Exercices corrigés

Joseph DI VALENTIN

Janvier 2013

Avant propos

Cet ouvrage a pour objectif d'aider les élèves de classes préparatoires.
Ce livre est aussi utile aux élèves des Écoles d'ingénieur, aux candidats aux concours de recrutement ainsi qu'à tous ceux qui souhaitent compléter leurs connaissances en mathématiques.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Séries, séries de fonctions **11**

3 Corrigés séries, séries de fonctions **27**

4 Séries entières **127**

5 Corrigés séries entières **135**

6 Séries de Fourier **201**

7 Corrigé séries de Fourier **207**

Chapitre 1

Introduction

Théorème de convergence dominée et applications.

1. Δ Soit f une application en **escalier** définie de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit une subdivision de $[a,\ b]$ adaptée[1] à f, $\sigma = (a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$. Nous supposerons que les points a_i pour $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ sont des points de discontinuité pour f.
   Soit $i \in \mathbb{N}_{n-1}$.
   Supposons[2] $f(a_i - 0) \leqslant f(a_i + 0)$.
   • $f(a_i) \leqslant f(a_i - 0)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $a_{i-1} < a_i - \alpha$ et $a_i + \alpha < a_{i+1}$. Sur $[a_i - \alpha,\ a_i + \alpha]$ nous remplaçons f par la fonction continue affine par morceaux prenant la valeur $f(a_i - 0)$ en $a_i - \alpha$, $f(a_i)$ en a_i et $f(a_i + 0)$ en $a_i + \alpha$.
   • $f(a_i) > f(a_i - 0)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $a_i + \alpha < a_{i+1}$. Sur $[a_i,\ a_i + \alpha]$ nous remplaçons f par la fonction affine prenant la valeur $f(a_i - 0)$ en a_i et $f(a_i + 0)$ en $a_i + \alpha$.
   Supposons $f(a_i - 0) > f(a_i + 0)$.
   • $f(a_i) \leqslant f(a_i + 0)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $a_{i-1} < a_i - \alpha$ et $a_i + \alpha < a_{i+1}$. Sur $[a_i - \alpha,\ a_i + \alpha]$ nous remplaçons f par la fonction continue affine par morceaux prenant la valeur $f(a_i - 0)$ en $a_i - \alpha$, $f(a_i)$ en a_i et $f(a_i + 0)$ en $a_i + \alpha$.
   • $f(a_i) > f(a_i + 0)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $a_{i-1} < a_i - \alpha$. Sur $[a_i - \alpha,\ a_i]$ nous remplaçons f par la fonction affine prenant la valeur $f(a_i - 0)$ en $a_i - \alpha$ et $f(a_i + 0)$ en a_i.
   Supposons $f(a) < f(a + 0)$. Soit $\alpha > 0$, $a + \alpha < a_1$. Sur $[a,\ a + \alpha$ nous remplaçons f par la fonction affine prenant la valeur $f(a)$ en a et $f(a + 0)$ en $a + \alpha$.
   Si $f(a) \geqslant f(a + 0)$. On remplace f en a par la fonction prolongée par continuité en a.
   De même, Supposons $f(b) < f(b - 0)$. Soit $\alpha > 0$, $b - \alpha > b_{n-1}$. Sur $[b - \alpha,\ b$ nous remplaçons f par la fonction affine prenant la valeur $f(b)$ en b et $f(b - 0)$ en $b - \alpha$.
   Si $f(b) \geqslant f(b - 0)$. On remplace f en b par la fonction prolongée par continuité en b.

---

1. Je rappelle que cela signifie que $a = a_0 < a_1 < \ \cdots\ < a_n = b$ et $\forall i \in \mathbb{N}_n$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1},\ a_i[$ est constante.
2. Pour une application f nous appelons $f(x + 0)$ la limite, lorsqu'elle existe, de f à droite en x et $f(x - 0)$ la limite, lorsqu'elle existe, de f à gauche en x.

f est donc remplacée par une fonction continue g vérifiant $g\leqslant f$. En étudiant les différents cas nous obtenons

$$0\leqslant \int_a^b (f(t)-g(t))dt\leqslant \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(|f(a_i-0)|+|f(a_i+0)|+|f(a_i)|)$$
$$+\frac{\alpha}{2}(|f(a+0)|+|f(a)|+|f(b-0)|+|f(b)|)\leqslant \frac{\alpha(3n+1)}{2}\|f\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon>0$. $0\leqslant \int_a^b (f(t)-g(t))dt\leqslant\varepsilon$ pour α choisi suffisamment petit.

Soit f une application définie sur un intervalle fermé $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$ continue par morceaux. Soit $\sigma=(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$ une subdivision de $[a,\ b]$ compatible[3] avec f. Pour $i\in\mathbb{N}_{n-1}$, posons $s(a_i)=f(a_i+0)-f(a_i)$, $s(a)=f(a+0)-f(a)$ et $s(b)=f(b)-f(b-0)$.
Soit g la fonction définie sur $[a,\ b]$ par :

$g(a)=f(a+0)$, $g(b)=f(b-0)$, $\forall i\in\mathbb{N}_{n-1}$, $g(a_i)=f(a_i-0)-\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1}s(a_k)$ et

pour $t\in]a_i,\ a_{i+1}[$, $g(t)=f(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{i}s(a_k)$. Il est immédiat que g est continue car la limite en tout point a_i est égale à $g(a_i)$. $f-g$ est une fonction en escalier. Nous en déduisons que toute fonction continue par morceaux définie sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.
Quitte à remplacer la fonction en escalier par la fonction continue construite comme plus haut nous en déduisons que :
si f est une fonction continue par morceaux définie sur $[a,\ b]\subset\mathbb{R}$ à valeurs réelles, si ε est un réel strictement positif il existe[4] une application continue F définie de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, $F\leqslant f$ et $0\leqslant \displaystyle\int_a^b (f(t)-F(t))dt\leqslant\varepsilon$.

2. Nous avons vu, à l'exercice numéro 10 page 109 du livre exercice2 le premier théorème de Dini, que si une suite monotone[5] d'applications à valeurs réelles continues définies sur un intervalle fermé borné $[a,\ b]$ converge simplement vers une fonction continue alors la convergence est uniforme.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues définies sur un intervalle fermé borné $[a,\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, convergeant simplement vers la fonction nulle. Nous supposons qu'il existe $K\geqslant 0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant f_n\leqslant K$. Nous allons construire une suite monotone d'applications continues convergeant simplement vers la fonction nulle afin d'appliquer le premier théorème de Dini. Pour $(n,\ k)\in\mathbb{N}^2$, notons $F_{n,k}=\displaystyle\max_{n\leqslant p\leqslant n+k}\{f_p\}$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la suite $(F_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$

3. Cela signifie que pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, la restriction de f à $]a_{i-1},\ a_i[$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_{i-1},\ a_i]$.

4. Nous aurions pu utiliser les résultats de l'exercice 2 page 107 du livre exercice2 pour obtenir une approximation de f.

5. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone c'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\leqslant f_{n+1}$ ou $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\geqslant f_{n+1}$; ce ne sont pas les fonctions f_n qui sont monotones il s'agit là du second théorème de Dini.

est croissante. Chaque application $F_{n,k}$ est continue [6]
Posons pour $(n,\ k) \in \mathbb{N}^2$, $x_{n,k} = \displaystyle\int_a^b F_{n,k}(t)dt$. $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par $(b-a)K$ donc convergente vers un réel l_n. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier k_n tel que pour $k \geqslant k_n$ on ait $l_n - \dfrac{\varepsilon}{2^n} \leqslant x_{n,k} \leqslant l_n$. En particulier $l_n - \dfrac{\varepsilon}{2^n} \leqslant x_{n,k_n} \leqslant l_n$. Nous en déduisons $\displaystyle\int_a^b F_{n,k}(t)dt \leqslant \int_a^b F_{n,k_n}(t)dt + \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $G_n = F_{n,k_n}$ c'est-à-dire $G_n = \displaystyle\max_{n\leqslant p\leqslant p+k_n} \{f_p\}$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 donc pour $\varepsilon > 0$ et $t \in [a,\ b]$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \varepsilon$. Nous avons donc aussi $0 \leqslant f_n(t) \leqslant G_n(t) \leqslant \varepsilon$. La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0. Construisons à partir de cette suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone convergeant vers 0.
Posons $H_n = \min(G_0,\ G_1,\ \cdots,\ G_n)$. $H_0 = G_0$ est continue. Supposons H_n continue alors

$$\begin{aligned} H_{n+1} = [\min(G_0,\ G_1,\ \cdots,\ G_n),\ G_{n+1}] &= \min(H_n,\ G_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}(H_n + G_{n+1} - |H_n - G_{n+1}|). \end{aligned}$$

H_{n+1} est continue. Les fonctions H_n sont donc continues. $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n \leqslant G_n$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 donc la convergence est uniforme et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b G_n(t)dt = 0$.
$\min(H_n,\ G_{n+1}) + \max(H_n,\ G_{n+1}) = H_n + G_{n+1}$ donc
$G_{n+1} - H_{n+1} = \max(H_n,\ G_{n+1}) - H_n \leqslant \max(G_n,\ G_{n+1}) - H_n$. Nous en déduisons

$$\int_a^b (G_{n+1}(t) - H_{n+1}(t))dt \leqslant \int_a^b \max(G_{n+1}(t),\ G_n(t))dt - \int_a^b H_n(t)dt.$$

$G_n = \max(f_n,\ \cdots,\ f_{n+k_n})$, $G_{n+1} = \max(f_{n+1},\ \cdots,\ f_{n+1+k_{n+1}})$.
Si $n + k_n \leqslant n + 1 + k_{n+1}$ alors
$\max(G_n,\ G_{n+1}) = \max(f_n,\ f_{n+1},\ \cdots,\ f_{n+1+k_{n+1}}) = F_{n,1+k_{n+1}}$.
Si $n + k_n \geqslant n + 1 + k_{n+1}$ alors
$\max(G_n,\ G_{n+1}) = \max(f_n,\ f_{n+1},\ \cdots,\ f_{n+k_n}) = F_{n,k_n}$ donc
$\max(G_n,\ G_{n+1}) = F_{n+k'_n}$ avec $k'_n = \max(k_n,\ 1 + k_{n+1})$.

$$\int_a^b \max(G_{n+1}(t),\ G_n(t))dt \leqslant x_{n,k_n} + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Nous obtenons finalement

$$\int_a^b (G_{n+1}(t) - H_{n+1}(t))dt \leqslant x_{n,k_n} + \frac{\varepsilon}{2^n} - \int_a^b H_n(t)dt$$

6. Soient a et b deux réels. $\max(a,\ b) = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ donc si u et v sont deux applications réelles continues $\max(u,\ v)$ est continue. Soient $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ n applications réelles continues sur un ensemble I. $\max(u_1,\ u_2)$ est continue. Supposons que pour $k < n$ l'application $U_k = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{f_i\}$ est continue alors $U_{k+1} = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}\{f_i\} = \max(U_k,\ u_{k+1})$ est continue. Le résultat est vrai au rang $k+1$ et $\displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{f_i\}$ est continue.

$$= \int_a^b G_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2^n} - \int_a^b H_n(t)dt.$$

En additionnant nous obtenons
$\displaystyle\int_a^b (G_{n+1}(t) - H_{n+1}(t))dt \leqslant \int_a^b (G_0(t) - H_0(t))dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}$ soit encore
$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b (G_n(t) - H_n(t))dt \leqslant 2\varepsilon$ car $G_0 = H_0$.

La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $\forall t \in [a,\ b],\ 0 \leqslant H_n(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ puis $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b H_n(t)dt \leqslant \varepsilon$.

En regroupant ces résultats nous obtenons pour $n \geqslant N,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_a^b G_n(t)dt \leqslant 3\varepsilon$ donc aussi $n \geqslant N \Rightarrow 0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt \leqslant \int_a^b G_n(t)dt \leqslant 3\varepsilon$. La suite de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ converge donc vers 0.

Nous en déduisons : ***soit*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite d'applications continues définies sur un intervalle fermé borné*** $[a,\ b]$ ***à valeurs dans*** $\mathbb{R}_+$***, convergeant simplement vers la fonction nulle. Nous supposons qu'il existe*** $K \geqslant 0$ ***tel que*** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f_n \leqslant K$ ***alors*** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = 0$.

3. ***Soit*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite d'applications continues par morceaux définies sur un intervalle quelconque*** I ***de*** $\mathbb{R}$ ***à valeurs dans*** $\mathbb{R}_+$ ***telle qu'il existe une application continue par morceaux*** φ ***intégrable sur*** I ***et*** $\forall t \in I,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \varphi(t)$***. On suppose que la suite*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge simplement vers 0 sur*** I ***alors*** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = 0$.

   L'hypothèse de domination permet de conclure que les applications f_n sont toutes intégrables. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe un intervalle fermé borné J inclus dans I tel que $0 \leqslant \displaystyle\int_I \varphi - \int_J \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Notons[7] $I = (a,\ b)$ et $J = [c,\ d]$ avec $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$. Nous avons donc $0 \leqslant \displaystyle\int_{(a,\ c]} \varphi + \int_{[d,\ b)} \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

   Il vient alors aussi $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leqslant \displaystyle\int_{(a,\ c]} f_n + \int_{[d,\ b)} f_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ puis $0 \leqslant \displaystyle\int_I f_n \leqslant \int_J f_n + \frac{\varepsilon}{3}$.

   φ est continue par morceaux sur un intervalle fermé borné donc est bornée. Nous avons vu dans la première partie qu'il existe une suite d'applications continues F_n définies sur J vérifiant $0 \leqslant F_n \leqslant f_n$ et $\displaystyle\int_J (f_n - F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. En utilisant le résultat précédent nous avons aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J F_n = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$

7. les parenthèses signifient que l'intervalle peur être fermé ou semi-ouvert ouvert.

tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow \displaystyle\int_J F_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Nous en déduisons $\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_I f_n \leqslant \varepsilon$ d'où le résultat annoncé.
Soit alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues par morceaux définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles qui converge simplement vers l'application continue par morceaux f. On suppose qu'il existe une fonction dominante φ définie de I dans $\mathbb{R}$ intégrable vérifiant $\forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

f est alors intégrable et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

L'intégrabilité de f provient du fait qu'elle est dominée, elle aussi, par φ. Appliquons le résultat précédent à l'application $|f - f_n|$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I |f - f_n| = 0$ donc $\displaystyle\left|\int_I f_n - \int_I f\right|$ étant majoré par $\displaystyle\int_I |f - f_n|$ nous avons bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

4. Appliquons les résultats que nous venons de démontrer.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>croissante</u> d'applications continues par morceaux définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f.

   f est intégrable si et seulement si la suite $\displaystyle\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et dans ce cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

   Supposons que f soit intégrable.
   Nous avons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leqslant f$ donc $\displaystyle\int_I f_n \leqslant \int_I f$. La suite $\displaystyle\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   Supposons que la suite $\displaystyle\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Celle-ci est alors convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. Soit J un intervalle fermé borné inclus dans I. La suite $\displaystyle\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante nous en déduisons que pour tout entier naturel n $f_n - f_0 \geqslant 0$ et $f_n - f_0$ est intégrable sur J. Nous en déduisons en utilisant les résultats précédents que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J (f_n - f_0) = \int_J (f - f_0)$.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_J (f_n - f_0) \leqslant \int_I (f_n - f_0) \leqslant l - \int_I f_0 = M$.
   Il vient alors, en calculant la limite, $\displaystyle\int_J (f - f_0) \leqslant M$.
   $f - f_0$ étant positive et ayant son intégrale majorée par M indépendante de J est intégrable donc f est intégrable.

5. ***Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction continue par mor-***

ceaux f ***et qu'il existe une constante*** M ***telle que*** $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_I f_n \leqslant M$***.***
f ***est alors intégrable.***
Soit J un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ inclus dans I. Posons pour $(n,\ t) \in \mathbb{N} \times I$, $g_n(t) = \min(f_n(t),\ f(t))$. $g_n(t) = \dfrac{1}{2}(f(t) + f_n(t) - |f(t) - f_n(t)|) \leqslant f(t)$.
g_n est donc continue par morceaux et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = f(t)$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions positives dominée par f. Nous pouvons appliquer, sur J, le théorème de convergence dominée. Il vient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J g_n = \int_J f$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $\displaystyle\int_J g_n \leqslant \int_J f_n \leqslant \int_I f_n \leqslant M$ donc, en calculant la limite, $\displaystyle\int_J f \leqslant M$. J étant un intervalle fermé borné quelconque inclus dans I et f étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que f est intégrable.

6. Utilisons tous ces résultats pour démontrer le résultat concernant l'échange entre les séries et les intégrales.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite d'applications continues par morceaux définies sur un intervalle*** I ***de*** $\mathbb{R}$ ***à valeurs dans*** $\mathbb{R}_+$***. On suppose que la série de fonctions*** $\sum f_n$ ***converge simplement vers une application continue par morceaux*** F***.***
F ***est intégrable si et seulement si la série de terme général*** $\displaystyle\int_I f_n$ ***est convergente et dans ce cas nous avons l'égalité*** $\displaystyle\int_I F = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right)$.
Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers F. Nous avons vu plus haut que la suite de terme général $\displaystyle\int_I F_n$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_I F_n$ est majorée et dans ce cas nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I F_n = \int_I F$.
Il s'agit du résultat demandé car $\forall t \in I,\ F(t) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ et $\displaystyle\int_I F_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_I f_k \right)$ car il s'agit d'une somme finie.

7. ***Soit*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle*** I ***de*** $\mathbb{R}$ ***à valeurs réelles. On suppose que la série de fonctions*** $\sum f_n$ ***converge simplement vers une fonction continue par morceaux*** F***. Nous supposons que la série de terme général*** $\displaystyle\int_I |f_n|$ ***est convergente.***

Alors F est intégrable, $\displaystyle\int_I |F| \leqslant \int_I \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I |f_n|\right)$***, La série de terme général*** $\displaystyle\int_I f_n$ ***est convergente et enfin*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right) = \int_I F.$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$. $\displaystyle\int_I |F_n| \leqslant \int_I \left(\sum_{k=0}^{n} |f_k|\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_I |f_k|\right) \leqslant M$ car la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_|$ converge. La suite de terme général $|F_n|$ converge simplement vers $|F|$. En utilisant les résultats vus plus haut nous en déduisons que F est intégrable et $\displaystyle\int_I |F| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I |f_n|\right)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. La suite de terme général f_{p+n+1} vérifie les mêmes hypothèses que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc, en notant a et b les bornes de I, $\displaystyle\int_a^b \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(t)\right| dt \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty}\left(\int_I |f_n|\right)$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_I |F - F_p| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty}\left(\int_I |f_n|\right)$. La série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n|$ étant convergente, son reste d'ordre n converge vers 0 donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I |F - F_n| = 0$ puis $\displaystyle\int_I F = \lim_{n\to+\infty}\int_I F_n$ d'où le résultat demandé.

Remarque Le théorème de convergence dominée et ce dernier résultat s'étendent facilement au cas d'une fonction à valeurs complexes.

Transformations d'Abel

1. ***Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet[8].***
   Soit $\sum v_n u_n$ ***une série telle que*** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in E$ ***et*** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***est une suite réelle décroissante convergente vers*** 0***.***
   On suppose : $\exists M \in \mathbb{R}_+ \ /\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q,\ \left\|\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k\right\| \leqslant M$***.***
   Alors la série $\sum v_n u_n$ ***est convergente.***
   Preuve.
   Nous utiliserons plusieurs fois la transformation d'Abel ; écrivons certaines relations que nous obtenons et que nous réutiliserons par la suite.
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $U_{-1} = 0$. Si la série

8. Je rappelle qu'un espace vectoriel normé est complet lorsque toutes les suites de Cauchy de cet espace sont convergentes.

$\sum u_n$ converge, notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Soient p et q deux entiers naturels, avec $p \leqslant q$.

• première transformation. Ces transformations s'appellent transformations d'Abel.

$$\begin{aligned}\text{Pour } p<q,\ \sum_{k=p}^{q} x_k u_k &= \sum_{k=p}^{q} x_k (U_k - U_{k-1})\\ &= \sum_{k=p}^{q} x_k U_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} x_{k+1} U_k = x_q U_q - x_p U_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} (x_k - x_{k+1}) U_k\\ &= x_{q+1} U_q - x_p U_{p-1} + \sum_{k=p}^{q} (x_k - x_{k+1}) U_k.\end{aligned}$$

Nous avons donc pour $p \leqslant q$, $\sum_{k=p}^{q} x_k u_k = x_{q+1} U_q - x_p U_{p-1} + \sum_{k=p}^{q} (x_k - x_{k+1}) U_k$.

