'abord a et b tels que $\int_{-\infty}^a \left|f(t)\right| \mathrm{d}t < \epsilon$ et $\int_b^{+\infty} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t < \epsilon$, ce qui possible car les intégrales impropres convergent. Ainsi :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^a \left|f(t)\right|\mathrm{d}t + \left|\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right| + \int_b^{+\infty} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$$

Or pour $|s|$ assez grand, $\left|\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right| < \epsilon$ d'après le point précédent. Donc $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t\right| < 3\epsilon$ pour $|s|$ assez grand, ce qui termine la preuve. □

Voici quelques assertions parmi les nombreuses propriétés que vérifie la transformée de Fourier.

Proposition 4. *1.* ***Linéarité.*** *$\mathscr{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{F}(f) + \mu\mathscr{F}(g)$.*

2. ***Parité.*** *Si f est une fonction paire, alors $F(s) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t$. Si f est impaire, alors $F(s) = -2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t$.*

3. ***Dérivation.*** *$\mathscr{F}(f') = \mathrm{i}s\mathscr{F}(f)$.*

4. ***Théorème du retard.*** *$\mathscr{F}\big(f(t-\tau)\big) = e^{-\mathrm{i}s\tau}\mathscr{F}\big(f(t)\big)$.*

Les preuves sont similaires à celles pour la transformée de Laplace (voir la proposition 2). Pour la formule de dérivation, on suppose que l'intégrale de f' est absolument convergente. Cette dernière hypothèse implique en particulier que f admet une limite finie en $-\infty$ et $+\infty$, limite qui est forcément nulle puisque $\int |f|$ est supposée convergente.
Voici la preuve pour la formule de la parité. On suppose donc que f est une fonction paire. Alors :

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} f(-u)e^{\mathrm{i}su}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } u=-t \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\left(e^{\mathrm{i}st}+e^{-\mathrm{i}st}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{car } f(-u)=f(u) \\
&= 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Exemple 17.
Quelle est la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-t^2}$? Nous allons la calculer en utilisant les propriétés énoncées plus haut. Nous notons $F(s)$ la transformée de Fourier de $f(t)$ et $G(s)$ celle de $f'(t)$.

- D'une part, par la formule de dérivation de la proposition 4, on sait que $G(s) = \mathrm{i}sF(s)$.
- Mais d'autre part $f'(t) = -2tf(t)$, donc
$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = -2\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = -2iF'(s).$$
La dernière égalité vient de la formule de dérivation de $F(s)$ de la proposition 3.
- On en déduit donc l'équation différentielle $sF(s) = -2F'(s)$. En écrivant $\frac{F'(s)}{F(s)} = -\frac{s}{2}$, on trouve $\ln\left|F(s)\right| = -\frac{s^2}{4} + c$, donc $F(s) = F(0)e^{-s^2/4}$. Et $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. Conclusion : $F(s) = \sqrt{\pi}e^{-s^2/4}$.

5.3. Transformée de Fourier inverse

La transformée de Fourier transforme $f(t)$ en $F(s)$. Il existe une transformée de Fourier inverse qui permet de revenir de $F(s)$ à $f(t)$.

Théorème 13.
Si
$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t$$
est d'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s$ absolument convergente, alors
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{+\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}s.$$

Il faut bien faire attention à la constante $\frac{1}{2\pi}$ et au signe + dans $e^{+\mathrm{i}st}$. Nous admettons ce théorème.
En d'autres termes, si l'on note
$$\mathscr{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{+\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t,$$

alors $\mathscr{F}^{-1}$ est l'opération de ***transformée de Fourier inverse*** :

$$\mathscr{F}^{-1}\big(\mathscr{F}(f)\big) = f \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F}\big(\mathscr{F}^{-1}(f)\big) = f$$

Il est remarquable que la transformée inverse ait une forme très proche de la transformée directe. Nous allons l'utiliser dans l'exemple suivant.

Exemple 18.
Quelle est la transformée de Fourier de $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$?
On a vu dans l'exemple 16 que la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$ est $F(s) = \frac{2}{1+s^2}$, qui est d'intégrale absolument convergente. Ce qui veut dire que, d'après le théorème 13, la transformée de Fourier inverse de $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est $G(s) = \frac{e^{-|s|}}{2}$.
On vient exactement de dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{+\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = G(s),$$

donc en évaluant cette expression en $-s$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = G(-s).$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-|-s|}}{2} = \frac{e^{-|s|}}{2}$$

Ce qui permet de conclure que la transformée de Fourier de $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est :

$$\mathscr{F}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \pi e^{-|s|}$$

En particulier, lorsque l'on prend la partie réelle de cette dernière égalité, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(st)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi e^{-|s|},$$

ce qui donne pour $s = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{e}.$$

La correspondance est donc la suivante :

$$e^{-|t|} \xrightarrow{\quad\mathscr{F}\quad} \frac{2}{1+s^2}$$

$$\frac{e^{-|t|}}{2} \xleftarrow[\quad\mathscr{F}^{-1}\quad]{} \frac{1}{1+s^2}$$

5.4. Lien avec la transformée de Laplace

Les transformées de Fourier et de Laplace, lorsqu'elles sont bien définies, sont liées par la relation suivante :

$$\mathscr{F}(f)(s) = \mathscr{L}(f_+)(+\mathrm{i}s) + \mathscr{L}(f_-)(-\mathrm{i}s)$$

où l'on a défini f_+ et f_- sur $[0, +\infty[$ par : $f_+(t) = f(t)$ et $f_-(t) = f(-t)$ pour $t \geqslant 0$.

Exemple 19.
Calculons la transformée de Fourier de $f(t) = t^2e^{-|t|}$. On note $f_+(t)$ et $f_-(t)$ comme ci-dessus. Comme la fonction f est paire alors $f_+ = f_-$.
Par les tables de la transformée de Laplace on sait que, pour $f_+(t) = t^2e^{-t}$ (avec $t \geqslant 0$) qui est du type $t^n e^{\alpha t}$, on a $\mathscr{L}(f_+) = \frac{2}{(s+1)^3}$. On en déduit que

$$\mathscr{F}(f)(s) = \mathscr{L}(f_+)(+\mathrm{i}s) + \mathscr{L}(f_-)(-\mathrm{i}s) = \frac{2}{(\mathrm{i}s+1)^3} + \frac{2}{(-\mathrm{i}s+1)^3} = \frac{4-12s^2}{(1+s^2)^3}.$$

Mini-exercices.
1. Montrer que si f est une fonction positive, alors sa transformée de Fourier vérifie $\left|F(s)\right| \leqslant F(0)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction « triangle » définie par $f(t) = 1 - |t|$ si $|t| \leqslant 1$ et $f(t) = 0$ sinon.
3. Calculer la transformée de Fourier de $f(kt)$ (avec $k > 0$) en fonction de la transformée de Fourier de $f(t)$.
4. Trouver une formule pour la transformée de Fourier de $f^{(k)}(t)$, la dérivée k-ième de $f(t)$.
5. Montrer que $f(t) = e^{-t^2+t}$ est une fonction dont l'intégrale est absolument convergente. Calculer sa transformée de Fourier. (On pourra d'abord montrer que la transformée de Fourier vérifie une équation différentielle.)

Auteurs du chapitre

- D'après un cours de Luc Rozoy et Bernard Ycart de l'université de Grenoble pour le site M@ths en Ligne.
- et un cours de Raymond Mortini, de l'université de Lorraine,
- complété, mixé et révisé par Arnaud Bodin. Figures de Benjamin Boutin. Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.