• deuxième transformation.
Supposons de plus que la série $\sum u_n$ converge, de somme S.
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n + R_n = S$. La dernière relation écrite devient alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} x_k u_k &= x_{q+1}(S - R_q) - x_p(S - R_{p-1}) + \sum_{k=p}^{q} (x_k - x_{k+1})(S - R_k)\\ &= -x_{q+1} R_q + x_p R_{p-1} - \sum_{k=p}^{q} (x_k - x_{k+1}) R_k.\end{aligned}$$

Utilisons ces transformations pour répondre à la question posée.

$$\sum_{k=p}^{q} v_k u_k = v_{q+1} S_q - v_p S_{p-1} + \sum_{k=p}^{q} (v_k - v_{k+1}) S_k.$$

Nous savons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant q,\ \left\| \sum_{k=p}^{q} u_k \right\| \leqslant M$.

Il vient alors, sachant que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle donc positive,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=p}^{q} v_k u_k \right\| &\leqslant \sum_{k=p}^{q} \|S_k\|(v_k - v_{k+1}) + \|S_q\| v_{q+1} + \|S_{p-1}\| v_p\\ &\leqslant M(-v_q + v_p + v_q + v_p) = 2M v_p.\end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant N \Rightarrow 2M v_p \leqslant \varepsilon$. Nous en déduisons $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow \left\| \sum_{k=p}^{q} v_k u_k \right\| \leqslant \varepsilon$. La suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} v_k u_k$ est une suite de Cauchy qui converge car E est complet.
La série $\sum u_n v_n$ est donc convergente.

Exemple d'application

$$\sum_{k=p}^{q} \exp(ikx) = \begin{cases} \dfrac{\exp(ipx) - \exp(i(q+1)x)}{1 - \exp(ix)} & = \text{ si } \exp(ix) \neq 1 \\ q - p + 1 & = \text{ si } \exp(ix) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\exp(ipx) - \exp(i(q+1)x)}{1 - \exp(ix)} = \exp\left(\frac{p+q}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{q-p+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Nous avons donc pour $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 0$, $\left|\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \exp(ikx)\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

En utilisant le résultat précédent nous en déduisons que les séries $\sum v_n \cos(nx)$ et $\sum v_n \sin(nx)$ sont convergente pour x non congru à 0 modulo 2π.

La série $\sum v_n \sin(nx)$ converge aussi pour x congru à 0 modulo 2π et la série $\sum v_n \cos(nx)$ est de même nature que $\sum v_n$ pour x congru à 0 modulo 2π donc la série $\sum v_n \sin(nx)$ converge pour tout réel x et la série $\sum v_n \cos(nx)$ converge pour x non congru à 0 modulo 2π et est de même nature que $\sum v_n$ pour x congru à 0 modulo 2π.

Séries de Bertrand :

Soit la série*[9] $\sum u_n$ *avec* $u_0 = u_1 = 0$ *et pour* $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ *où* α *et* β *sont des réels.

***Cette série converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.**

Preuve

• Supposons $\alpha > 1$. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n n^\gamma = 0$ donc lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$. La série $\sum u_n$. est convergente.

• Supposons $\alpha < 1$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n n} = 0$ donc lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$. La série $\sum u_n$. est divergente.

• supposons $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$.
$\dfrac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \dfrac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} = \dfrac{(\ln(n+1))^{\beta-1} - (\ln(n))^{\beta-1}}{(\ln(n))^{\beta-1}(\ln(n+1))^{\beta-1}}$ donc lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} &= \frac{\left[1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right]^{\beta-1} - 1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} \\ &= \frac{\beta - 1 + o(1)}{n\ln(n)(\ln(n+1))^{\beta-1}} \end{aligned}$$

soit encore $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \dfrac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\beta - 1}{n(\ln(n))^\beta}$.

9. Dite série de Bertrand.

La série $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}}-\frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}}\right)$ et la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}$ sont donc de même nature ; elles convergent si et seulement si $\beta>1$.

• Supposons $\alpha=\beta=1$.
$\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))=\ln\left(\frac{ln(n+1)}{ln(n)}\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons donc $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))=\ln\left(1+\frac{1}{n\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)$ c'est-à-dire
$\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n\ln(n)}$.
La série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$ est donc divergente [10].
Finalement la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$).

10. Nous aurions pu utiliser les intégrales pour obtenir la réponse.
En effet soit $f\,:\,x\in[2,\ +\infty[\longmapsto\frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}\in\mathbb{R}$. Pour $\beta\leqslant 0$, $f(n)\geqslant\frac{1}{n\ln(2)^{\beta}}$ donc la série diverge.
Pour $\beta>0$, f est continue monotone, la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si f est intégrale.
Pour $\beta\neq 1$, $\int_2^x f(t)dt=\left[\frac{1-\beta}{(\ln(x))^{\beta-1}}\right]_2^x$.
Pour $\beta=1$, $\int_2^x f(t)dt=\Big[\ln(\ln(x))\Big]_2^x$.
f est intégrable si et seulement si $\beta>1$ d'où le résultat.

Chapitre 2

Séries, séries de fonctions

1. **Produits infinis**

   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose : $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$.

   On dit que $\prod a_n$ est convergent si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \neq 0$.

   On note alors : $l = \prod_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ a_n \neq 0,\ \exists n < n_0 \ / \ a_n = 0$, et si la suite $\prod_{k=n_0}^{n} a_n$ a une limite non nulle, on dira que le produit infini converge de valeur nulle. Dans la pratique on remplacera les premiers termes par 1 et on appliquera la définition générale.

   $\prod(1+u_n)$ est dit absolument convergent si $\prod(1+|u_n|)$ converge.

   (a) Montrer que si $\prod u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Vérifier que la réciproque n'est pas exacte.

   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tous différents de -1 (en fait il suffit qu'ils le soient à partir d'un certain rang). Montrer l'équivalence suivante :

   $\prod(1+u_n)$ converge $\iff$

   $$\left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q > p \geqslant N \Rightarrow \left|\prod_{k=p+1}^{q}(1+u_n) - 1\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

   Montrer :

   $\left(\prod(1+u_n) \text{ absolument convergente }\right) \Rightarrow \left(\prod(1+u_n)\text{converge }\right)$.

   (c) Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\prod u_n$ converge si et seulement si $\sum \ln(u_n)$ converge.

   (d) Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > -1$ et de signe fixe. Montrer que $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

(e) Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 1 \in \mathbb{R}^*$ et $\sum u_n$ convergente. Montrer : $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum(u_n)^2$ converge.

2. Nature des séries suivantes de termes généraux u_n (n est tel que u_n est défini) :
$u_n = \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{1+n^a}\right) - \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$, $(a > 0)$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$,
$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$, $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\right)^{n^\alpha}$,
$u_n = \cos\left(\pi\dfrac{2n^3+n^2+an+b}{2n^2}\right)$, $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$,
$u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+b}\right)$, $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$,
$u_n = \left(\operatorname{acos}\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^a}\right)^n$ $(a > 0)$, $u_n = \dfrac{1}{n^\beta}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha$,
$u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}}dx$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^n \dfrac{\operatorname{atan} t}{1+t}\,dt$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,
$u_n = \dfrac{x^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)}$ $(x \in \mathbb{R})$, $u_n = \operatorname{asin}\dfrac{n^2}{a+n^2} - \operatorname{asin}\dfrac{n^2}{b+n^2}$ (a et b strictement positifs,
$u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1$, $(\alpha > 0)$, $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - a$,
$u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n+a}\right)^n$, $(a > 0)$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(1+\sqrt{k})}$,
$u_n = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ ($\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$, $n \geqslant 1$ on pourra utiliser $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha}dx$,
$u_n = \operatorname{acos}\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^3}}\right)$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)dt$,
$u_n = u_n = (-1)^n n^\alpha \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\ln(t)}{1+t}dt$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,
$u_n = f(n)$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$, $f(x) \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \lambda < 0$,
$u_n = \dfrac{1}{p_n}$, p_n est le $n^{ième}$ nombre premier ; $p_0 = 1,\ p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7, \cdots$; on pourra calculer $\dfrac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)}$.

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$ (on pourra calculer les sommes partielles),
$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ où f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $[0,\ 1]$,
$u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$, $u_n = \dfrac{a_n}{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^{\alpha}}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dt}{1+t\sqrt{t}}$, $u_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i a_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i}$ où $\sum a_i$ est convergente,
$u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{x+\sqrt{x}\cos(x)}{1+x^{\alpha+2}}dx$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha+1}}dx$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}dt$,
$u_n = \dfrac{i^n}{n}$.

3. (a) Soit $\sum x_n$ une série complexe convergente.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum |u_n - u_{n+1}|$ soit convergente.
Montrer que la série $\sum u_n x_n$ est convergente.
(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour toute série complexe $\sum x_n$, la série $\sum u_n x_n$ converge.
Montrer que la série $\sum |u_n - u_{n+1}|$ est convergente. (On pourra raisonner par l'absurde).
4. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux intégrable. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.
Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente, de somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$.
5. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$ continue. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si I existe et qu'en cas d'existence $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive [1]. Montrer que les séries de termes géné-

1. Un réel positif est un élément de $\mathbb{R}_+$; un élément de $\mathbb{R}_+^*$ est dit strictement positif et un élément de $\mathbb{R}_-^*$ est dit strictement négatif.

raux :
$\dfrac{u_n}{1+u_n}$, $\displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e}dx$ et $\ln(1+u_n)$ sont de même nature.

7. Soit $\sum u_n$ une série divergente à termes positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \dfrac{u_n}{1+nu_n}$, $x_n = \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$, $y_n = \dfrac{u_n}{1+(u_n)^2}$.
Étudier les natures des séries $\sum v_n$, $\sum w_n$, $\sum x_n$, $\sum y_n$.

8. (a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0,\ v_n \geqslant 0$.
On suppose $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes. Quelle est la nature de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$?
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas toutes les deux convergentes.

9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles avec $v_n = \dfrac{u_n^2}{1+u_n+u_n^2}$ et $u_n \geqslant 0$.
Quelle est la nature de la série $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

10. Soit $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Soit $\sum u_n$ une série convergente, $u_n \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite > 0 telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k = l > 0$.
   (a) Montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (b) On pose $S_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $v_n = nS_n - (n-1)S_{n-1}$, $w_n = nu_n$.
Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_1 + \cdots + v_n}{w_1 + \cdots + w_n} = l+1$;
en déduire : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{l}{l+1}n^2u_n\right)$.

12. Soit $\sum u_n$ une série convergente avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n+1) \geqslant -1$. On pourra comparer $\ln(k)$ avec $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt$.

En déduire $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{e}$.

(c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < n$.

Vérifier que l'on a $v_n \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

(d) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{k+1}$.

(e) Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ une famille de réels positifs.

Montrer que l'on a la relation $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Appliquer ce résultat avec $x_i = i u_i$.

(f) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k}$ converge et a une somme majorée par $e\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

(g) Application : soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$, $u_n > 0$ une série convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n}$ converge et a une somme inférieure à $e\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

13. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0 telle que $\sum a_n$ diverge. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, $u_n = \dfrac{a_n}{S_n}$ et $v_n = \dfrac{a_n}{(S_n)^2}$.
Étudier la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$.

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{(u_0 + \cdots + u_n)^\alpha}$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? On pourra comparer avec l'intégrale entre S_{n-1} et S_n de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ où S_n désigne la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n.

15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :
$u_0 \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} + n$.
Montrer que $\sum u_n$ diverge.

16. On considère, sur $\mathbb{C}$, l'équation $x^3 - x - 1 = 0$. Que dire de ses racines ?
Soit α la racine réelle. Soient β et γ ses deux racines non réelles. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ et v_n le reste de la division euclidienne de u_n par 4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique. On pourra trouver une relation entre u_{n+3}, u_{n+1} et u_n.

Étudier les natures des séries $\sum \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)}{n}$, $\sum \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)}{n}$.

Étudier les séries : $\sum \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)}{n}$, $\sum \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)}{n}$.

17. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ où u_n est égal à $-\dfrac{1}{n}$ lorsque n est le carré d'un entier, $\dfrac{1}{n}$ sinon ?

18. Quel est l'ensemble de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{1+y^{2n}}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$?

19. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)}$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$.

    Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? (En notant $\Pi_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)$, exprimer v_n en fonction de Π_n et Π_{n-1}).

20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1\in\mathbb{R}$ et pour $n\geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{\sin(u_n)}{n}$. Nature de la série $\sum u_n$.

21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\geqslant -2$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Nature de la série $\sum(u_n-2)$.

22. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive de limite nulle. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général, positif, d'une série convergente ; on suppose que $u_{n+1}\leqslant u_n+v_n$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

    (b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On suppose que la série $\sum a_{n^2}$ est convergente. Montrer que $\sum(-1)^{E(\sqrt{n})}a_n$ est convergente.

23. Soit f une fonction strictement positive définie sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

    (a) Étudier la nature de la série $\sum f(n)$.

    (b) Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, du reste d'ordre n de la somme de la série.

24. Soit $\sum u_n$ une série, réelle ou complexe, convergente. Montrer, à l'aide d'exemples, que la série $\sum(u_n)^3$ peut être semi-convergente, absolument convergente ou divergente.

25. Soit u_n une suite décroissante telle que $\sum u_n$ est convergente.
    Montrer que nu_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

26. Soit $\sum a_n$ une série complexe ; soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; soit enfin $b_n = \displaystyle\sum_{k=1+\varphi(n-1)}^{\varphi(n)} a_k$, pour $n \geqslant 1$ et $b_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(0)} a_k$.
    (a) Montrer : $\left(\sum a_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum b_n \text{ convergente et } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.
    (b) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ est borné alors la réciproque est vraie.
27. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}$ p réels donnés. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}\alpha_k$ où k est le reste de la division euclidienne de n par p.
    Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$?
28. Soit $x_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. On note $\lambda = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$; déterminer λ, donner un équivalent de $x_n - \lambda$.
29. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Que dire de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, x_n$?
30. Soit $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. On suppose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$. Nature de la série $\sum u_n$.
31. (a) Soit $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. On suppose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
    (b) On suppose qu'il existe $A > 1$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{A}{n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On suppose que lorsque n tend vers $+\infty$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + v_n$ où $\sum v_n$ est absolument convergente. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.
    (a) Étudier la série $\sum a_n$ et en déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
    (b) Soit $f : x \in]-1, 0[\longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$. Montrer que f est bien définie et que l'on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right)$

33. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1-k^2n^2}$.
Déterminer, en étudiant $n^2 S_n$, un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.
Soit $A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt$. Quelle est la limite l de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Montrer que $A_n - l = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-2}-t^n}{1+t^n} dt = 2S_n$.
Nature de la série de terme général $|A_n - l|$.

34. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$. Calculer $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.
En étudiant $\sum \ln\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

35. Soient a, b deux réels non éléments de $\mathbb{Z}_-$. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.
    (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.
    On suppose maintenant cette condition réalisée.
    (b) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

36. Soit φ une application injective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\varphi(n)}{n^2}$.
Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la série $\sum u_n$ diverge.

37. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$; on pourra remarquer que $\dfrac{1}{4n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{4n} dt$.

38. Soit $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Étudier la nature des séries de termes généraux :
$u_n = \dfrac{1}{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\alpha^n\right)$; $v_n = \dfrac{1}{n+1} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\alpha^n\right)$.
(On pourra remarquer que α est racine du polynôme $x^2 - x - 1$ dont l'autre racine sera notée β).

39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle $\geqslant 0$, soit $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle. On suppose pour $n \geqslant 1$, $U_{2n} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) U_n$.
Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

40. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose : $b_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k$.
    (a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
    (b) Soit $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$. Exprimer B_n comme combinaison linéaire des $A_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$.

(c) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Comparer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

41. Soit pour $n\geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\ \cdots +\ \sqrt[n]{n}}$.
    (a) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
    (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$ et pour $n\geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{n}u_n$.
    Quelle est la nature de la série $\sum v_n$?

42. Soit $\alpha > 1$, on pose pour $n\geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
    Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{R_n}{S_n}$?

43. Soient $a_n \in \mathbb{C}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$. On suppose que la série $\sum a_n \exp(-\lambda_n z)$ converge pour $z = z_0 \in \mathbb{C}$.
    Montrer qu'elle converge dans $D_k = \{z \in \mathbb{C},\ \Re e(z - z_0) > 0\}$; la convergence étant uniforme sur la partie de D_k vérifiant $|\operatorname{Arg}(z - z_0)|\leqslant a$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

44. (a) Soit $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\cos(b\ln t)}{t}dt$ où $b \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$?
    (b) Soit $v_n = \dfrac{\cos(b\ln n)}{n}$.
    Montrer que $u_n - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (t-n-1)\frac{\cos(b\ln t) + b\sin(b\ln t)}{t^2}dt$.
    (c) Quelle est la nature de la série $\sum v_n$?
    (d) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$? où $z \in \mathbb{C}$. n^z est défini par $n^z = \exp(z\ln(n))$.

45. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes réels $\geqslant 0$.
    (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge.
    (b) Étudier la convergence de la série $\sum v_k$ avec $v_k = (k+1)\left(\displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}\right)$, quelle est sa somme ?

46. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un ensemble non vide D à valeurs réelles. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de D dans $\mathbb{C}$.
    Pour chaque $x \in D$, $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge uniformément vers 0. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle qu'il existe K indépendant de x et n vérifiant : $\left\|\sum_{p=0}^{n} a_p(x)\right\|\leqslant K$.

Montrer que la série $\sum \alpha_n\, a_n$ converge uniformément sur D.

Application à la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\exp(inx)}{\sqrt{n+x}}$.

47. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet E. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Étudier[2] la convergence, la convergence uniforme, de : $\displaystyle\sum \left(x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{x^n}{1+x^n} a_n \in \mathbb{R}\right)$.

    Continuité de la somme.

    On pourra poser, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

48. Soit $u_n : D \to \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in D$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ est une série qui converge uniformément sur D.

    Application aux séries : $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+\cos(x)}$, $\displaystyle\sum(-1)^n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

49. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies de A dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \leqslant M$. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément.

    Montrer que la série de fonctions $\sum f_n g_n$ converge uniformément.

50. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe qui converge vers 0.
    On suppose que la série de terme général $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$ est absolument convergente.
    Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé complet E telle qu'il existe une constante $A\geqslant 0$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right\|\leqslant A$.

    Montrer que la série de terme général $\varepsilon_n a_n$ est convergente.

    On pourra poser $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

51. (a) Soit, pour $x\geqslant 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = (-1)^n \exp(-(n+1)x)$.
    Convergence et somme de la série $\sum u_n$.

    (b) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $[a, +\infty[$, $a > 0$?

52. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$, $x\geqslant 0$.

    f est-elle définie ? Quelle est la nature de la convergence ?

2. Pour $n = 0$, $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ est égal à $\dfrac{1}{2}$.

53. On pose, lorsque cela existe, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+x^2}$.

    Étudier la continuité de f.

54. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2)$.

    (a) Donner l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

    (b) La convergence est-elle uniforme ?

55. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(n)\operatorname{ch}(n+x)}$.

    Étudier la continuité et les variations de f.

56. Soit $f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-n\left(x^2+y^2\right)\right)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

57. Montrer que pour $\alpha > 0$, f_α définie par $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^\alpha \exp(-xn^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

    Étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_\alpha(x)$. (On pourra encadrer par deux intégrales).

58. Soit $x > 1$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$. Étudier la continuité de f et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

    On pourra retrancher $\frac{(-1)^n}{nx}$.

59. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $u_0(x) = x$, $\forall(n,\ x) \in \mathbb{N}\times[-1,\ 1]$, $u_{n+1}(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}u_n(x)\right)$. Nature de la série $\sum u_n(x)$?

    (on pourra remarquer que $|u_{n+1}|\leqslant|u_n|$ et utiliser les séries alternées).

60. Montrer : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

61. Montrer que pour $y > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^y}{\exp(x)-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{y+1}} \int_0^{+\infty} \alpha^n x^y \exp(-x)dx.$$

62. Soient $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

    (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}*_+$.

    (b) Déterminer des équivalents de $f(x)$ au voisinage de 0 et $+\infty$.

    Montrer : $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ existe $= g(x)$.

Écrire $g(x)$ comme la somme d'une série. Déterminer $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x)$.

f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

63. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{atan}(nx)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Étudier $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

64. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

    Calculer $f'(x)$. En déduire : $f(x) = \operatorname{atan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x\cos(x)}\right)$.

    Calculer : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$.

65. Continuité et dérivabilité de : $f \,:\, x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, $g \,:\, x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

    Étudier $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x)$. Montrer pour $x > 1$: $g(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)$.

66. Trouver un équivalent quand $x \to 1$ par valeurs inférieures de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

    On pourra encadrer par deux intégrales et utiliser $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

67. Trouver un équivalent quand $x \underset{>}{\to} 0$, et quand $x \to +\infty$ de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.

    Pour le cas infini, on pourra étudier la nature de la série de terme général $\frac{\exp(x)}{\operatorname{sh}(nx)}$.

68. Continuité de la fonction f définie par : $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{\exp(-nx)}{n + (-1)^n}\right)$. On pourra comparer le terme général de la série avec $(-1)^n \frac{\exp(-nx)}{n}$.

69. Trouver un équivalent, lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$, de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. On admettra que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

70. Soit, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \sum\limits_{n > x} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)\right)^2$.

    (a) Montrer que f est continue par morceaux.

    (b) En un point de discontinuité, calculer le saut de f.

    (c) Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de $f(x)$.

71. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. On pose, pour $x>0$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\exp(-xa_n)$.
    (a) Montrer que f est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.
    (b) Étudier les cas $a_n=n+1,\ a_n=2n+1$.
72. Montrer que $t\in]0,1[\longmapsto\dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\in\mathbb{R}$ est intégrable et que l'intégrale est égale à : $-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3}$.
73. Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ $x\geqslant 0$.
    Trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x\to+\infty$. On pourra calculer $f(x)+f(x)$ en décalant l'un des deux indices d'un cran.
74. Soit $\gamma_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ $n\geqslant 1$. Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on note γ la limite.
    On note, lorsque cela existe, $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ avec x réel.
    Montrer : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\zeta(x+1)-\frac{1}{x}=\gamma$. On pourra utiliser $\zeta(1+x)-\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{s+1}}$.
75. On suppose $\sum a_nx^n$ absolument convergente pour un réel x donné.
    À-t-on : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\int_0^{+\infty}\left(\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}t^nx^ndt\right)$?
76. Montrer que la série double $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(m+n)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha>2$.
77. Soit $\alpha>0$; on pose $f_n(x)=\exp\left(-xn^\alpha\right)$ et si la série converge $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$.
    (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? f est-elle continue ?
    (b) Quel est le comportement de f en $+\infty$?
    Donner un équivalent de f quand x tend vers 0.
78. (a) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\exp\left(-n^\alpha x^\beta\right)$ où $x\in\mathbb{R}_+^*$?
    (b) La fonction f définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-n^\alpha x^\beta\right)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
79. Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{\exp(t)-1}dt=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

80. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$ où $x \in \mathbb{R}$.

81. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2)$.
   (a) Quel est le domaine de définition de S ?
   (b) La convergence est-elle uniforme, normale ?
   (c) Donner l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

82. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n\exp(-x)}{n!}$.
   (a) Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

83. Existence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t))dt$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-(2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.
   Montrer que $J = -S(0)$.

84. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n-\sqrt{n}\sin(n)}$?

85. Soit $m \in \mathbb{N},\ m\geqslant 2$. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $u_0 = 0,\ u_n = \dfrac{1}{n}$ lorsque n n'est pas divisible par m et $u_n = \dfrac{x}{n}$ lorsque n est divisible par m.
   Montrer qu'il existe une et une seule valeur de x telle que la série de terme général u_n soit convergente.

86. Nature de la série de terme général u_n avec $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $u_n = n^{-\alpha}\left[(n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

87. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; posons : $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
   (a) f_n est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
   (c) Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauß $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx$.

88. Soit $\sum a_n$ une série complexe ; soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; soit enfin $b_n = \displaystyle\sum_{k=1+\varphi(n-1)}^{\varphi(n)} a_k$, pour $n\geqslant 1$ et $b_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(0)} a_k$.
   (a) Montrer : $\left(\sum a_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum b_n \text{ convergente et } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.
   (b) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $\varphi(n+1)-\varphi(n)$ est borné alors la réciproque est vraie.

89. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers 0. Nous supposons qu'il existe une bijection strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{\varphi(k)} \geqslant \dfrac{1}{\varphi(k)}$. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

90. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodiques.
Soit $f \in E$, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite > 0 telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose $f_0 = f$ et pour $n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \dfrac{1}{a_n}\displaystyle\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt$.
    (a) Montrer que $f_n \in E$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction φ.
    Quelle est la classe de φ ?

91. Soit X l'ensemble des applications uniformément continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in X$.
    (a) Montrer qu'il existe un et un seul élément v de X tel que $v' = n(u+v)$.
    (b) On note $T_n(u)$ l'élément v défini précédemment ; on munit X de la norme infinie.
    Montrer que $T_n \in \mathcal{L}_C(X)$; calculer $|||T_n|||$.
    Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n(u) = u$.
    (c) Soit D l'ensemble des fonctions de X dérivables. Montrer que D est dense dans X.

92. Soit $E = \mathcal{C}^\circ([0,1],\ \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.
Soit $\mathcal{L}_C(E)$ l'espace (complet) des endomorphismes continus de E que l'on muni de la norme subordonnée. Soit φ l'application de E dans lui-même définie par $\forall x \in [0,\ 1],\ (\varphi(f))(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
    (a) Exprimer[3] φ^n à l'aide d'une seule intégrale.
    Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}_C(E)$, calculer $|||\varphi^n|||$.
    (b) Montrer que $\sum \varphi^n$ converge dans $(\mathcal{L}_C(E), |||\ |||)$ et calculer sa somme.
    (c) Montrer que pour toute fonction $g \in E$ il existe une unique fonction $f \in E$ telle que pour tout $x \in [0,1],\ g(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

93. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet, soit $u \in \mathcal{L}_C(E)$, l'espace des endomorphismes continus de E ; déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left(Id_E + \dfrac{u}{n}\right)^n$.

94. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in GL(E)$; montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f = \exp(g)$. On montrera qu'une matrice complexe est semblable à une matrice diagonale par blocs ; chaque bloc étant du type $\lambda I + T$ où T est une matrice nilpotente.

3. φ^n désigne la composée n fois de φ.

Chapitre 3

Corrigés séries, séries de fonctions

1. **Produits infinis**

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{P_n}{P_{n-1}} = u_n$ donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une limite $l \in \mathbb{C}^*$ il est clair que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
   Soit $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.
   $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$ et la limite est infinie alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

   (b) Supposons que $\prod(1+u_n)$ converge. Soit $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$.
   La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}^*$. Il existe donc $a > 0$ Minorant de la suite $(|P_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres complexes donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow |P_q - P_p| \leqslant \varepsilon$. Nous en déduisons pour $q > p \geqslant N$, $\left|\dfrac{P_q}{P_p} - 1\right| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\left|\displaystyle\prod_{k=p+1}^{q}(1+u_n) - 1\right| \leqslant \varepsilon$.
   Réciproquement, supposons
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q > p \geqslant N \Rightarrow \left|\displaystyle\prod_{k=p+1}^{q}(1+u_n) - 1\right| \leqslant \varepsilon$.
   Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p > N_1$ on ait $\left|\dfrac{P_p}{P_{N_1}} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ soit encore $|P_p - P_{N_1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|P_{N_1}|$. Il vient donc $\dfrac{1}{2}|P_{N_1}| \leqslant P_p \leqslant \dfrac{3}{2}|P_{N_1}|$.
   Notons : $\alpha = \min\left(\{|P_k|,\ k \in \mathbb{N},\ k \leqslant N_1\},\ \dfrac{1}{2}|P_{N_1}|\right)$ et
   $\beta = \max\left(\{|P_k|,\ k \in \mathbb{N},\ k \leqslant N_1\},\ \dfrac{3}{2}|P_{N_1}|\right)$.
   Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant |P_n| \leqslant \beta$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, par hypothèse, $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2$,

$q > p \geqslant N$ on ait $\left|\dfrac{P_q}{P_p} - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\beta}$. Nous en déduisons $|P_q - P_p| \leqslant \varepsilon$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy et converge ; sa limite l est minorée par $\alpha > 0$ donc le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge.

Redémontrons un résultat concernant les fonctions symétriques des racines d'un polynôme. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ une famille de nombres complexes. Notons pour $k \in \mathbb{N}_n$, $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1\leqslant j_1<j_2< \cdots <j_k\leqslant N} a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_k}$ et $\sigma_0 = 1$. Nous avons alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+a_k) = \sum_{k=0}^{n}\sigma_{n-k}X^k$.

Cette relation est vraie pour $n = 1$. Supposons-là prouvée jusqu'au rang n.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(X+a_k) &= (X+a_{n+1})\sum_{k=0}^{n}\sigma_{n-k}X^k\\ &= \sigma_n a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(\sigma_{n+1-i}+\sigma_{n-i}a_{n+1})X^i + X^{n+1}.\end{aligned}$$

Notons, pour $i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_{n+1-i} = \sigma_{n+1-i} + \sigma_{n-i}a_{n+1}$.

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1-i} &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2< \cdots <j_{n+1-i}\leqslant n} a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{n+1-i}} + \sum_{1\leqslant j_1<j_2< \cdots <j_{n-i}\leqslant n} a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{n-i}}a_{n+1}\\ &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2< \cdots <j_{n+1-i}\leqslant n+1} a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{n+1-i}} = \sigma_{n+1-i}.\end{aligned}$$

$\lambda_{n+1} = a_1\cdots a_{n+1}$. Le résultat est donc prouvé au rang $n+1$.

Nous avons donc en particulier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \sum_{k=0}^{n}\sigma_{n-k} == \sum_{k=0}^{n}\sigma_k$.

Nous obtenons alors $\left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\sigma_k|$.

$|\sigma_k| \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant j_1<j_2< \cdots <j_k\leqslant N} |a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_k}|$.

En réutilisant la relation vue plus haut appliquée aux coefficients $|a_k|$ nous obtenons $\left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1\right|$.

Considérons alors un produit infini $\prod(1+u_n)$ absolument convergent. En utilisant tout ce qui précède nous en déduisons

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall(p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q > p \geqslant N \Rightarrow \left|\prod_{k=p+1}^{q}(1+|u_k|) - 1\right| \leqslant \varepsilon.$$

D'après ce que nous venons de démontrer, il vient alors $\left|\displaystyle\prod_{k=p+1}^{q}(1+u_k) - 1\right| \leqslant \varepsilon$.

Le produit infini est donc convergent.

(c) Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \ln(P_n)$.
$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff \exists l \in \mathbb{C},\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} P_n = \exp(l) > 0$.
L'équivalence est donc démontrée.

(d) D'après le résultat précédent, $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série de terme général $\ln(1+u_n)$ est convergente. u_n est de signe fixe et $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ donc $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature [1] donc $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série de terme général u_n est convergente.

(e) Supposons que la série $\sum (u_n)^2$ soit convergente. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(1+u_n) = u_n + O(u_n^2)$. La série de terme général $\ln(1+u_n)$ est alors convergente donc le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge.
Supposons que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge.
Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{1}{2}(u_n)^2 + o(u_n^2)$.
$-\dfrac{1}{2}(u_n)^2 + o(u_n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}(u_n)^2$ donc $\ln(1+u_n)$ est convergente puis le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge.

2. • $a > 0$. $u_n = \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{1+n^a}\right) - \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$.
Lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\operatorname{asin}\left(\frac{1}{1+n^a}\right) = \operatorname{asin}\left(\frac{1}{n^a\left(1+\frac{1}{n^a}\right)}\right) = \operatorname{asin}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge en tant que série alternée dont le terme général a son module décroissant de limite nulle.
Lorsque n tend vers $+\infty$ $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{2(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge, $\sum\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge et $\sum \dfrac{1}{2(n+1)}$ diverge donc $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ diverge.
$\prod\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ diverge alors que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge.
$\prod\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{2(n+1)}\right)$ converge alors que $\sum\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{2(n+1)}\right)$ diverge.
En effet, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{2(n+1)}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{2(n+1)}\right)$ est bien convergente donc le produit infini $\prod\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{2(n+1)}\right)$ converge

Nous en déduisons $u_n = \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{1+n^a}\right) - \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{n^a}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2a}}$.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$.

• La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ est une série alternée. Le terme général tend clairement vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
$\ln(|u_n|) = -\dfrac{n+1}{n}\ln(n)$.
Posons, pour $t\geqslant 1$, $f(t) = \dfrac{t+1}{t}\ln(t)$. $f'(t) = \dfrac{t+1-\ln(t)}{t^2}$. $f'(t)\geqslant\dfrac{2}{t^2} > 0$ donc f est croissante et $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} \in \mathbb{R}$ est décroissante. La série alternée est donc convergente.

• $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.
Lorsque n tend vers l'infini nous avons
$\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{4n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ donc
$\pi n^2\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = -n\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} - \dfrac{\pi}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\pi n^2\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) &= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3n}$ est une série alternée convergente et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est absolument convergente donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(n^2\pi\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ est convergente.

• $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\right)^{n^\alpha}$.
Pour $\alpha\leqslant 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc la série $\sum u_n$ diverge.
Supposons $\alpha > 0$. $\ln(n^2u_n) = 2\ln(n) + n^\alpha\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)\right)$.
$\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{(\ln(n))^2}$ donc $\ln(n^2u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n^\alpha}{(\ln(n))^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

• $u_n = \cos\left(\pi\dfrac{2n^3+n^2+an+b}{2n^2}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\pi\dfrac{an+b}{2n^2}\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\pi a}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$\sum \dfrac{(-1)^{n+1}\pi a}{2n}$ est une série alternée convergente car $\left(\dfrac{\pi a}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes ; elle est convergente.

• $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

Si $a=0$ la série $\sum u_n$ est clairement convergente.

Supposons $a\neq 0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|a|}{e}$.

La fonction exponentielle est convexe donc la courbe d'équation $y=\exp(x)$ est “au dessus” de la tangente en tout point ; en particulier $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+x\leqslant\exp(x)$.

Nous en déduisons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+\dfrac{1}{n}\leqslant\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\leqslant e$ et enfin

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\geqslant\dfrac{|a|}{e}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_{n+1}| = |u_1|\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|u_{k+1}|}{|u_k|}\geqslant\left(\dfrac{|a|}{e}\right)^n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_n|\geqslant e\left(\dfrac{|a|}{e}\right)^n$.

Si $|a|<e$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente. Si $|a|\geqslant e$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 donc la série est divergente.

• $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$ $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Si $b=1$, $2^{\sqrt{n}}+b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{\sqrt{n}}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$.

Si $b\neq 1$, $2^{\sqrt{n}}+b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b^n$.

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Supposons $b\neq 1$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{b}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{b}$.

Si $a\geqslant b$, le terme général u_n tend vers l'infini donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si $a<b$ alors d'après le critère de d'Alembert la série $\sum u_n$ converge.

Finalement la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a<b$.

• $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+b}\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}} = 1+\dfrac{a}{2n}+\dfrac{b}{2n^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{a^2}{n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Donc lorsque n tend vers $+\infty$, $\sqrt{n^2+an+b} = n + \dfrac{a}{2} + \dfrac{4b-a^2}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi a}{2} + \dfrac{\pi(4b-a^2)}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Si $a \notin 2\mathbb{Z}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum u_n$ n'est pas convergente.

Supposons $a = 2p \in 2\mathbb{Z}$. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$u_n = (-1)^{n+p} \sin\left(\dfrac{\pi(4b-a^2)}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+p}\dfrac{\pi(4b-a^2)}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum u_n$ est alors convergente.

Nous pouvons remarquer que, dans ce cas, la convergence est alors absolue si et seulement si $4b - a^2 = 0$.

• $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, $S_{2N+2} = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{N}(-1)^p\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1}\right) + \frac{(-1)^{N+1}}{2N+2}$ et

$S_{2N+1} = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{N}(-1)^p\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1}\right)$.

La suite de terme général $\dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2p+1}$ est décroissante de limite nulle donc la série de terme général $(-1)^p\left(\dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2p+1}\right)$ est une série alternée convergente. Nous en déduisons que la série $\sum u_n$ est convergente et [2]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1}\right).$$

• $u_n = \left(\operatorname{acos}\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$ $(\alpha > 0)$.

Pour $x \in [0,\ 2]$ nous avons $\operatorname{acos}(1-x) = 2\operatorname{asin}\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)$.

Nous obtenons donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(2\operatorname{asin}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2(n+1)}}\right)\right)^\alpha$.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

• $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^a}\right)^n$ $(a > 0)$.

2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2)$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = -1 + \operatorname{atan}(1) = \frac{\pi}{4} - 1$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

$n\ln\left(1-\dfrac{1}{n^a}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^{1-a}$.

Si $a>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, Si $a=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{e}$.

Supposons $a<1$. $2\ln(n)+n\ln\left(1-\dfrac{1}{n^a}\right) = n^{1-a}\left(\dfrac{2\ln(n)}{n^{1-a}}+\dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^a}\right)}{n^{1-a}}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\ln\left(1-\frac{1}{n^a}\right)}{n^{1-a}} = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\ln(n)}{n^{1-a}} = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2\ln(n)+n\ln\left(1-\dfrac{1}{n^a}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$.

La série $\sum u_n$ est donc convergente si et seulement si $0<a<1$.

• $u_n = \dfrac{1}{n^\beta}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha$.

Supposons $\alpha<-1$. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha$ possède une limite réelle l strictement positive lors que n tend vers $+\infty$. Nous avons alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{l}{n^\beta}$. $\sum u_n$ converge donc si et seulement si $\beta>1$.

Supposons $\alpha=-1$. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{ln(n)}{n^\beta}$.

$\sum u_n$ converge donc si et seulement si $\beta>1$.

Supposons $\alpha>-1$. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}$ avec $K>0$ donc

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha+1)n^{\beta-\alpha-1}}$. $\sum u_n$ converge donc si et seulement si $\beta-\alpha>2$.

• $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}}dx$.

L'intégrale existe si et seulement si $\alpha>0$.

$\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}} \underset{x\to0^+}{\sim} x^{\alpha-1}$ donc $u_n \underset{x\to0^+}{\sim} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha n^\alpha}$.

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

• $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$.

Si $\alpha\leqslant1$, le terme général u_n ne converge pas vers 0.

Supposons $\alpha>1$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant2$. $S_{2n} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)^{\alpha+1}} - \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}$.

$S_{2n+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^{\alpha+1}} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}$.

La série de terme général $\frac{1}{p^{\alpha+1}}$ est convergente donc les suites de termes généraux S_{2n} et S_{2n+1} convergent (et ont la même limite) si et seulement si $\alpha - 1 > 1$. Dans ces conditions la suite de terme général S_n converge et la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. dans ces conditions nous avons $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^{\alpha+1}} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}$.

• $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\operatorname{atan} t}{1+t}\, dt$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

La fonction $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{\operatorname{atan}(t)}{1+t} \in \mathbb{R}_+$ n'est pas intégrable donc sachant que $\frac{\operatorname{atan}(t)}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(1+t)}$ nous avons

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{dt}{1+t} = \frac{\pi}{2} \ln(1+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \ln(n)$.

Nous en déduisons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$.

Nous avons vu plus haut les série de Bertrand ; la série $\sum u_n$ converge donc si et seulement si $\alpha > 1$.

• $u_n = \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, la série u_n converge. Supposons alors $x \in \mathbb{R}^*$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Supposons $\alpha > 1$.

La suite de terme général S_n a une limite réelle $l > 1$. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{l} x^n$. Nous en déduisons $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Supposons $\alpha = 1$.

Comme nous l'avons déjà vu dans d'autres exercices, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{\ln(n)}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|$.

Pour $|x| < 1$ la série $\sum u_n$ converge.

Pour $|x| > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.

Pour $x = 1$, en utilisant l'exercice concernant les séries de Bertrand nous en déduisons que la série $\sum u_n$ diverge.

Pour $x = -1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{S_n}$. La suite de terme général S_n est croissante de limite $+\infty$ donc la série alternée $\sum u_n$ converge.

Supposons $\alpha < 1$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\lambda_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\dfrac{\alpha-1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$.

La série de terme général $\lambda_n < 0$ est divergente donc $\Lambda_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ vérifie $\Lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\alpha)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^\alpha}$ soit encore $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\alpha)\dfrac{x^n}{n^{1-\alpha}}$.

$\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|$ donc pour $|x| < 1$ la série $\sum u_n$ converge, pour $|x| > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.

Pour $x = -1$ comme plus haut la série $\sum u_n$ est unesérie alternée convergente.

Pour $x = 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

En résumé nous avons :

La série $\sum u_n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n$ converge absolument pour $x = 1$ et $\alpha < 0$, la série $\sum u_n$ converge (non absolument) pour $x = -1$ et $\alpha \leqslant 1$. Dans les autres cas la série $\sum u_n$ diverge.

• $u_n = \operatorname{asin}\left(\dfrac{n^2}{a+n^2}\right) - \operatorname{asin}\left(\dfrac{n^2}{b+n^2}\right)$, a et b strictement positifs.

Nous pouvons utiliser deux résultats pour conclure.

Pour $x \in [0,\ 2]$ nous avons $\operatorname{asin}(1-x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{asin}\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)$.

Nous avons aussi pour $|x| \leqslant 1$ $\cos(\operatorname{asin}(x)) = \sin(\operatorname{acos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

En utilisant la première relation nous avons lorsque x tend vers 0,

$\operatorname{asin}(1-x) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\sqrt{2x} + O\left(x\sqrt{x}\right)\right)$.

Avec $x = \dfrac{a}{a+n^2}$ nous obtenons lorsque n tend vers $+\infty$,

$\operatorname{asin}\left(\dfrac{n^2}{a+n^2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\sqrt{\dfrac{2a}{a+n^2}} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$ et aussi,

$\operatorname{asin}\left(\dfrac{n^2}{b+n^2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\sqrt{\dfrac{2b}{b+n^2}} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$.

$\sqrt{\dfrac{2a}{a+n^2}} = \dfrac{\sqrt{2a}}{n}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Finalement lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $u_n = \dfrac{\sqrt{2b}-\sqrt{2a}}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
La série $\sum u_n$ diverge sauf dans le cas $a = b$.
En utilisant la seconde relation nous avons

$$\begin{aligned}
\sin(u_n) &= \frac{n^2}{a+n^2}\sqrt{1-\left(\frac{n^2}{b+n^2}\right)^2} - \frac{n^2}{b+n^2}\sqrt{1-\left(\frac{n^2}{a+n^2}\right)^2} \\
&= \frac{n^2}{(a+n^2)(b+n^2)}(\sqrt{b(b+2n^2)} - \sqrt{a(a+2n^2)}) \\
&= \frac{1}{n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{b}{n^2}\right)}\left(\sqrt{2b\left(1+\frac{b}{2n^2}\right)} - \sqrt{2a\left(1+\frac{a}{2n^2}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons :

$$\sqrt{2b\left(1+\frac{b}{2n^2}\right)} = \sqrt{2b}\left(1+\frac{b}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right).$$

$$\frac{1}{n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{b}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{a+b}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\sin(u_n) &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{a+b}{n^2}\right)\left(\sqrt{2b}\left(1+\frac{b}{4n^2}\right) - \sqrt{2a}\left(1+\frac{a}{4n^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \\
&= \frac{1}{n}(\sqrt{2b}-\sqrt{2a}) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Il est clair que $u_n \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $u_n = \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{n}(\sqrt{2b}-\sqrt{2a}) + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$ puis $u_n = \dfrac{1}{n}(\sqrt{2b}-\sqrt{2a}) + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Nous avons le même résultat que plus haut.

- $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1,\ (\alpha > 0)$.

Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} &= \frac{1+x+o(x^2)}{1-x+o(x^2)} \\
&= (1+x+o(x^2))(1+x+x^2+o(x^2)) = 1+2x+2x^2+o(x^2).
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons donc $u_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{2}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

α étant > 0, la série alternée de terme général $\dfrac{2(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente donc la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{2}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ l'est ; c'est-à-dire si et seulement si la série de terme général $\dfrac{2}{n^{2\alpha}}$ est convergente c'est-à-dire si et seulement si $2\alpha > 1$.

- $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - a$.

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$,
$n\ln(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
Nous avons donc lorsque n tend vers $+\infty$
$u_n = \exp\left(n\ln(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right))\right) - a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) - a$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Dans ce cas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12\sqrt{e}n}$ et la série diverge.
Finalement quel que soit a la série diverge.

• $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n+a}\right)^n$, $(a > 0)$.
Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) &= \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

$2n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = 2 - \dfrac{3}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)\right) = e^2\left(1 - \dfrac{3}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

De même

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{2}{n+a}\right) &= \ln\left(1 + \frac{2+a}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \\
&= \frac{2+a}{n} - \frac{(2+a)^2}{n^2} - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

$n\ln\left(1 + \dfrac{2}{n+a}\right) = 2 - \dfrac{2a+2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$\left(1 + \dfrac{2}{n+a}\right)^n = e^2\left(1 - \dfrac{2a+2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Nous avons donc, lorsque n tend vers $+\infty$,
$u_n = e^2\left(\dfrac{2a-1}{n} + \dfrac{2a+2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.

• $u_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(1+\sqrt{k})}$

u_n s'écrit aussi, pour $n\geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{2\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\right)}$.

$$\int \ln\left(\frac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) dt = t\ln\left(\frac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) - \int t\left[\frac{1}{2\sqrt{t+1}(1+\sqrt{t+1})} - \frac{1}{2t}\right] dt.$$

Nous avons[3] : $t\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}(1+\sqrt{t+1})} - \dfrac{1}{2t}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$ donc

$$\int \ln\left(\frac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) dt = t\ln\left(\frac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) + \sqrt{t+1}.$$

Posons, pour $n\geqslant 1$, $v_n = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

$t\geqslant 1 \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) \in \mathbb{R}$ est décroissante donc

$\displaystyle\int_1^{n+1} \ln\left(\frac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k$ c'est-à-dire :

$$(n+1)\ln\left(\frac{1+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\right) + \sqrt{n+2} - \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Il vient alors

$$-\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant -(n+1)\ln\left(\frac{1+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\right) - \sqrt{n+2} + \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

$$\ln(u_n) = -\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Il vient immédiatement : $u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+1}}\right)^{-n-1} \exp(\sqrt{2}-\sqrt{n+2})$.

$\left(\dfrac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+1}}\right)^{-n-1} \leqslant 1$ et $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\exp(\sqrt{2}) \leqslant 5$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant 5\exp(-\sqrt{n})$.

La série de terme général $\exp(-\sqrt{n})$ est convergente car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\exp(-\sqrt{n}) = 0$.

• $u_n = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$; $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$, $n\geqslant 1$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f' est intégrable. Soit n_0 un entier naturel au moins égal à a.

Notons, pour $k\geqslant n_0$, $x_k = \displaystyle\int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt$. $|x_k| \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} |f'(t)|dt$.

3. $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right) = \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc la dérivée de $t>0 \longmapsto \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \in \mathbb{R}$ est $t\in\mathbb{R}_+^* \longmapsto -\dfrac{1}{2t\sqrt{1+t}}$.

D'après l'hypothèse, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}\left(\int_k^{k+1}|f'(t)|dt\right)=\int_{n_0}^{n+1}|f'(t)|dt\leqslant\int_{n_0}^{+\infty}|f'(t)|dt$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}x_n$ est donc absolument convergente.

En intégrant par parties nous obtenons $x_k=f(k)-\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)dt$.

$$\sum_{k=n_0}^{n}x_k=\sum_{k=n_0}^{n}f(k)-\int_{n_0}^{n+1}f(t)dt.$$

Si la suite de terme général, pour $n\geqslant n_0$, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1}f(t)dt$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n_0}f(k)$ converge.

Posons $f(t)=\dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t>0$ nous avons $f'(t)=\dfrac{1}{2t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\left(\pi\cos(\pi t)-\dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}\sin(\pi\sqrt{t})\right)$.
Pour $t\geqslant 1$, $|f'(t)|\leqslant\dfrac{\pi+\alpha}{2t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.
Pour $\alpha>\dfrac{1}{2}$, f' est intégrable.

$$\int_1^x\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}dt=2\int_1^{x^2}\frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha-1}}du=2\pi^{2\alpha-2}\int_\pi^{\pi x^2}\frac{\sin(v)}{v^{2\alpha-1}}dv.$$

$$\int_1^y\frac{\sin(t)}{t^\beta}dt=\left[\frac{1-\cos(t)}{t^\beta}\right]_1^y+\beta\int_1^y\frac{1-\cos(t)}{t^{\beta+1}}dt.$$

$0\leqslant\dfrac{1-\cos(t)}{t^{\beta+1}}\leqslant\dfrac{2}{t^{\beta+1}}$. Si $\beta>0$, $t\in[1,\ +\infty[\longmapsto\dfrac{1-\cos(t)}{t^{\beta+1}}\in\mathbb{R}$ est intégrable.
Nous avons donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_1^y\frac{\sin(t)}{t^\beta}dt=\cos(1)-1+\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{\beta+1}}dt$.
Pour $\alpha>\dfrac{1}{2}$ nous en déduisons que $\displaystyle\int_1^x\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}dt$ a une limite réelle[4] quand x tend vers $+\infty$.
En utilisant ce résultat, et ce qui a été vu plus haut, nous en déduisons que pour $\alpha>\dfrac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

Pour $\alpha=\dfrac{1}{2}$, f' n'est pas intégrable.
En effet. $f'(t)=\dfrac{\pi\cos(\pi\sqrt{t})}{2t}-\dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}}$.
Supposons que $t\geqslant 1\longmapsto\dfrac{\cos(\pi\sqrt{t})}{t}\in\mathbb{R}$ soit intégrable.

4. C'est-à-dire : l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}dt$ est convergente.

$t\geqslant 1 \longmapsto \dfrac{\cos(2\pi\sqrt{t})}{t} \in \mathbb{R}$ est donc intégrable et $t\geqslant 1 \longmapsto \dfrac{1+\cos(2\pi\sqrt{t})}{t} \in \mathbb{R}$ n'est pas intégrable. Or $0\leqslant\dfrac{1+\cos(2\pi\sqrt{t})}{t} = \dfrac{2(\cos(\pi\sqrt{t}))^2}{t}\leqslant\dfrac{2|\cos(\pi\sqrt{t})|}{t}$ ce qui est contradictoire.
Nous en déduisons bien que f' n'est pas intégrable sur $[1,\ +\infty[$.
Posons $g(t) = \dfrac{\cos(\pi\sqrt{t}}{t}$. $g'(t) = -\dfrac{\pi\sin(\pi\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}} - \dfrac{\cos(\pi\sqrt{t}}{t^2}$.
De même, $\displaystyle\int_1^x g(t)dt = 2\int_\pi^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u)}{u}du = 2\left[\frac{\sin(u)}{u}\right]_\pi^{\sqrt{x}} + 2\int_\pi^{\sqrt{x}} \frac{\sin(u)}{u^2}du.$
$x\geqslant 1 \longmapsto \displaystyle\int_1^x g(t)dt \in \mathbb{R}$ possède une limite en $+\infty$.
Nous en déduisons donc comme plus haut que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g(n)$ est convergente.
En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral nous avons
$\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \int_n^{n+1}(t-n-1)^2 f''(t)dt.$
Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $f''(t) = -\dfrac{\pi}{t^2}\cos(\pi\sqrt{t}) - \dfrac{\pi^2}{4t\sqrt{t}}\sin(\pi\sqrt{t}) + \dfrac{3}{4t^2\sqrt{t}}\sin(\pi\sqrt{t})$.
f'' est donc intégrable.
$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi n^2}^{\pi(n+1)^2} \sin(u)du = \frac{2}{\pi}\left((-1)^{(n+1)^2} - (-1)^{n^2}\right).$
$f'(k) = \dfrac{\pi\cos(\pi\sqrt{k})}{2k} - \dfrac{\sin(\pi\sqrt{k})}{2k\sqrt{k}}$. La série de terme général $f'(n)$ est donc convergente.
$\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\left((-1)^{(n+1)^2} + 1\right)$ n'a pas de limite donc la série de terme général $f(n)$ est divergente.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est donc divergente.

- $u_n = \operatorname{acos}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}\right)$.

$u_n = \operatorname{asin}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. la série est donc convergente.

- $u_n = (-1)^n\displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)dt.$

Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n u_k$. $\cos(nt^2) = \Re e(\exp(int^2))$. Nous avons alors

$$S_n = \Re e\left(\int_0^1\left(\sum_{k=0}^n \exp(ik(t^2+\pi))\right)dt\right) = \Re e\left(\int_0^1 \frac{(-1)^n\exp(i(n+1)t^2)+1}{\exp(it^2)+1}dt\right).$$

Notons $\sigma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^n \exp(i(n+1)t^2)}{\exp(it^2)+1}dt$.

$S_n = \Re e(\sigma_n) + \Re e\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\exp(it^2)}dt\right)$.

Montrons que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$\sigma_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(i(n+1)u)}{2(1+\exp(iu))\sqrt{u}}du$.

$u \in]0,\ 1] \longmapsto \dfrac{1}{2|1+\exp(iu)|\sqrt{u}} \in \mathbb{R}$ est continue, intégrable donc pour $\varepsilon > 0$

il existe $\alpha \in]0,\ 1[$ tel que $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{2|1+\exp(iu)|\sqrt{u}}du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $f(u) = \dfrac{1}{2(1+\exp(iu)\sqrt{u}}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\ 1]$.

$$\int_\alpha^1 \exp(i(n+1)u)f(u)du = \left[-\frac{i}{(n+1)}f(u)\right]_\alpha^1 + \frac{i}{(n+1)}\int_\alpha^1 \exp(i(n+1)u)f'(u)du.$$

Nous obtenons donc

$$\left|\int_\alpha^1 \exp(i(n+1)u)f(u)du\right| \leqslant \frac{2}{n+1}\sup_{u\in[\alpha,\ 1]}|f(u)| + \frac{1}{n+1}(1-\alpha)\sup_{u\in[\alpha,\ 1]}|f'(u)| = \frac{K}{n+1}.$$

Nous obtenons[5] $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^1 \exp(i(n+1)u)f(u)du = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel

5. Nous pouvons généraliser au cas d'une fonction continue par morceaux. Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $]a,\ b[$ $(-\infty\leqslant a < b\leqslant +\infty)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, intégrable alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp(int)f(t)dt = 0$.
Supposons d'abord que f est continue sur l'intervalle fermé borné $[\alpha,\ \beta]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction polynomiale P telle que $\displaystyle\sup_{t\in[\alpha,\ \beta]}|f(t)-P(t)|\leqslant \frac{\varepsilon}{2(1+\beta-\alpha}$.

$$\int_\alpha^\beta \exp(int)P(t)dt = \left[-\frac{i}{n}\exp(int)P(t)\right]_\alpha^\beta + \frac{i}{n}\int_\alpha^\beta \exp(int)P'(t)dt.$$

Il vient alors $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta \exp(int)P(t)dt\right| \leqslant \frac{2}{n}\sup_{t\in[\alpha,\ \beta]}|P(t)| + \frac{1}{n}\int_\alpha^\beta |P'(t)|dt = \frac{K}{n}$.

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \exp(int)f(t)dt = \int_\alpha^\beta \exp(int)(f(t)-P(t))dt + \int_\alpha^\beta \exp(int)P(t)dt$ donc

$\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta \exp(int)f(t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{n}$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n\geqslant N$ on ait $\dfrac{K}{n}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ donc pour $n\geqslant N$ nous avons

$\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta \exp(int)f(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \exp(int)f(t)dt = 0$.

Si f est continue par morceaux sur l'intervalle fermé borné $[\alpha,\ \beta]$, en utilisant la relation de Chasles que pour $n \geqslant N$ on ait $\left| \int_\alpha^1 \frac{\exp(i(n+1)u)}{2(1+\exp(iu))\sqrt{u}} du \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit encore pour $n \geqslant N$, $|\sigma_n| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, de limite $\Re e \left(\int_0^1 \frac{1}{1+\exp(it^2)} dt \right) = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2) dt \right) = \frac{1}{2}.$$

• $u_n = u_n = (-1)^n n^\alpha \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\ln(t)}{1+t} dt$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Posons pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$.

f est bien défini car $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\ln(t)}{1+t} \in \mathbb{R}$ est continue et vérifie $\lim_{t\to0^+} \sqrt{t}\frac{\ln(t)}{1+t} = 0$.
u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$\frac{\ln(t)}{1+t} \underset{t\to0^+}{\sim} \ln(t)$ et est de signe fixe donc $\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt \underset{x\to0^+}{\sim} \int_0^x \ln(t) = x\ln(x) - x$

Finalement $\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln(x)$.

Nous en déduisons $u_n = n^\alpha \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\ln(t)}{1+t} dt \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} n^{\alpha-1} \ln(n)$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \alpha < 1$. La série $\sum_{n\geqslant1} u_n$ diverge pour $\alpha \geqslant 1$.

En utilisant les résultats concernant les séries de Bertrand, vus plus haut, $\sum_{n\geqslant1} |u_n|$ converge lorsque $\alpha < 0$.

Étudions le cas $0 \leqslant \alpha < 1$.
$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} \int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt + x^{-\alpha} \frac{\ln(x)}{1+x}$.

---

nous sommes conduits au résultat précédent donc la limite est encore nulle.
Supposons maintenant f continue par morceaux définie sur $]a,\ b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, intégrable.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha \in]a,\ b[$ et $\beta \in]a,\ b[$ $(\alpha < \beta)$ tels que $\int_a^\alpha |f(t)| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_\beta^b |f(t)| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\left| \int_a^b \exp(int) f(t) dt \right| \leqslant \int_a^\alpha |f(t)| dt + \int_\beta^b |f(t)| dt + \left| \int_\alpha^\beta \exp(int) f(t) dt \right|.$$

D'après le résultat précédent, $\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta \exp(int) f(t) dt = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on ait $\left| \int_\alpha^\beta \exp(int) f(t) dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc pour $n \geqslant N$ nous avons $\left| \int_a^b \exp(int) f(t) dt \right| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \exp(int) f(t) dt = 0$.

$f'(x)$ a le signe de $g(x) = -\alpha \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t}dt + x\frac{\ln(x)}{1+x}$.
$g'(x) = -\alpha\dfrac{\ln(x)}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2}\ln(x) + \dfrac{1}{1+x}$.
Supposons $0 < x < \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
Sur cet intervalle $g'(x)$ a le signe de $h(x) = \ln(x) - \dfrac{x+1}{\alpha x + \alpha - 1}$.
$h'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(\alpha x+\alpha-1)^2} > 0$.
h est strictement croissante sur $\left]0,\ \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right[$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1-\alpha}{\alpha}\\ <}} h(x) = +\infty$.
Il existe donc $x_0 \in \left]0,\ \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right[$ unique tel que $h(x_0) = 0$.
g' est donc strictement positive sur $\left]x_0,\ \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right[$ et strictement négative sur $]0,\ x_0[$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, g est strictement décroissante sur $]0,\ x_0]$ donc g est strictement négative sur $]0,\ x_0[$ et f est strictement décroissante sur $]0,\ x_0]$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (f est strictement négative sur $]0,\ x_0[$; ce que nous savions déjà).
$|u_n| = -f\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto |u_n| \in \mathbb{R}_+$ est donc décroissante à partir d'un certain rang $N \geqslant \dfrac{1}{x_0}$; nous pouvons appliquer le théorème concernant les séries alternées. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc convergente.

- $u_n = f(n)$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$, $f(x) \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \lambda < 0$.

Quitte à changer f en -f nous pouvons supposer que f ne prend que des valeurs strictement positives car f est continue et ne prend pas la valeur 0.
L'hypothèse concernant la limite nous permet d'en déduire qu'il existe $A > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R},\ x \geqslant A \Rightarrow \dfrac{f'(x}{f(x)} \leqslant \dfrac{\lambda}{2}$. Nous en déduisons $\displaystyle\int_A^x \frac{f'(t}{f(t)}dt \leqslant \frac{\lambda(x-A)}{2}$
c'est-à-dire : $\ln(f(x)) \leqslant \ln(f(A)) + \dfrac{\lambda(x-A)}{2}$ soit encore
$0 < f(x) \leqslant f(A)\exp\left(\dfrac{-\lambda A}{2}\right)\exp\left(\dfrac{\lambda x}{2}\right) = K\exp\left(\dfrac{\lambda x}{2}\right)$.
λ étant strictement négatif, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f(n) = 0$ donc la série $\sum f(n)$ est convergente.

- $u_n = \dfrac{1}{p_n}$ où p_n est le $n^{ième}$ nombre premier ; $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7, \cdots$

$\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ car la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée. Nous pouvons aussi remarquer que $p_n \geqslant n$.

$\ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right) \underset{i\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p_i}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient p_N le plus grand nombre premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers des entiers compris entre 1 et n. Pour k compris entre 1 et N, notons α_k le plus grand exposant de p_k apparaissant dans la décomposition des entiers compris entre 1 et n. Par exemple, pour $n = 20$, $N = 8$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, pour $3 \leqslant k \leqslant 11$, $\alpha_k = 1$.

Il est immédiat que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \prod_{k=1}^{N} \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^{\beta_k}}$.

Pour $x \in]-1,\ 1[$ nous avons $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j$ donc $\displaystyle\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^{\beta_k}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ puis

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

La série harmonique $\displaystyle\sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{j}$ est divergente donc Soit $B > 0$. Soit $A > 1$ tel que $\ln(A) \geqslant B$). Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \geqslant A$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$A \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

En particulier $B \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$.

La série de terme général $\ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$ est une série à terme positif non majorée donc elle est divergente. D'après l'équivalence rappelée plus haut nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{p_k}$ est divergente.

• $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $v_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$. $j = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

$n \in \mathbb{N} \longmapsto j^n \in \mathbb{C}$ est périodique de période 3.

Soit $n \geqslant 4$. Posons $N = E\left(\dfrac{n-4}{3}\right)$.

$$\sum_{j=1}^{n} (u_j + iv_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{j^{i+3k}}{\sqrt[3]{i+3k}} \right) + \sum_{k=3N+1}^{n} \frac{j^k}{\sqrt[3]{k}}.$$

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{j^{l+3k}}{\sqrt[3]{l+3k}} = \frac{j}{\sqrt[3]{1+3k}} + \frac{\overline{j}}{\sqrt[3]{2+3k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3+3k}}.$$

Lorsque k tend vers $+\infty$ nous avons $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3+3k}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3k}}\left(1-\dfrac{1}{3k}+O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right)$,

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+3k}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3k}}\left(1-\dfrac{2}{9k}+O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right)$,

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+3k}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3k}}\left(1-\dfrac{1}{9k}+O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{j}{\sqrt[3]{1+3k}} + \frac{\overline{j}}{\sqrt[3]{2+3k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3+3k}} \\ &= ((1+j+\overline{j}) - \frac{1}{9k}(3+j+2\overline{j}))\frac{1}{\sqrt[3]{3k}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{7}{3}}}\right) = O\left(\frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}\right). \end{aligned}$$

$$\left|\sum_{k=3N+1}^{n} \frac{j^k}{\sqrt[3]{k}}\right| \leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{3N+1}} \leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{n-2}}.$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} w_k$ possède une limite lorsque N tend vers $+\infty$ donc les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ convergent.

• $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ où f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $[0,\ 1]$.

Nous avons déjà calculé les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc en utilisant l'inégalité de Taylor Lagrange, nous obtenons $f(x) = f(0) + f'(0)x + R(x)$ avec $|R(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2} \displaystyle\sup_{t\in[0,\ x]} |f''(t)|$.

Avec $x \in [0,\ 1]$, $|R(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2} \displaystyle\sup_{t\in[0,\ 1]} |f''(t)|$.

$u_n = f(0)\dfrac{n+1}{2n} + f'(0)\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \rho_n$ avec $|\rho_n| \leqslant \|f''\|_\infty \dfrac{(n+1)^2}{8n^4}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\rho_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum u_n$ est donc convergente si et seulement si $f(0) = f'(0) = 0$.

• $u_n = cos\left(\pi n^2 \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $n^2 \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = -n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

• $u_n = \dfrac{a_n}{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^{\alpha}}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite prenant des valeurs strictement positives.

Si la série $\sum a_n$ est convergente alors, en appelant S sa somme, nous avons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{S^{\alpha}}$ donc la série $\sum u_n$ est convergente.

Supposons que la série $\sum a_n$ est divergente, de somme partielle d'indice n égale à S_n. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{(S_n)^{\alpha}}$.

Supposons $\alpha > 1$. $u_n \leqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^{\alpha}}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^{\alpha}} \leqslant \int_{S_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, la série $\sum u_n$ est convergente.

Supposons $\alpha = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$.

La série $\sum u_n$ est de même nature que la série $\sum \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ dont la somme partielle d'indice n est égale à $\ln(S_n) - \ln(S_0)$; la série est donc divergente.

Dans les deux cas la série $\sum u_n$ est divergente.

Supposons $\alpha < 1$. Nous avons $u_n > \dfrac{a_n}{S_n}$. La série est donc divergente.

Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ converge ou $\sum a_n$ diverge et $\alpha > 1$.

• $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dt}{1 + t\sqrt{t}}$.

$u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dt}{1 + t\sqrt{t}} \geqslant \frac{n}{1 + 2n\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2n}}$. La série $\sum u_n$ est divergente.

• $u_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i a_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i}$ où $\sum a_i$ est convergente.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^{n} ia_i = \sum_{i=1}^{n} i(S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} iS_i - \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)S_i = nS_n - \sum_{i=0}^{n-1} S_i.$

$u_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\left(nS_n - \sum_{i=0}^{n-1} S_i\right)$. $nu_n = \dfrac{2n}{n+1}S_n - \dfrac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1} S_i.$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, donc en utilisant le résultat concernant la moyenne de Césaro[6] nous avons $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1} S_i = 2l$ puis $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Posons $A_n = \sum_{i=1}^{n} ia_i = \dfrac{n(n+1)}{2}u_n$. $\dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{A_n}{n} - \dfrac{A_n}{n+1}$ donc

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2}u_k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{A_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \dfrac{A_n}{n+1} = S_n - a_0 - \dfrac{nu_n}{2}.$

Nous en déduisons $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 2l - 2a_0 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Finalement, la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

• $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nt)\ \mathrm{atan}(t)dt$.

Pour $n\geqslant 1$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$, $0\leqslant \exp(-nt)\,\mathrm{atan}(t)\leqslant \dfrac{\pi}{2}\exp(-t)$ donc l'application $t \longmapsto \exp(-nt)\,\mathrm{atan}(t)$ qui est continue est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. u_n est donc défini pour $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\,\mathrm{atan}(x)|\leqslant|x|$.

$0\leqslant u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u)\,\mathrm{atan}\left(\dfrac{u}{n}\right) du \leqslant \dfrac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} u\exp(-u)du = \dfrac{1}{n^2}.$

$\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

• $u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}\cos(x)}{1+x^{\alpha+2}}dx$.

---

6. Moyenne de Césaro : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur un espace vectoriel normé convergeant vers l. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$.

$y_n - l = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(x_k - l).$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $n\geqslant N \Rightarrow \|x_n - l\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$, $n > N$.

$\|y_n - l\|\leqslant\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}\|x_k - l\| + \dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}(n-N)\leqslant\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}\|x_k - l\| + \dfrac{\varepsilon}{2}.$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}\|x_k - l\| = 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant N_1$ on ait $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}\|x_k - l\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
En choisissant $n\geqslant \max(N+1, N_1)$ nous avons $\|y_n - l\|\leqslant\varepsilon$ d'où le résultat demandé.

$f\ :\ x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{x+\sqrt{x}\cos(x)}{1+x^{\alpha+2}} \in \mathbb{R}$ est continue.
Pour $\alpha+2 \leqslant 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Pour $\alpha+2>0$, $\dfrac{x+\sqrt{x}\cos(x)}{1+x^{\alpha+2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$.
u_n existe donc si et seulement si $\alpha>0$.
Pour $\alpha>0$ la fonction f est intégrable ; le reste $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$ est donc équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ à $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{1}{\alpha n^\alpha}$.
$\sum u_n$ converge donc si et seulement si $\alpha>1$.

• $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha+1}}dx$. u_n existe si et seulement si $\alpha>0$.
Pour $\alpha>0$, $\dfrac{1}{1+x^{\alpha+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc dans ce cas

$$\int_n^{+\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha+1}}dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{1}{\alpha}n^\alpha.$$

Nous en déduisons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$.
$\sum |u_n|$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
$x>0 \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha} \in \mathbb{R}$ est décroissante strictement positive.
$x>0 \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{1+t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}$ est décroissante strictement positive donc l'application $x>0 \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{1+t^{\alpha+1}} \in \mathbb{R}$ est décroissante strictement positive.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série alternée convergente dès que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{1}{1+t^{\alpha+1}}$ est nulle c'est-à-dire si et seulement si $\alpha>0$.

• $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}dt$.
Supposons $n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}dt &= \int_0^1\frac{1}{1+t^n}dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}dt\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+t^n}dt + \int_0^1\frac{t^{n-2}}{1+t^n}dt = \int_0^1\frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}dt.\end{aligned}$$

Pour t fixé dans $[0,\ 1[$ nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+t^{n-2}}{1+t^n} = 1$; $0\leqslant\dfrac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\leqslant 2$. Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} = \displaystyle\int_0^1\frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}dt = 1$. u_n tend vers 1 donc la série $\sum u_n$ est divergente.

• $u_n = \dfrac{i^n}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $N = E\left(\dfrac{n-1}{4}\right)$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{i^k}{k} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{4} \frac{i^{j+4k}}{j+4k}\right) + \sum_{k=4N+1}^{n} \frac{i^k}{k}$. (Pour $n \leqslant 4$, la première somme est remplacée par 0 mais nous pouvons supposer $n > 4$ car nous cherchons la limite éventuelle en $+\infty$).

$$x_k = \sum_{j=1}^{4} \frac{i^{j+4k}}{j+4k} = \frac{2i}{(4k+1)(4k+3)} - \frac{2}{(4k+2)(4k+4)}.$$

$|x_k| \leqslant \dfrac{1}{4k^2}$ donc la série de terme général x_k est absolument convergente.

$$\left|\sum_{k=4N+1}^{n} \frac{i^k}{k}\right| \leqslant \frac{4}{4N+1} \leqslant \frac{4}{n-4}.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{i^k}{k}$ possède donc une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{i^n}{n}$ est donc convergente (elle n'est pas absolument convergente).

3. (a) La série $\sum |u_n - u_{n+1}|$ est convergente donc $\sum (u_n - u_{n+1})$ l'est aussi et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; notons l sa limite.

   Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x_k = l\sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} v_k x_k$.

   Posons pour $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$. Nous avons alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$\sum_{k=n}^{n+p} v_k x_k = v_{n+p} S_{n+p} - v_{n-1} S_{n-1} + \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_{k+1} - v_k) S_k.$$

   $$\left|\sum_{k=n}^{n+p} v_k x_k\right| \leqslant |v_{n+p}|\,|S_{n+p}| + |v_{n-1}|\,|S_{n-1}| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k|\,|S_k|.$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S.

   Soit $\varepsilon \in]0,\ 1[$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $|v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3(1+|S|)}$.

   $|S_n| \leqslant |S| + \varepsilon$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(1+|S|)}$.

   Pour $n \geqslant N$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons : $\displaystyle\left|\sum_{k=n}^{n+p} v_k x_k\right| \leqslant \varepsilon$.

   La série $\sum u_n x_n$ est donc convergente.

   (b) Supposons que la série $\sum |u_n - u_{n+1}|$ diverge. Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$a_n = |u_n - u_{n+1}|$. Notons $\theta_n \in [0,\ 2\pi[$ une mesure de l'argument de $u_n - u_{n+1}$. Nous poserons $\theta_n = 0$ si $u_n = u_{n+1}$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \exp(-i\theta_n)\dfrac{1}{1+A_{n-1}}$;

notons enfin $x_0 = x_1 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ x_n = v_n - v_{n-1}$.

Montrons que la série $\sum x_n$ converge et que la série $\sum u_n x_n$ diverge.

Nous savons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $\sum x_n$ converge.

Pour $n \geqslant 3$, $\sum_{k=0}^{n} u_k x_k = u_n v_n - u_2 v_1 + y_n$ avec $y_n = \sum_{k=2}^{n-1}(u_k - u_{k+1})v_k$.

$$y_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{|u_k - u_{k+1}|}{1 + a_0 + \ \cdots\ + a_{k-1}} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{1 + a_0 + \ \cdots\ + a_{k-1}}$$
$$= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(1+A_k) - (1+A_{k-1})}{1+A_{k-1}} = \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1+A_k}{1+A_{k-1}} - 1\right).$$

Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+A_n}{1+A_{n-1}} = 1$. Nous avons alors

$\dfrac{1+A_k}{1+A_{k-1}} - 1 \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{1+A_k}{1+A_{k-1}}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Supposons que la suite de terme général $\dfrac{1+A_n}{1+A_{n-1}}$ ne converge pas vers 1.

Dans ce cas encore $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Dans tous les cas $\sum u_n x_n$ diverge.

4. f est une fonction continue par morceaux de $]0,\ 1[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable.

$\forall (x,\ n) \in]0,\ 1[\times\mathbb{N}$, $\left|\dfrac{f(x)}{1+x}\right| \leqslant |f(x)|$ et $|(-1)^n x^n f(x)| \leqslant |f(x)|$. Nous en déduisons que $x \in]0,\ 1[\longmapsto \dfrac{f(x)}{1+x} \in \mathbb{R}$ et $x \in]0,\ 1[\longmapsto (-1)^n x^n f(x) \in \mathbb{R}$ sont intégrables. Nous pouvons écrire

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k f(x)\right) dx = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)dx.$$

$\forall (x,\ n) \in]0,\ 1[\times\mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x}|f(x)| \leqslant |f(x)|$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{1+x} f(x) = 0$. Nous en déduisons

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)dx = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)dx = 0$. Il vient alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$. La série est bien convergente de somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$.

5. Rappel[7] *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications continues par morceaux définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*, intégrables. On suppose que la série de terme général* g_n *converge simplement vers une fonction* G *continue par morceaux. La série de terme général* $\displaystyle\int_I g_n$ *converge si et seulement si* G *est intégrable et alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I g_n\right)=\int_I G$.

   Nous pouvons appliquer ce résultat au cas de la fonction g_n définie sur $[0,\ 1[$ par $g_n(t)=t^nf(t)$.

   Pour $t\in[0,\ 1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}g_n(t)=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}f(t)$. Avec les notations précédentes, $G(t)=\dfrac{f(t)}{1-t}$. G est continue sut $I=[0,\ 1[$.

   Nous en déduisons que $\displaystyle\sum\left(\int_{[0,\ 1[}g_n\right)$ converge si et seulement si G est intégrable et alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 g_n(t)dt\right)=\int_0^1\frac{f(t)}{1-t}dt$.

   Nous pouvions démontrer simplement et directement ce résultat dans cet exercice.

   Soit $t\in[0,\ 1[$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 t^kf(t)dt\right)=\int_0^1\frac{1-t^{n+1}}{1-t}f(t)dt$.

   Supposons que $t\in[0,\ 1[\longmapsto\dfrac{f(t)}{1-t}\in\mathbb{R}_+$ est intégrable.

   D'après l'égalité précédente $t\in[0,\ 1[\longmapsto\dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\in\mathbb{R}_+$ est intégrable[8].

   Soit $\varepsilon>0$. $t\in[0,\ 1[\longmapsto\dfrac{f(t)}{1-t}\in\mathbb{R}_+$ étant intégrable il existe $a\in]0,\ 1[$ tel que $0\leqslant\displaystyle\int_a^1\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

   a étant ainsi choisi, $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt=\int_0^a\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt+\int_a^1\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$.

   $0\leqslant\displaystyle\int_0^a\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\leqslant a^{n+1}\int_0^1\frac{f(t)}{1-t}dt$.

   Nous avons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt=0$ donc il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n on ait $n\geqslant N\Rightarrow\ 0\leqslant\displaystyle\int_0^a\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ soit finalement $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Rightarrow 0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\leqslant\varepsilon$ c'est-à-dire

7. Voir le premier chapitre.

8. Nous pouvons aussi remarquer que $0\leqslant\dfrac{t^{n+1}}{1-t}f(t)\leqslant\dfrac{f(t)}{1-t}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}f(t)}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt.$

La série de terme général $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$ est donc convergente de somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt.$

Supposons que la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$ soit convergente.

La suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$ est convergente. Soit $a\in]0,\ 1[$.

Pour $t\in[0,\ a]$, $0\leqslant\dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\leqslant\dfrac{a^{n+1}\|f\|_\infty}{1-a}$ où $\|f\|_\infty$ est la borne supérieure sur $[0,\ 1]$ de $f(t)$; borne supérieure, réelle, qui existe car f est continue.

$0\leqslant\displaystyle\int_0^a \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\leqslant\frac{a^{n+2}\|f\|_\infty}{1-a}$. Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^a \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^a \frac{(1-t^{n+1})f(t)}{1-t}dt = \int_0^a \frac{f(t)}{1-t}dt.$

$$\int_0^a \frac{1-t^{n+1}}{1-t}f(t)dt\leqslant\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}f(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 t^k f(t)dt\right)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 t^k f(t)dt\right).$$

En calculant la limite lorsque n tend vers $+\infty$ nous obtenons

$\displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{1-t}dt\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 t^k f(t)dt\right)$. La fonction intégrée étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons que $t\in[0,\ 1[\longmapsto\dfrac{f(t)}{1-t}\in\mathbb{R}$ est intégrable. En utilisant la partie précédente nous avons alors encore l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{t^n f(t)}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt.$

6. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e}dx.$

   Soit, pour $x\geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^e}dt$. f est strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$, définissant une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,\ l[$ où $l = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^e}dt$, d'application réciproque g continue, nulle en 0. Nous avons $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$, $u_n = g(w_n)$.

   Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0.$

   Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 les trois séries $\sum u_n$, $\sum w_n$, $\sum \ln(1+u_n)$ sont divergentes.

   Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Nous avons alors lorsque n tend vers $+\infty$, $w_n = f(u_n) = f(0)+u_n f'(0)+o(u_n)$ c'est-à-dire $w_n = u_n+o(u_n)$ soit encore $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Nous avons aussi $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

   Les trois séries $\sum u_n$, $\sum w_n$, $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature car elles sont de signe fixe.

7. • $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \iff u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
Donc si u_n ne tend pas vers 0 alors la série $\sum v_n$ est divergente.
Si u_n tend vers 0 alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. S'agissant de séries à termes positifs elles sont de même nature donc $\sum v_n$ est divergente.
• $w_n = \dfrac{u_n}{1+nu_n}$.
Nous ne pouvons rien dire dans ce cas. En effet supposons $u_n = \dfrac{1}{n}$. Dans ce cas, $w_n = \dfrac{1}{n+1}$. $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ diverge.
Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{lorsque } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{lorsque } n \text{ n'est pas un carré} \end{cases}$.
$\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \geqslant \sum\limits_{1\leqslant k^2 \leqslant n} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{E(\sqrt{n})} \dfrac{1}{k}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est donc divergente.
$w_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}+n} & \text{lorsque } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2+n} & \text{lorsque } n \text{ n'est pas un carré} \end{cases}$.
$\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k} + \sum\limits_{k=1}^{E(\sqrt{n})} \dfrac{1}{k^2+k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k^2+k}$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est donc convergente.
• $x_n = \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$.
$0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum x_n$ est convergente.
• $y_n = \dfrac{u_n}{1+(u_n)^2}$.
Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$. alors $y_n = \dfrac{1}{4}$. La série $\sum y_n$ est divergente.
Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$. alors $y_n = \dfrac{n^2}{(1+n^2)^2}$. $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
La série $\sum y_n$ est donc convergente.

8. (a) Pour a et b réels nous avons $(a-b)^2 \geqslant 0$ donc $2ab \leqslant a^2+b^2$.
$2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \leqslant u_n + v_n$. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant convergentes nous en déduisons que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.[9]

9. Nous aurions pu aussi écrire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{u_n}\sqrt{v_n}\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sum\limits_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$. $\sqrt{u_n v_n}$ étant positif et la somme partielle

(b) Supposons que les deux séries $\sum u_n$ et la série $\sum v_n$ convergent où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = +\infty$ puis $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2u_n}$.
En utilisant le résultat précédent nous en déduisons que la série de terme général $\sqrt{\dfrac{u_n}{1+n^2u_n}}$ est convergente. Or, $\sqrt{\dfrac{u_n}{1+n^2u_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est convergente.
Nous arrivons à une contradiction ; $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas toutes les deux convergentes.

9. • Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $v_n = \dfrac{u_n^2}{1+u_n+u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} (u_n)^2$ donc lorsque n tend vers $+\infty$, $v_n = o(u_n)$; $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de signe fixe, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge elle aussi.
• Que se passe-t-il si la série $\sum u_n$ diverge ? Nous ne pouvons rien dire car si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Dans le premier cas $\sum v_n$ converge, dans le second cas $\sum v_n$ diverge.
• Supposons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x(4-3x)}}{2(1-x)} = 0$ donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in]0,\ 1[$ tel que $\dfrac{\eta+\sqrt{\eta(4-3\eta)}}{2(1-\eta)} \leqslant \varepsilon$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on ait $|v_n| \leqslant \eta$. Il vient alors $(1-\eta)u_n^2 - \eta u_n - \eta \leqslant 0$ puis $\dfrac{\eta-\sqrt{\eta(4-3\eta)}}{2(1-\eta)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\eta+\sqrt{\eta(4-3\eta)}}{2(1-\eta)}$. η étant moindre que 1 nous en déduisons
$\dfrac{\eta-\sqrt{\eta(4-3\eta)}}{2(1-\eta)} \leqslant 0$ donc $|u_n| \leqslant \dfrac{\eta+\sqrt{\eta(4-3\eta)}}{2(1-\eta)} \leqslant \varepsilon$. Cela signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent donc.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en remarquant que $2\alpha > 1$ nous obtenons

étant majorée nous en déduisons que la série $\sum \sqrt{u_nv_n}$ est convergente.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{u_k}}{k^{\alpha}}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}u_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2\alpha}}}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty}u_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}}}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^{\alpha}}$ étant une série à termes positifs dont la somme partielle est majorée est convergente.

11. (a) Supposons que la série $\sum u_n$ soit convergente, de somme S qui est alors strictement positive. La suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n}u_k$ a pour limite $l>0$. Dans ces conditions nous avons $nlu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{S}{ln}$ et la série $\sum u_n$ est divergente ce qui conduit à une contradiction. La série $\sum u_n$ est donc divergente.

(b) $v_n = nu_n+S_{n-1} = w_n+S_{n-1}$. Posons , pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n = \dfrac{v_1+\ \cdots\ +v_n}{w_1+\ \cdots\ +w_n}$.

Nous obtenons $A_n = 1+\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}S_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}w_k}$. Par hypothèse, $S_k \underset{k\to+\infty}{\sim} lku_k$, la série $\sum u_n$ diverge, donc la série $\sum nu_n$ diverge aussi et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k \underset{n\to+\infty}{\sim} l\sum_{k=1}^{n}ku_k$.

Nous avons donc $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l-l\dfrac{S_n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k}$.

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{S_n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k}.$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, $u_k = o(ku_k)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k = o\left(\sum_{k=1}^{n}ku_k\right)$.

Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n = l+1$. En reprenant la définition de A_n, nous avons

$A_n = \dfrac{nS_n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nS_n}{l+1}$ puis d'après l'hypothèse,

$$\sum_{k=1}^{n}ku_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{ln^2u_n}{l+1}.$$

12. (a) Supposons que les u_n ne soient pas tous nuls. La série $\sum u_n$ est convergente donc a pour somme $S>0$ et sa somme partielle d'indice n, S_n,

vérifie $\dfrac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{S}{n}$. Nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{n}$ est de même nature que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{S}{n}$ donc est divergente.
La série converge uniquement dans le cas où les u_n sont tous nuls.

(b) ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour $k\geqslant 2$, $\ln(k)\geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)\geqslant \int_1^n \ln(t)dt = \Big[t\ln(t) - t\Big]_1^n = n\ln(n) - n + 1$.
$\dfrac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n+1)\geqslant \ln(n) - 1 + \dfrac{1}{n} - \ln(n+1)$.
ln est concave donc la courbe représentative est "sous" la tangente en tout point ; en particulier
$\forall t > -1,\ \ln(1+t)\leqslant t$ donc $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant \dfrac{1}{n}$ puis
$\ln(n) - 1 + \dfrac{1}{n} - \ln(n+1)\geqslant -1$ et finalement $\dfrac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n+1)\geqslant -1$.
Il est alors immédiat que $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\geqslant \dfrac{1}{e}$.

(c) Soit $1\leqslant p < n$. $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} ku_k\leqslant n\sum_{k=p+1}^{n} u_k$ donc $v_n\leqslant \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} ku_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > p \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} u_k\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n > p$ nous avons donc $v_n\leqslant \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} ku_k + \frac{\varepsilon}{2}$. p étant ainsi fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} ku_k = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geqslant N$ on ait $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} ku_k\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $q \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geqslant q$ on ait $0\leqslant v_n\leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

(d) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{v_k}{k+1} = \dfrac{S_k}{k(k+1)} = \dfrac{S_k}{k} - \dfrac{S_k}{k+1}$.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k+1}}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}.$$
Nous en déduisons
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{S_k}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - v_{n+1}.$$

Nous obtenons finalement $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

(e) La fonction ln est concave donc $\displaystyle\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$ soit encore [10], l'exponentielle étant croissante, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \geqslant \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\right) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$.
En appliquant ce résultat avec $x_k = ku_k$ nous obtenons
$\displaystyle\sqrt[n]{n!\prod_{k=1}^{n} u_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ku_k = v_n$.
En utilisant le résultat de la question précédente nous en déduisons que la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{n!\prod_{k=1}^{n} u_k}$ converge et a une somme au plus égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

(f) $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \leqslant e\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{n!\prod_{k=1}^{n} u_k}$. La série de terme général $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k}$ est donc convergente et sa somme est majorée par $\displaystyle e\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

(g) Comme nous l'avons vu plus haut, $\displaystyle\frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}}$. La série de terme général $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_k}$ étant supposée convergente, celle de terme général $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}}$ l'est aussi d'après le résultat de la question précédente et grâce à l'inégalité précédente, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n}$ l'est aussi avec
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}}$.
Toujours d'après le résultat de la question précédente nous obtenons
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

10. En fait, il suffit d'utiliser le fait que exp est convexe pour obtenir
$\displaystyle\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp(\ln(x_k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

13. • Les coefficients a_n sont réels strictement positifs et la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ tend vers $+\infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$. Si la suite de terme général $\frac{S_{n-1}}{S_n}$ ne converge pas vers 1, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge.
Supposons donc que la suite de terme général $\frac{S_{n-1}}{S_n}$ converge vers 1. dans ces conditions $\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n < 0$. La série de terme général u_n et la série de terme général $\ln(1-u_n)$ sont donc de même nature.
$\sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_n) = \ln(S_0) - \ln(S_n)$. Nous en déduisons $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$. dans tous les cas la série $\sum u_n$ diverge.
• La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante strictement positive et tend vers $+\infty$ donc $(S_n - S_{n-1})\frac{1}{(S_n)^2} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2} \leqslant (S_n - S_{n-1})\frac{1}{(S_{n-1})^2}$.
Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < v_n \leqslant \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$.
$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k}\right) = \frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_n}$ donc la série de terme général $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ converge et la série $\sum v_n$ converge aussi.

14. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{(u_0 + \cdots + u_n)^\alpha}$. Supposons que la série $\sum u_n$ converge de somme S. Les u_n étant strictement positifs, S est strictement positif. Dans ce cas $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha}$. $\sum v_n$ converge donc.
Supposons que la série $\sum u_n$ diverge. S'agissant d'une série à terme positifs, sa somme partielle d'ordre n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
Posons, pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Supposons $\alpha > 1$. Nous avons dans ce cas pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}$ donc $\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant v_0 + \int_{S_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
La somme partielle $\sum_{k=0}^{n} v_k$ étant majorée, la série converge.
Supposons $\alpha \leqslant 0$. Soit $n \geqslant 1$.
$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \geqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}$ donc $\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant v_0 + \int_{S_0}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}$.
$\lim_{n\to+\infty} \int_{S_0}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$. La série diverge.

Supposons $\alpha \in]0,\ 1]$. Commençons par le cas $\alpha = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors $\sum v_n$ est divergente. Supposons alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Nous avons donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$.
S'agissant de séries à termes positifs, la série de terme général v_n et la série de terme général $\ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ sont de même nature. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_0)$.
La série est donc divergente.
Dans le cas $\alpha = 1$ la série de terme général v_n est donc divergente.
Supposons alors $\alpha \in]0,\ 1]$. À partir d'un certain rang N, $S_n > 1$ donc $S_n^\alpha \leqslant S_n$ et pour $n \geqslant N$, $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \geqslant \dfrac{u_n}{S_n}$. La série est donc divergente.
Finalement la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge ou si $\sum u_n$ diverge et $\alpha > 1$.

15. La relation $n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} + n$ nous conduit à $u_1 = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, $u_3 = \dfrac{7}{32}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{4n}$.
Cela est vrai pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n.
$u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)^2}(nu_n + n + 1) \geqslant \dfrac{1}{(n+2)^2}\left(\dfrac{1}{4} + n + 1\right)$.
$\dfrac{1}{(n+2)^2}\left(\dfrac{1}{4} + n + 1\right) - \dfrac{1}{4(n+1)} = \dfrac{3n^2 + 5n + 1}{4(n+2)^2(n+1)} \geqslant 0$.
L'inégalité proposée est donc vérifiée au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série de terme général u_n est donc divergente.

16. $f\ :\ x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 - x - 1 \in \mathbb{R}$ est croissante sur $\left]-\infty,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right[$; décroissante sur $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.
$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0,\ f(1) < 0,\ f(2) > 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc f s'annule une et une seule fois[11] en $\alpha \in]1,\ 2[$.
Notons β et γ les deux autres racines (qui ne sont pas réelles) de $X^3 - X - 1$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$.
$X^3 - X - 1 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$

11. $X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ possède trois racines réelles deux à deux distinctes si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$ et est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$ et donc possède une racine réelle et deux racines complexes conjuguées si et seulement si $4p^3 + 27q^2 > 0$ ce qui est le cas dans notre exemple.

$X^3 - X - 1 = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)X - (\alpha\beta\gamma)$
donc $\alpha+\beta+\gamma = 0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -1,\ \alpha\beta\gamma = 1$.
$u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 2$.
$u_{n+3} = \alpha^n\alpha^3 + \beta^n\beta^3 + \gamma^n\gamma^3 = \alpha^n(\alpha+1) + \beta^n(\beta+1) + \gamma^n(\gamma+1) = u_{n+1} + u_n$.
En utilisant cette relation et en notant v_n le reste de la division euclidienne de u_n par 4 nous avons $v_0 = 3$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$, $v_6 = 1$, $v_7 = 3$, $v_8 = 2$, $v_9 = 0$, $v_{10} = 1$, $v_{11} = 2$, $v_{12} = 1$, $v_{13} = 3$, $v_{14} = 3$, $v_{15} = 0$, $v_{16} = 2$.
$v_{14} = v_0$, $v_{15} = v_1$, $v_{16} = v_2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = v_{n+1} + v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 14.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $N = E\left(\dfrac{n}{14}\right)$. Notons, pour $j \in \mathbb{N},\ x_j = \sin\left(\dfrac{\pi u_n}{2}\right)$.
$\sin\left(\dfrac{\pi u_n}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi v_n}{2}\right)$.
$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{j} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{14} \frac{x_{14k+i}}{14k+i}\right) + \sum_{j=14N+1}^{n} \frac{x_j}{j}$.
La dernière somme est remplacée par 0 si $n = 14N$.
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = -1$, $x_8 = x_9 = 0$, $x_{10} = 1$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$, $x_{13} = x_{14} = -1$.

$$\sum_{i=1}^{14} \frac{x_{14k+i}}{14k+i} = -\frac{1}{14k+3} + \frac{1}{14k+5} + \frac{1}{14k+6} - \frac{1}{14k+7} + \frac{1}{14k+10} + \frac{1}{14k+12} - \frac{1}{14k+13} - \frac{1}{14k+14}.$$

Lorsque k tend vers l'infini nous avons $\dfrac{1}{14k+i} = \dfrac{1}{14k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc lorsque k tend vers l'infini $\displaystyle\sum_{i=1}^{14} \frac{x_{14k+i}}{14k+i} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{14} \frac{x_{14k+i}}{14k+i}\right)$ est donc convergente.
$\displaystyle\left|\sum_{j=14N+1}^{n} \frac{x_j}{j}\right| \leqslant \frac{14}{n-12}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=14N+1}^{n} \frac{x_j}{j} = 0$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{n}$ est convergente.
En utilisant les notations précédente, notons, pour $j \in \mathbb{N},\ y_j = \cos\left(\dfrac{\pi u_n}{2}\right)$.
$\cos\left(\dfrac{\pi u_n}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi v_n}{2}\right)$. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{j} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{14} \frac{y_{14k+i}}{14k+i}\right) + \sum_{j=14N+1}^{n} \frac{y_j}{j}$.
La dernière somme est nulle si $n = 14N$.
$y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $y_4 = -1$, $y_5 = y_6 = y_7 = 0$, $y_8 = -1$, $y_9 = 1$, $y_{10} = 0$, $y_{11} = -1$, $y_{12} = y_{13} = y_{14} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{14} \frac{y_{14k+i}}{14k+i} = \frac{1}{14k+1} - \frac{1}{14k+2} - \frac{1}{14k+4} - \frac{1}{14k+8} + \frac{1}{14k+9} - \frac{1}{14k+11}.$$

Lorsque k tend vers l'infini nous avons $\dfrac{1}{14k+i} = \dfrac{1}{14k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ donc lorsque k tend vers l'infini $\displaystyle\sum_{i=1}^{14} \frac{y_{14k+i}}{14k+i} = -\frac{1}{7k} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{14} \frac{y_{14k+i}}{14k+i}\right)$ est donc divergente ; nous avons d'ailleurs $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{14} \frac{y_{14k+i}}{14k+i}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{7}\ln(N)$.

$\displaystyle\left|\sum_{j=14N+1}^{n} \frac{y_j}{j}\right| \leqslant \frac{14}{n-12}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=14N+1}^{n} \frac{y_j}{j} = 0$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{n}$ est alors divergente et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{7}\ln(n)$.

Notons $\beta = r\exp(i\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. $1 = \alpha\beta\gamma = \alpha r^2 > r^2$ donc $|\beta| = |\gamma| < 1$.

$u_n = \alpha^n + 2r^n\cos(n\theta)$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}u_n\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha^n\right)\cos\left(\pi r^n\cos(n\theta)\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha^n\right)\sin\left(\pi r^n\cos(n\theta)\right)$,

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}u_n\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha^n\right)\cos\left(\pi r^n\cos(n\theta)\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha^n\right)\sin\left(\pi r^n\cos(n\theta)\right)$.

Lorsque n tend vers l'infini nous avons

$\cos\left(\pi r^n\cos(n\theta)\right) = 1 + o(r^n)$ et $\sin\left(\pi r^n\cos(n\theta)\right) = \pi r^n\cos(n\theta) + o(r^n)$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)(1+o(r^n)) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)(\pi r^n\cos(n\theta)+o(r^n)) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right) + O(r^n),\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)(1+o(r^n)) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)(\pi r^n\cos(n\theta)+o(r^n)) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right) + O(r^n).
\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n}{n}$ est absolument convergente donc les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)}{n}$ sont de même nature ainsi que les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)}{n}$.

Nous en déduisons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)}{n}$ et la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^n\right)}{n}$.

17. Soit $N = E(\sqrt{n})$. u_n est égal à $-\dfrac{1}{n}$ lorsque n est le carré d'un entier, $\dfrac{1}{n}$ sinon.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2}$. La première somme tend vers $+\infty$ et la seconde vers une limite finie [12] donc la série proposée est divergente ; la somme partielle est équivalente à $\ln(n)$.

18. Soit, pour $(n,\ x,\ y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u_n(x,\ y) = \dfrac{x^n}{1 + y^{2n}}$.
$|u_n(x,\ y)| \leqslant |x|^n$. Si $|x| < 1$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x,\ y)$ est absolument convergente.
Si $x = 1$, lorsque $|y| \leqslant 1$, la terme général de la série ne converge pas vers 0. Lorsque $|y| > 1$ alors $u_n(x,\ y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{y^{2n}}$. Dans le cas $x = 1$ nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x,\ y)$ est convergente (auquel cas elle est absolument convergente) si et seulement si $|y| > 1$.
Nous avons le même résultat pour $x = -1$.
Si $|x| > 1$, lorsque $|y| \leqslant 1$ le terme général de la série ne tend pas vers 0. Supposons alors $|y| > 1$. Dans ce cas $u_n(x,\ y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{x}{y^2}\right)^n$. Dans ce cas nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x,\ y)$ est convergente (auquel cas elle est absolument convergente) si et seulement si $\left|\dfrac{x}{y^2}\right| < 1$.
En conclusion la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x,\ y)$ est convergente (auquel cas elle est absolument convergente) si et seulement si $|x| < 1$ ou ($|x| = 1$ et $|y| > 1$) ou ($|x| > 1$ et $|x| < y^2$).

19. Soit $v_n = \dfrac{u_n}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)}$, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\Pi_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)$ et $\Pi_{-1} = 1$. Nous avons alors pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{\Pi_{n-1}} - \dfrac{1}{\Pi_n}$.
Dans ces conditions $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{\Pi_n}$. La série $\sum v_n$ converge si et seulement si la suite de terme général Π_n a une limite $l \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$.
$1 \leqslant \Pi_n \leqslant \Pi_{n+1}$. La suite $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante don a une limite appartenant à

12. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$[1,\ +\infty]$ et la série $\sum v_n$ est convergente.

20. u_n est défini par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\sin(u_n)}{n}$. Si un des u_n est nul alors les suivants sont tous nuls.
    $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1}| \leqslant \dfrac{|u_n|}{n}$.
    $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} |u_{k+1}| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} |u_k|\right)$.
    Si un des u_k pour $k \in \mathbb{N}_n$ est nul alors $|u_{n+1}| = 0 \leqslant \dfrac{|u_1|}{n!}$ sinon, en simplifiant nous obtenons encore $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{|u_1|}{n!}$. Cette inégalité est donc vraie [13] pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
    La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente.

21. Posons $f(x) = \sqrt{2+x}$. f est définie de $[-2,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue, croissante.
    Le signe de $f(x) - x$ est celui de $-x + \sqrt{x+2}$.
    $$f(x) - x \geqslant 0 \iff \left\{\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 0 \\ \text{ou} \\ x \geqslant 0 \text{ et } -x^2 + x + 2 \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 0 \\ \text{ou} \\ x \geqslant 0 \text{ et } x \in [-1,\ 2] \end{array}\right.$$
    Finalement $f(x) - x \geqslant 0 \iff x \in [-2,\ 2]$.
    $u_0 \in [-2,\ 2] \Rightarrow u_1 \in [0,\ 2]$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [0,\ 2]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
    $u_0 \in [2,\ +\infty[\Rightarrow u_1 \in [2,\ +\infty[$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [2,\ +\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
    Dans les deux cas la suite est convergente ; dans le premier cas car croissante majorée, dans le second car décroissante minorée. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(l) = l$ c'est-à-dire converge vers 2.
    Posons $v_n = u_n - 2$. $\forall u_0 \in [-2,\ 2[\cup]2,\ +\infty[,\ u_n \neq 2$.
    Pour $u_0 = 2$, la série $\sum (u_n - 2)$ est convergente.
    Supposons $u_0 \neq 2$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -2 + 2\sqrt{1 + \dfrac{v_n}{4}}$ donc lorsque n tend vers $+\infty$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{4} + o(v_n)$.
    Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \frac{1}{4}$.
    La série $\sum (u_n - 2)$ est donc convergente.

22. (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive de limite nulle, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive telle que $\sum v_n$ est convergente. Nous supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n + v_n$.
    Soit $\varepsilon > 0$ donné. La série $\sum v_n$ est convergente donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$

13. Nous pouvons aussi écrire :
le résultat est vrai pour $n = 0$.
Si nous le supposons vrai au rang n alors $|u_{n+2}| = \dfrac{|\sin(u_{n+1})|}{n+1} \leqslant \dfrac{|u_{n+1}|}{n+1} \leqslant \dfrac{|u_1|}{(n+1)!}$.
Le résultat est donc prouvé.

tel que $\forall(p,\ q)\in\mathbb{N}^2,\ p\geqslant N_1\Rightarrow\ 0\leqslant\sum_{k=p}^{p+q}v_k\leqslant\varepsilon$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant N_2\Rightarrow\ u_n\leqslant\varepsilon$.
Soit $N\geqslant\max(N_1,\ N_2)$. Soit $p\in\mathbb{N},\ p\geqslant N+1$.
Supposons dans un premier temps $p=2p_1$ et $q=2q_1$ pairs.
$U_{p,q}=\sum_{k=p}^{p+q}(-1)^k u_k=\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1}u_{2k}-\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1-1}u_{2k+1}$.
D'après l'hypothèse, $u_{2k}\leqslant u_{2k-1}+v_{2k-1}$ donc
$\sum_{k=p}^{p+q}(-1)^k u_k\leqslant\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1}u_{2k-1}+\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1}v_{2k-1}-\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1-1}u_{2k+1}=u_{p-1}+\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1}v_{2k-1}\leqslant 2\varepsilon$.
Nous avons aussi $u_{2k+1}\leqslant u_{2k}+v_{2k}$ donc
$\sum_{k=p}^{p+q}(-1)^k u_k\geqslant\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1}u_{2k}-\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1-1}u_{2k}-\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1-1}v_{2k}=u_{p+q}-\sum_{k=p_1}^{p_1+q_1-1}v_{2k}\geqslant-\varepsilon$.
Nous obtenons donc, pour $p\geqslant N+1$, $-\varepsilon\leqslant U_{p,q}\leqslant 2\varepsilon$.
Si p est pair et q est impair, $U_{p,q}=U_{p,q-1}-u_{p+q}$ donc pour $p\geqslant N+1$, $-2\varepsilon\leqslant-\varepsilon-u_{p+q}\leqslant U_{p,q}\leqslant 2\varepsilon-u_{p+q}\leqslant 2\varepsilon$.
Si p est impair et q est pair alors $U_{p,q}=-u_p+U_{p+1,q}-u_{p+q+1}$ donc $-3\varepsilon\leqslant-\varepsilon-u_p-u_{p+q+1}\leqslant U_{p,q}\leqslant 2\varepsilon-u_p-u_{p+q+1}\leqslant 2\varepsilon$.
Enfin si p et q sont impairs, $U_{p,q}=-u_p+U_{p+1,q-1}$ et $-2\varepsilon\leqslant-u_p-\varepsilon\leqslant U_{p,q}\leqslant-u_p+2\varepsilon\leqslant 2\varepsilon$.
Dans tous les cas, pour $(p,\ q)\in\mathbb{N}^2$, $p\geqslant N+1\Rightarrow\left|\sum_{k=p}^{p+q}(-1)^k u_k\right|\leqslant 3\varepsilon$. Nous en déduisons donc que pour tout $\alpha>0$ il existe $M\in\mathbb{N}$ tel que pour $(p,\ q)\in\mathbb{N}^2$, $p\geqslant M\Rightarrow\left|\sum_{k=p}^{p+q}(-1)^k u_k\right|\leqslant\alpha$. La série $\sum(-1)^n u_n$ est donc convergente.

(b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Notons $p=E(\sqrt{N})$ et pour $k\in\mathbb{N},\ b_k=\sum_{i=0}^{2k}a_{i+k^2}$.

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^{E(\sqrt{i})}a_i=\sum_{k=0}^{p-1}\left((-1)^k\sum_{i=k^2}^{k^2+2k}a_i\right)+(-1)^p\sum_{i=p^2}^{N}a_i.$$
$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^{E(\sqrt{i})}a_i=\sum_{k=0}^{p-1}\left((-1)^k b_k\right)+(-1)^p\sum_{i=p^2}^{N}a_i.$$

Pour i compris entre 0 et $2k$, nous avons $i+k^2\geqslant\left(\dfrac{k+i}{3}\right)^2$.

En effet ; $A(i)=k^2+2ki+i^2-9i-9k^2=i^2+i(2k-9)-8k^2$.
$A(0)=-8k^2\leqslant 0$. $A(2k)=-18k\leqslant 0$.
$A(0)$ et $A(2k)$ sont du signe contraire du coefficient de i^2 donc A possède deux racines, $x_1\leqslant x_2$, et 0 et $2k$ sont entre ces racines. Chaque i entre 0

et $2k$ est donc aussi entre ces racines et finalement $A(i) \leqslant 0$.

Notons $m = E\left(\dfrac{k}{3}\right)$ donc $3m \leqslant k \leqslant 3m+2$.

Les éléments a_n étant positifs et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante nous avons $\displaystyle\sum_{i=0}^{2k} a_{i+k^2} \leqslant \sum_{i=0}^{6m+4} a_{i+k^2} \leqslant \sum_{i=0}^{6m+4} a_{i+9m^2}$

$$\sum_{i=0}^{6m+4} a_{i+9m^2} = \sum_{j=0}^{2m}\left(\sum_{i=3j}^{3j+2} a_{i+9m^2}\right) + a_{6m+3+9m^2} + a_{6m+4+9m^2}.$$

En utilisant l'inégalité démontrée plus haut nous avons

$$\sum_{i=0}^{6m+4} a_{i+9m^2} \leqslant \sum_{j=0}^{2m} 3a_{3j+9m^2} + 2a_{6m+3+9m^2}$$
$$\leqslant 3\sum_{j=0}^{2m} a_{(j+m)^2} + 2a_{6m+1+9m^2} \leqslant 3\sum_{j=0}^{2m+1} a_{(j+m)^2}.$$

Finalement $b_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{2k} a_{i+k^2} \leqslant 3\sum_{j=m}^{3m+1} a_{j^2}$.

La série de terme général a_{n^2} est convergente donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (q,\ r) \in \mathbb{N}^2$, $q \geqslant M \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=q}^{q+r} a_{j^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour $k \geqslant 3M+2$ nous avons $m \geqslant M$ puis $0 \leqslant b_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{2k} a_{i+k^2} \leqslant 3\sum_{j=m}^{3m+1} a_{j^2} \leqslant \varepsilon$.

La suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$b_{k+1} \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{2k+2} a_{i+k^2} = b_k + a_{(k+1)^2} + a_{(k+1)^2+1} \leqslant b_k + 2a_{(k+1)^2}$.

La série de terme général positif $a_{(n+1)^2}$ est convergente, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive de limite nulle donc la série $\sum (-1)^n b_n$ est convergente.

Par ailleurs, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{i=p^2}^{N} a_i \leqslant b_p$ donc converge vers 0. La série $\sum (-1)^{E(\sqrt{n})} a_n$ est donc convergente.

23. (a) Il existe $A > 0$ tel que pour $x \in [A,\ +\infty[$ on ait $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -1$. Nous en déduisons $\displaystyle\int_A^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt \leqslant (A-x)$ c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{f(x)}{f(A)}\right) \leqslant (A-x)$ soit encore $f(x) \leqslant f(A)\exp(A)\exp(-x)$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$. La série $\sum f(n)$ est convergente.

(b) $f'(x)$ est strictement négatif sur $[A,\ +\infty[$ donc f est décroissante sur cet intervalle. Soit $n \in\ N,\ n \geqslant A$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=n}^{n+p} f(k)\geqslant \int_n^{n+p+1} f(t)dt,\ \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k)\leqslant \int_n^{n+p} f(t)dt.$$

Notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ le reste d'ordre n de la série $\sum f(n)$. En utilisant les inégalités précédentes nous obtenons : $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt\leqslant R_n\leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$.

Soit $B > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour $x\geqslant A$ on ait $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\leqslant -B$.

Posons $g(x) = f(x)\exp(Bx)$. $g'(x) = (f'(x) + Bf(x))\exp(Bx)\leqslant 0$. g est décroissante sur $[B,\ +\infty[$ donc

$x\geqslant y\geqslant A \Rightarrow\ f(x)\exp(Bx)\leqslant f(y)\exp(By)$ soit encore

$x\geqslant y\geqslant A \Rightarrow\ f(x)\leqslant f(y)\exp(B(y-x))$.

$n\geqslant A \Rightarrow 0\leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx\leqslant f(n)\int_n^{+\infty} \exp(B(n-x))dx = \frac{1}{B}f(n)$.

Avec $\varepsilon =$ il vient :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant A \Rightarrow 0\leqslant\dfrac{1}{f(n)}\displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx\leqslant\varepsilon$ c'est-à-dire :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{f(n)}\int_n^{+\infty} f(x)dx = 0$. Il vient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{f(n)} = 0$.

$\dfrac{R_n}{f(n)} + 1 = \dfrac{R_{n-1}}{f(n)}$ donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n+1)$.

24. • Choisissons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série alternée ; la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0 donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente. De même la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n)^3$ est une série alternée convergente.

En revanche la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^3$ est une série divergente.

• Choisissons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n)^3$ sont absolument convergentes.

• Choisissons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt[3]{n}}$. Nous avons vu à l'exercice numéro 2 page 44 que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n)^3$ est divergente car $j^3 = 1$.

25. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. La série étant convergente, son reste, R_n, d'ordre n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En particulier $R_n - R_{2n} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante nous en déduisons $0\leqslant nu_{2n}\leqslant R_n - R_{2n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$.

$0\leqslant nu_{2n+1}\leqslant nu_{2n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n+1} = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)u_{2n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

26. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{j=0}^{\varphi(0)} a_j + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1+\varphi(k-1)}^{\varphi(k)} a_k\right) = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} a_j.$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n) = +\infty$, la série $\sum a_n$ étant supposée convergente nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j$.

La série $\sum b_n$ est donc convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(b) Notons, pour $n\in\mathbb{N}$, $A_n = \{p\in\mathbb{N},\ \varphi(p)\leqslant n\}$. A_n est fini car φ est strictement croissante donc vérifie $\forall p\in\mathbb{N},\ \varphi(p)\geqslant p$. Soit alors N le plus grand élément de cet ensemble A_n.

Comme nous l'avons vu précédemment,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{\varphi(N)} a_j + \sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{N} b_k + \sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j.$$

La somme $\displaystyle\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j$ est remplacée par 0 lorsque $\varphi(N) = n$.

Dans le cas où $\varphi(N) < n$ nous avons

$$\left|\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j\right|\leqslant(n-\varphi(N))\sup_{1+\varphi(N)\leqslant k\leqslant n}|a_k|\leqslant(\varphi(N+1)-\varphi(N))\sup_{k\geqslant 1+\varphi(N)}|a_k|.$$

Supposons que $p\in\mathbb{N}\longmapsto\varphi(p+1)-\varphi(p))\in\mathbb{N}$ est bornée. Nous avons $\varphi(N)\leqslant n < \varphi(N+1)$. Il existe $M\in\mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(N+1)-\varphi(N)\leqslant M$ et donc $1+\varphi(N)\geqslant 1+\varphi(N+1)-M\geqslant n+2-M$.

Nous avons alors pour tout entier n,

$(\varphi(N+1)-\varphi(N))\displaystyle\sup_{k\geqslant 1+\varphi(N)}|a_k|\leqslant M\sup_{k\geqslant n+2-M}|a_k|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant A\Rightarrow |a_n|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{M}$. Nous avons alors pour $n\geqslant A+M-2$,

$$\left|\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j\right|\leqslant\varepsilon \text{ c'est-à-dire } \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j = 0.$$

$\sum b_n$ étant convergente nous en déduisons que la série $\sum a_n$ est convergente.

27. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2p$. Notons $q\geqslant 2$ le quotient de la division euclidienne de n par p.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}\alpha_k + \sum_{k=0}^{n-qp} \frac{1}{k+qp}\alpha_k + \sum_{j=1}^{q-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{jp+k}\alpha_k\right).$$

Lorsque j tend vers $+\infty$, nous avons $\dfrac{1}{jp+k} = \dfrac{1}{jp} + O\left(\dfrac{1}{j^2}\right)$ donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{jp+k}\alpha_k = \frac{1}{jp}\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k + O\left(\frac{1}{j^2}\right).$$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{jp+k}\alpha_k\right)$ a une limite, élément de $\mathbb{C}$, lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k = 0$.

$$qp \geqslant n-p+1\,;\ \left|\sum_{k=0}^{n-qp} \frac{1}{k+qp}\alpha_k\right| \leqslant \frac{1}{qp}\sum_{k=0}^{n-qp}|\alpha_k| \leqslant \frac{1}{n-p+1}\sum_{k=0}^{p-1}|\alpha_k|$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-qp}\frac{1}{k+qp}\alpha_k = 0$. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k = 0$.

28. $\displaystyle x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ donc $\displaystyle y_n = \ln(x_n) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ nous avons $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Pour obtenir ce résultat il suffit d'étudier les variations des fonctions

$x \longmapsto \ln(x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $x \longmapsto \ln(x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$.

En se limitant à l'intervalle $[0,\ 1]$ (ce qui est le cas ici), il suffit d'utiliser les résultats concernant les séries alternées convergentes lorsque la valeur absolue du terme général décroit [14].

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Nous obtenons donc :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant y_n \leqslant \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{(n+1)^2}{12n^4}.$$

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{12n^3},$$

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{(n+1)^2}{12n^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{12n^3} + \frac{1}{12n^4}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\exp\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{12n^3}\right) = \sqrt{e}\left(1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

14. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ est convergente et on a $\forall (n,\ p)_i n\mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^n u_p \leqslant \sum_{k=0}^{2n}(-1)^n u_n$.

$\exp\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3n}-\dfrac{1}{6n^2}+\dfrac{1}{12n^3}+\dfrac{1}{12n^4}\right)=\sqrt{e}\left(1+\dfrac{1}{3n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Nous en déduisons : $\sqrt{e}\left(\dfrac{1}{3n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\leqslant x_n-\sqrt{e}\leqslant\sqrt{e}\left(\dfrac{1}{3n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ c'est-à-dire $x_n-\sqrt{e}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{e}}{3n}$.

29. $x_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 1+\dfrac{(1)^{k-1}}{\sqrt{k}}>0$.

Nous avons donc $\ln(x_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{(1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

Quand k tend vers $+\infty$ nous avons

$\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)=\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{k}+O\left(\dfrac{1}{k\sqrt{k}}\right)=\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{k}+y_n$.

La série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge car $n\in\mathbb{N}^*\longmapsto\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\in\mathbb{R}$ est décroissante et converge vers 0. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}y_n$ converge car $\dfrac{3}{2}>1$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{k}$ donc $\ln(n+1)\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant1+\ln(n)$. En divisant par $\ln(n)$ nous en déduisons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

La suite de terme général $\ln(x_n)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}-y_n\right)$ est donc équivalente lorsque n tend vers $+\infty$ à $-\ln(n)$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(x_n)=-\infty$ puis $\ln(x_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\ln(n)$.

$\ln(\sqrt{n}x_n)=\dfrac{1}{2}\ln(n)+\ln(x_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2}\ln(n)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=0$.

Remarque nous avons déjà vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma_n$ où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\gamma_n=\gamma$ la constante d'Euler.

Nous en déduisons que $\ln(x_n)=-\ln(n)+z_n$ où $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente. Il vient alors $x_n=\dfrac{1}{n}\exp(z_n)$. Nous retrouvons le fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=0$; la suite de terme général nx_n est convergente.

30. Supposons $\alpha=1$. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}$. Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}$ diverge.

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$. $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)^2$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{\ln(n)}\left(\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)^2$ soit encore $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Nous en déduisons lorsque n tend vers $+\infty$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Comme nous l'avons vu lors de l'étude des séries de Bertrand, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente. Nous ne pouvons donc pas conclure dans le cas $\alpha = 1$.

Supposons $\alpha \neq 1$. Soit β un réel strictement compris entre α et 1.

Soit $v_n = n^\beta u_n$. $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\beta\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right]$. Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \left(\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)+\left(-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ c'est-à-dire

$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \left(\dfrac{\beta-\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta-\alpha}{n}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(v_{k+1})-\ln(v_k)) = \ln(v_n)-\ln(v_1)$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\beta-\alpha}{n}$ est divergente.

Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{v_n}{v_1}\right) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{v_1} = 0$. Nous obtenons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\beta u_n = 0$ avec $\beta > 1$. La série $\sum u_n$ est convergente.

Si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{v_n}{v_1}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{v_1} = +\infty$. Nous obtenons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\beta u_n = +\infty$ avec $\beta < 1$. La série $\sum u_n$ est divergente.

31. (a) On suppose qu'à partir du rang $n_0\geqslant 1$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$ avec $u_n > 0$.

$\displaystyle\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}\geqslant\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{k-1}{k}$ donc $\forall n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant\dfrac{(n_0-1)u_{n_0}}{n-1}$.

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

(b) Soit $\alpha \in]1,\ A[$. Nous savons que pour $x > -1$, $\ln(1+x)\leqslant x$.

$$\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln(n^\alpha u_n) = \ln\left(\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^\alpha\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
$$\leqslant \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{A}{n}\right)\leqslant\frac{\alpha-A}{n}.$$

$\displaystyle\sum_{j=n_0}^{n-1}\left(\ln\left((j+1)^\alpha u_{j+1}\right)-\ln(j^\alpha u_j)\right)\leqslant\sum_{j=n_0}^{n-1}\frac{\alpha-A}{j}$ c'est-à-dire

$\ln(n^\alpha u_n) - \ln(n_0^\alpha u_{n_0}) \leqslant \sum_{j=n_0}^{n-1} \frac{\alpha - A}{j}$.

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n_0}^{n-1} \frac{\alpha - A}{j} = -\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ et la série $\sum u_n$ est convergente.

32. (a) Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

$a_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Nous savons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$ où $\sum v_n$ est absolument convergente donc $a_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + v_n\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons :

$$a_n = \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{\alpha}{n} + v_n + O\left(\left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2\right)$$
$$= v_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2\right).$$

$\left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2 = \frac{\alpha^2}{n^2} + (v_n)^2 - 2\frac{\alpha}{n}v_n$ et $\left|-2\frac{\alpha}{n}v_n\right| \leqslant \frac{\alpha^2}{n^2} + (v_n)^2$.

Il existe donc $M > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$n \geqslant N \Rightarrow O\left(\left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2\right) \leqslant M\left(\frac{\alpha^2}{n^2} + (v_n)^2\right).$$

Il vient $a_n = v_n + w_n$ avec, à partir d'un certain rang, $|w_n| \leqslant \frac{A}{n^2} + M(v_n)^2$ avec $A > 0$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc à partir d'un certain rang, $(v_n)^2 \leqslant |v_n|$.

Les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes donc la série $\sum a_n$ est convergente.

La suite de terme général $\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = b_n - b_0$ est donc convergente ; il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n^\alpha u_n) = l$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \exp(l) = A > 0$.

Nous avons bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) Lorsque t tend vers 0, $1 - (1-t)^x = xt + o(t)$ donc $\lim_{t\to 0} \frac{1 - (1-t)^x}{t} = x$.

$\varphi : t \in]0,\ 1[\longmapsto \frac{1 - (1-t)^x}{t} \in \mathbb{R}$ qui est continue est prolongeable par continuité en 0.

x étant strictement supérieur à -1, φ est, d'après le critère de Riemann, intégrable sur $\left[\frac{1}{2},\ 1\right[$. φ est donc, pour tout $x > -1$, intégrable sur $]0,\ 1[$.

Pour $|t|<1$ nous avons $(1-t)^x = 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n t^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\right)$.

Il vient alors pour $t\in]0,\ 1[$, $\dfrac{1-(1-t)^x}{t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right)$.

Supposons $x>1$ et $x\notin\mathbb{N}$.

Notons, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n}|x-k|>0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|n-x|}{n+2}$.

x étant fixé, pour $n>E(x)$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n-x}{n+2}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons donc

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1-x)(n+1)}{(n+2)^2} = 1-\dfrac{x+2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

En utilisant le résultat démontré précédemment nous en déduisons qu'il existe $\lambda>0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{x+2}}$.

$x>-1$ donc $x+2>1$; la série $\sum u_n$ est convergente.

Si $x\in\mathbb{N}$ alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$ est nul à partir d'un certain rang. Finalement pour tout $x\in]-1,\ +\infty[$ la série de terme général $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right|dt$ est convergente et en utilisant le résultat concernant les intégrales de sommes de séries nous en déduisons que

$$\int_0^1\frac{1-(1-t)^x}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right).$$

33. Posons, pour $(n,\ k)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $n\geqslant 2$, $v_k(n) = n^2\dfrac{(-1)^k}{1-k^2n^2}$.

$|v_k(n)|\leqslant\dfrac{4}{4k^2-1}$. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}v_k$ est normalement (donc uniformément) convergente. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_k(n) = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

Nous en déduisons [15] $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^2 S_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = L$.

Nous obtenons donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{L}{n^2}$.

$f_n\ :\ t\in\mathbb{R}_+\longmapsto\dfrac{1}{1+t^n}\in\mathbb{R}$ est continue. $\dfrac{1}{1+t^n}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^n}$, avec $n\geqslant 2$, donc f_n est intégrable.

En utilisant le changement de variable $t\in[1,\ +\infty[\longmapsto\dfrac{1}{t}\in]0,\ 1]$ nous en dé-

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

duisons $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}=\int_0^1\frac{t^{n-2}}{1+t^n}$.

Nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^n}dt=\int_0^1\frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}dt.$

$\displaystyle 0\leqslant\frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\leqslant 2,\forall t\in[0,\ 1],\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}=1.$ Nous obtenons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}A_n=1.$

$\displaystyle A_n-1=\int_0^1\frac{t^{n-2}-t^n}{1+t^n}dt.$

Pour $|t|<1$ nous avons $\displaystyle\frac{1}{1+t^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{nk}$ puis

$$\frac{t^{n-2}-t^n}{1+t^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{nk+n-2}-\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{nk+n}.$$

Considérons une série alternée $\sum(-1)^k w_k$ dont le terme général a une valeur absolue qui converge vers 0 en décroissant. Nous savons que cette série converge et que le reste d'ordre N est majoré en valeur absolue par $|w_{N+1}$.

Pour $0\leqslant t<1$ nous pouvons appliquer ce résultat donc [16]

$$\left|\frac{t^{n-2}}{1+t^n}-\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{nk+n-2}\right|\leqslant t^{n(N+1)+n-2}\text{ et }\left|\frac{t^n}{1+t^n}-\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{nk+n}\right|\leqslant t^{n(N+1)+n}.$$

$$\int_0^1 t^{n(N+1)+n-2}dt=\frac{1}{n(N+1)+n-1}\text{ et }\int_0^1 t^{n(N+1)+n}dt=\frac{1}{n(N+1)+n+1}.$$

Finalement $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n-2}-t^n}{1+t^n}dt=\sum_{k=0}^{N}\left((-1)^k\int_0^1(t^{nk+n-2}-t^{nk+n})dt\right)+R_N$ avec

$$|R_n|\leqslant\frac{1}{n(N+1)+n-1}+\frac{1}{n(N+1)+n+1}.$$

$$\int_0^1(t^{nk+n-2}-t^{nk+n})dt=\frac{1}{(n+1)k-1}-\frac{1}{(n+1)k+1}=\frac{2}{(n+1)^2k^2-1}.$$

Il vient donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{(n+1)^2k^2-1}=\int_0^1\frac{t^{n-2}-t^n}{1+t^n}dt$ c'est-à-dire

$$A_n-1=\int_0^1\frac{t^{n-2}-t^n}{1+t^n}dt=2S_n.$$

Étant donné que $\displaystyle S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{L}{n^2}$, la série de terme général A_n-1 est convergente.

34. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle f_n\ :\ t\in\mathbb{R}_+\longmapsto\frac{1}{(1+t^3)^n}\in\mathbb{R}_+$ est continue $\displaystyle\frac{1}{(1+t^3)^n}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{3n}}$ avec $3n\geqslant 3>1$. f_n est intégrable.
Intégrons par parties entre 0 et $X>0$.

16. En fait, ici, nous pouvions simplement écrire
$$\frac{t^{n-2}}{1+t^n}-\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{nk+n-2}=\frac{t^{n-2}}{1+t^n}-t^{n-2}\frac{1-(-t^n)^{N+1}}{1+t^n}=t^{n-2}\frac{(-t^n)^{N+1}}{1+t^n}.$$

Nous obtenons $\displaystyle\int_0^X \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^X + 3n\int_0^X \frac{t^3}{(1+t^3)^n}dt.$

Nous en déduisons $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$ puis $3nI_{n+1} = (3n-1)I_n$.

$\ln\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)$; $\ln\left(1-\dfrac{1}{3n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3n}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{3n}$ est divergente et

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{1}{3k}\right) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\ln\left(\frac{I_{k+1}}{I_k}\right) = -\infty.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\ln\left(\frac{I_{k+1}}{I_k}\right) = \ln(I_{N+1}) - \ln(I_1).$

Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\ln(I_{N+1}) = -\infty$ puis [17] $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} I_{N+1} = 0.$

35. (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = u_0\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+a}{k+b}.$

$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{k}\right)\right).$

Posons $x_k = \ln\left(1+\dfrac{a}{k}\right) - \ln\left(1+\dfrac{b}{k}\right)$.

Lorsque k tend vers $+\infty$, $x_k = \dfrac{a-b}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.

Nous avons déjà vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma_n$ où la suite de terme général γ_n est convergente.

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ étant convergente, nous en déduisons

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = (a-b)\ln(n) + \lambda_n$ où la suite de terme général λ_n est convergente.

$\ln(u_n) = \ln(u_0) + \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + (a-b)\ln(n-1) + \lambda_{n-1}$ puis

$u_n = u_0\dfrac{a}{b}(n-1)^{a-b}\exp(\lambda_{n-1})$. Il vient alors $u_n = n^{a-b}\mu_n$ où la suite de terme général μ_n est convergente de limite $K\neq 0$.

$\sum u_n$ converge si et seulement si $b-a>1$.

(b) $nu_n = n^{a-b+1}\mu_n$ avec $a-b+1<0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0.$

36. Soient $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ n entiers ($n\geqslant 2$) deux à deux distincts.
Quitte à les réordonner on a nécessairement $\forall i\in\mathbb{N}_n,\ p_i\geqslant i$ et en particulier

17. $0\leqslant\dfrac{1}{(1+t^3)^n}\leqslant\dfrac{1}{1+t^3}$, Pour $t>0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n} = 0.$

$\sum_{k=1}^{n} p_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. φ étant injective nous avons $\sum_{k=p+1}^{p+n} \varphi(k) \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$.
$\sum_{k=p+1}^{p+n} \frac{\varphi(k)}{k^2} \geqslant \frac{n(n+1)}{2(p+n)^2}$. En particulier en choisissant $n = p \geqslant 1$ nous avons
$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\varphi(k)}{k^2} \geqslant \frac{n+1}{8n)} \geqslant \frac{1}{8}$.
Nous en déduisons donc d'après le critère de Cauchy que la série est divergente.

37. En écrivant $\frac{1}{4n+1} = \int_0^1 t^{4n} dt$ nous obtenons
$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t^4)^k \right) = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^N t^{4(N+1)}}{1+t^4} dt.$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt + \int_0^1 \frac{(-1)^N t^{4(N+1)}}{1+t^4} dt.$
$\int_0^1 \frac{t^{4(N+1)}}{1+t^4} dt \leqslant \int_0^1 t^{4(N+1)} dt = \frac{1}{4N+5}.$
Nous en déduisons $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt.$
La série proposée est donc convergente ; nous le savions car il s'agit d'une série alternée dont le terme général a la valeur absolue qui converge vers 0 en décroissant.
Calculons $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt.$
$t^4 + 1 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1).$
$\frac{1}{t^4+1} = \frac{at+b}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{ct+d}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}.$
En échangeant t en $-t$ et en tenant compte de l'unicité de la décomposition en éléments simples nous en déduisons $c = -a,\ b = d$.
En choisissant $t = 0$ nous obtenons $b = \frac{1}{2}$ et en choisissant par exemple $t = 1$ nous obtenons $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Il vient alors [18] $\frac{1}{t^4+1} = \frac{1}{4} \frac{2 + \sqrt{2}t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{1}{4} \frac{2 - \sqrt{2}t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}.$

18. Nous pouvons utiliser une autre méthode plus générale :
Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine du polynôme $X^2 - \sqrt{2}X + 1$.
$\frac{1}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} = aX + b + \frac{(cX+d)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$ donc
$\frac{1}{\alpha^2 + \alpha\sqrt{2} + 1} = a\alpha + b$ avec $\alpha^2 = -1 + \alpha\sqrt{2}$.
Il vient alors $\frac{1}{2\alpha\sqrt{2}} = a\alpha + b$ puis

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{t^4+1} &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2+\sqrt{2}t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2-\sqrt{2}t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \frac{2+\sqrt{2}t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \frac{1+\sqrt{2}t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dt}{(\sqrt{2}t+1)^2+1}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\right]_{-1}^1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{atan}(\sqrt{2}t+1)\right]_{-1}^1\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\operatorname{atan}((\sqrt{2}+1)+\operatorname{atan}(\sqrt{2}-1)\Big).\end{aligned}$$

Nous savons que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. Nous obtenons donc $\operatorname{atan}((\sqrt{2}+1) + \operatorname{atan}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{2}$.

Finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi}{2}$.

38. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha^n + \beta^n$; $x_{n+2} = \alpha^n(\alpha+1) + \beta^n(\beta+1) = x_{n+1} + x_n$.
$\exp\left(i\frac{\pi}{3}\alpha^n\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)\left(\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\beta^n\right) - 1\right) + \exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)$.
Nous avons donc :
$w_n = v_n + iu_n = \frac{1}{n+1}\exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)\left(\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\beta^n\right) - 1\right) + \exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)$.
$|\beta| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$.
Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)\left(\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\beta^n\right) - 1\right) = O\left(\frac{1}{n+1}\beta^n\right)$.
La série de terme général $\frac{1}{n+1}\exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)\left(\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\beta^n\right) - 1\right)$ est absolument convergente. La série de terme général w_n est donc de même nature que la série de terme général $z_n = \frac{1}{n+1}\exp\left(i\frac{\pi}{3}x_n\right)$.
$x_0 = 2,\ x_1 = 1$. Nous en déduisons en utilisant la relation $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ que modulo 2π,
$\frac{\pi x_0}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi x_1}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi x_2}{3} \equiv \pi$, $\frac{\pi x_3}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}$, $\frac{\pi x_4}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi x_5}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi x_6}{3} \equiv 0$,
$\frac{\pi x_7}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi x_8}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi x_9}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}$, $\frac{\pi x_{10}}{3} \equiv \pi$, $\frac{\pi x_{11}}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi x_{12}}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}$, $\frac{\pi x_{13}}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$,

---

$1 = 2\alpha\sqrt{2}(a\alpha+b) = 2a\alpha^2\sqrt{2} + 2b\alpha\sqrt{2} = 2b\alpha\sqrt{2} + 2a\sqrt{2}(-1+\alpha\sqrt{2}) = 2b\alpha\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 4a\alpha$.
Nous avons une relation analogue avec $\overline{\alpha} \neq \alpha$.
Finalement $1 = -2a\sqrt{2} + (2b\sqrt{2}+4a)\alpha$ et $1 = -2a\sqrt{2} + (2b\sqrt{2}+4a)\overline{\alpha}$ donc nous obtenons $1 = -2a\sqrt{2}$ et $0 = 2b\sqrt{2} + 4a$ soit enfin $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$.

$\dfrac{\pi x_{14}}{3} \equiv \pi$, $\dfrac{\pi x_{15}}{3} \equiv \dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{16}}{3} \equiv \dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{17}}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{18}}{3} \equiv 0$, $\dfrac{\pi x_{19}}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{20}}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$,
$\dfrac{\pi x_{21}}{3} \equiv \dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{22}}{3} \equiv \pi$, $\dfrac{\pi x_{23}}{3} \equiv \dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{24}}{3} \equiv \dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi x_{25}}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$.
La suite de terme général $\exp\left(-i\dfrac{\pi}{3}x_n\right)$ est périodique de période 24.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $n = 24p + q$ avc $0 \leqslant q < 24$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{l=0}^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{23} z_{24l+k}\right) + \sum_{l=24p}^{n} z_l$.
$\left|\displaystyle\sum_{l=24p}^{n} z_l\right| \leqslant \dfrac{24}{24p+1} \leqslant \dfrac{24}{n-22}$. Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{l=24p}^{n} z_l = 0$.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{23} z_{24l+k} = \sum_{k=0}^{23}\frac{1}{24l+k+1}\exp\left(-i\frac{\pi}{3}x_k\right)$.
Notons $\zeta = \exp\left(-\dfrac{i\pi}{3}\right)$.

$$\sum_{k=0}^{23}\frac{1}{24l+k+1}\exp\left(-i\frac{\pi}{3}x_k\right) = \frac{1}{24l+1}\zeta^2 + \frac{1}{24l+2}\zeta - \frac{1}{24l+3}$$
$$+\frac{1}{24l+4}\zeta^4 + \frac{1}{24l+5}\zeta + \frac{1}{24l+6}\zeta^5 + \frac{1}{24l+7} + \frac{1}{24l+8}\zeta^5 + \frac{1}{24l+9}\zeta^5$$
$$+\frac{1}{24l+10}\zeta^4 - \frac{1}{24l+11} + \frac{1}{24l+12}\zeta + \frac{1}{24l+13}\zeta^4 + \frac{1}{24l+14}\zeta^5 - \frac{1}{24l+15}$$
$$+\frac{1}{24l+16}\zeta^2 + \frac{1}{24l+17}\zeta^5 + \frac{1}{24l+18}\zeta + \frac{1}{24l+19} + \frac{1}{24l+20}\zeta + \frac{1}{24l+21}\zeta$$
$$\frac{1}{24l+23} + \frac{1}{24l+24}\zeta^5$$
$$= \zeta\left(\frac{1}{24l+2} - \frac{1}{24l+4} + \frac{1}{24l+5} - \frac{1}{24l+10} + \frac{1}{24l+12}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{24l+13} + \frac{1}{24l+18} + \frac{1}{24l+20} + \frac{1}{24l+21}\right)$$
$$+\zeta^2\left(\frac{1}{24l+1} - \frac{1}{24l+6} - \frac{1}{24l+8} - \frac{1}{24l+9} - \frac{1}{24l+14}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{24l+16} - \frac{1}{24l+17} + \frac{1}{24l+22} - \frac{1}{24l+24}\right)$$
$$-\frac{1}{24l+3} + \frac{1}{24l+7} - \frac{1}{24l+11} - \frac{1}{24l+15} + \frac{1}{24l+19} - \frac{1}{24l+23}.$$

Lorsque l tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{23}\frac{1}{24l+k+1}\exp\left(-i\frac{\pi}{3}x_k\right) = \frac{1}{8l} + O\left(\frac{1}{l^2}\right)$.
La série des parties réelles est donc divergente et la série des parties imaginaires est convergente. Donc $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

39. En utilisant l'hypothèse $U_{2n} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) U_n$ nous en déduisons :

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{2^{n+1}} \leqslant U_1 \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

En effet pour $n=0$, l'inégalité est vérifiée. Supposons l'inégalité vraie jusqu'au rang n. $U_{2^{n+2}} \leqslant U_1\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = U_1\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Le résultat est donc vrai au rang $n+1$; il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

$\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^k}$. La série de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est donc convergente de limite $l>0$ donc la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est convergente de limite $\exp(l)>1$.

La suite de terme général U_{2^n} est donc majorée. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe un entier q tel que $p \leqslant 2^q$ donc $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée. S'agisant d'une suite croissante elle est convergente donc la série $\sum u_n$ est convergente.

40. (a) Soit l la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geqslant N$ on ait $|a_k - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Soit alors $n \geqslant N+1$.

$$|b_n - l| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{N} C_n^k|a_k-l| + \sum_{k=N+1}^{n} C_n^k|a_k-l|\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k|a_k-l| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k|a_k-l| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notons $M = \sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k-l|$; M existe car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k|a_k-l| \leqslant \sum_{k=0}^{N}\frac{n^k}{k!2^n}|a_k-l| \leqslant M\sum_{k=0}^{N}\frac{n^k}{k!2^n} \leqslant M\frac{(N+1)n^N}{2^n}.$$

$\lim_{n\to+\infty} M\frac{(N+1)n^N}{2^n} = 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_1$ on ait $0 \leqslant M\frac{(N+1)n^N}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Nous avons donc pour $n \geqslant \max(N+1, N_1)$, $|b_n - l| \leqslant \varepsilon$; la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l.

(b) Posons, pour $j \in \mathbb{N}$, $A_j = \sum_{k=0}^{j} a_k$ et $A_{-1}=0$. $\forall j \in \mathbb{N},\ a_j = A_j - A_{j-1}$.

$$2^k b_k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a_j = \sum_{j=0}^{k} C_k^j A_j - \sum_{j=0}^{k} C_k^j A_{j-1} = \sum_{j=0}^{k}\frac{k!(2j-k+1)}{(j+1)!(k-j)!}A_j.$$

Nous avons donc $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} A_j \right)$.

Finalement nous obtenons : $B_n = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} \right) A_j$.

(c) Dans la relation précédente, si les A_j, pour $j \in \mathbb{N}$, sont tous égaux à 1 nous obtenons $2^k b_k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a_j = \sum_{j=0}^{k} C_k^j - \sum_{j=1}^{k} C_k^j = 1$.

Il vient alors $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} \right)$.

Revenons au cas général. Supposons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

$\sum_{j=0}^{n} \left[\left(\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} \right) (A_j - L) \right] = B_n - \frac{2^{n+1}-1}{2^n} L$.

$B_n - 2L = \frac{L}{2^n} + \sum_{j=0}^{n} \left[\left(\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} \right) (A_j - L) \right]$.

Montrons que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2L$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{L}{2^n} = 0$. Il reste à prouver que $\lim_{n\to+\infty} sum_{j=0}^{n} \left[\left(\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} \right) (A_j - L) \right] = 0$.

$\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} = \frac{1}{2^n} C_{n+1}^{j+1}$. En effet, en posant $C_j^{j+1} = 0$,

$\frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} = \frac{1}{2^k}(C_k^j - C_k^{j+1})$ donc

$\sum_{k=j}^{n} \frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!} = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{2^k} C_k^j - \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{2^k} C_k^{j+1}$.

$\frac{1}{2^k} C_k^i$ est le coefficient de X^i du polynôme $\frac{1}{2^k}(1+X)^k$ donc $\sum_{k=i}^{p} \frac{1}{2^k} C_k^i$ est le coefficient de X^i du polynôme $\sum_{k=i}^{p} \frac{1}{2^k}(1+X)^k$ c'est-à-dire aussi le coefficient de X^i du polynôme $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}(1+X)^k$.

$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}(1+X)^k = 2 \frac{\left(\frac{1+X}{2}\right)^{p+1} - 1}{X-1}$.

$\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{2^k} C_k^j$ est le coefficient de X^{j+1} du polynôme $2X \frac{\left(\frac{1+X}{2}\right)^{n+1} - 1}{X-1}$ et

$\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n}\frac{1}{2^k}C_k^{j+1}$ est le coefficient de X^{j+1} du polynôme $2\dfrac{\left(\frac{1+X}{2}\right)^{n+1}-1}{X-1}$.

Finalement $\displaystyle\sum_{k=j}^{p}\frac{1}{2^k}C_k^{j}-\sum_{k=j+1}^{p}\frac{1}{2^k}C_k^{j+1}$ est le coefficient de X^{j+1} du polynôme $2X\dfrac{\left(\frac{1+X}{2}\right)^{p+1}-1}{X-1}-2\dfrac{\left(\frac{1+X}{2}\right)^{p+1}-1}{X-1}=2\left(\left(\dfrac{1+X}{2}\right)^{p+1}-1\right)$

c'est-à-dire est égal au coefficient de X^{j+1} du polynôme $\dfrac{1}{2^p}(1+X)^{p+1}$ qui est $\dfrac{1}{2^p}C_{p+1}^{j+1}$. Le résultat est bien démontré.

Notons $S_n=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left[\left(\sum_{k=j}^{n}\frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!}\right)(A_j-L)\right]$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $j\geqslant N$ on ait $|A_j-L|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit alors $n>N$.

$$|S_n|\leqslant\sum_{j=0}^{N}\left[\left|\sum_{k=j}^{n}\frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!}\right||A_j-L|\right]+\sum_{j=N+1}^{n}\left[\left|\sum_{k=j}^{n}\frac{k!(2j-k+1)}{2^k(j+1)!(k-j)!}\right||A_j-L|\right].$$

Soit M un majorant $|A_j-L|$; majorant qui existe.

$|S_n|\leqslant M\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2^{n+1}}C_{n+1}^{j+1}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=N+1}^{n}\frac{1}{2^{n+1}}C_{n+1}^{j+1}$.

$\displaystyle\sum_{j=N+1}^{n}C_{n+1}^{j+1}\leqslant\sum_{j=0}^{n}C_{n+1}^{j+1}=2^{n+1}-1$ donc $\displaystyle\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=N+1}^{n}\frac{1}{2^{n+1}}C_{n+1}^{j+1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

$C_{n+1}^{j+1}\leqslant\dfrac{(n+1)^{j+1}}{(j+1)!}$ donc

$\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2^{n+1}}C_{n+1}^{j+1}\leqslant\sum_{j=0}^{N}\frac{(n+1)^{j+1}}{2^{n+1}(j+1)!}\leqslant(N+1)\frac{(n+1)^{N+1}}{2^{n+1}}$.

Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}M\sum_{j=0}^{N}\frac{(n+1)^{j+1}}{2^{n+1}(j+1)!}\leqslant(N+1)\frac{(n+1)^{N+1}}{2^{n+1}}=0$.

Il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant N_1$ on ait

$\displaystyle M\sum_{j=0}^{N}\frac{(n+1)^{j+1}}{2^{n+1}(j+1)!}\leqslant(N+1)\frac{(n+1)^{N+1}}{2^{n+1}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

En choisissant $n\geqslant\max(N+1,N_1)$ nous avons $|B_n-2L|\leqslant\varepsilon$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $2L$. Finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_n=2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

41. (a) Nous pouvons aussi utiliser le résultat concernant les séries ; si une série à

termes positifs $\sum u_n$ diverge et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente lorsque n tend vers $+\infty$ à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors les sommes partielles des deux séries sont équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$.
dans notre exemple la suite, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, de terme général $\sqrt[n]{n}$ converge vers 1 donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
En considérant $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\ \cdots +\ \sqrt[n]{n}}$ nous obtenons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

(b) $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. $\sum v_n$ est convergente.

42. La série de Riemann converge pour $\alpha > 1$. Notons $S \geqslant 1$ sa somme.
$x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha} \in \mathbb{R}^*$ étant décroissante nous avons
$\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ c'est-à-dire
$\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ soit encore
$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ et donc $\dfrac{R_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{S(\alpha-1)}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

43. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n \exp(-\lambda_n z_0)$. Soit $z \in \mathbb{C}$, $\Re e(z - z_0) > 0$. Notons $z - z_0 = a + ib$ avec $(a,\ b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
Il s'agit de montrer que la série $\sum b_n \exp(-\lambda_n(a+ib))$ converge ; sachant que la série $\sum b_n$ converge.
Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Notons $\varepsilon' = \dfrac{a\varepsilon \exp(\lambda_0 a)}{2a + |a+ib|}$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n, $n \geqslant N \Rightarrow |R_n| \leqslant \varepsilon'$.
Soient alors $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2$, $N+1 \leqslant p \leqslant q$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} b_n \exp(-\lambda_n(a+ib)) &= \sum_{n=p}^{q} (R_{n-1} - R_n)\exp(-\lambda_n(a+ib)) \\ &= \sum_{n=p-1}^{q-1} R_n \exp(-\lambda_{n+1}(a+ib)) \\ &\qquad - \sum_{n=p}^{q} R_n \exp(-\lambda_n(a+ib))\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} b_n \exp(-\lambda_n(a+ib)) &= R_{p-1}\exp(-\lambda_p(a+ib)) - R_q \exp(-\lambda_q(a+ib)) \\ &\quad + \sum_{n=p}^{q-1} R_n(\exp(-\lambda_{n+1}(a+ib)) - \exp(-\lambda_n(a+ib))).\end{aligned}$$

Lorsque $p = q$, la dernière somme est nulle.

$$\exp(-\lambda_{n+1}(a+ib)) - \exp(-\lambda_n(a+ib)) = -(a+ib)\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \exp(-(a+ib)t)dt$$

donc

$$\begin{aligned}|\exp(-\lambda_{n+1}(a+ib)) - \exp(-\lambda_n(a+ib))| &\leqslant |a+ib|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \exp(-at)dt\\ &= \frac{|a+ib|}{a}(\exp(-\lambda_n a) - \exp(-\lambda_{n+1}a)).\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=p}^{q-1} R_n(\exp(-\lambda_{n+1}(a+ib)) - \exp(-\lambda_n(a+ib)))\right|\\ &\leqslant \frac{|a+ib|}{a}\sum_{n=p}^{q-1}|R_n|(\exp(-\lambda_n a) - \exp(-\lambda_{n+1}a))\\ &\leqslant \varepsilon'\sum_{n=p}^{q-1}(\exp(-\lambda_n a) - \exp(-\lambda_{n+1}a))\\ &= \varepsilon'\frac{|a+ib|}{a}(\exp(-\lambda_p a) - \exp(-\lambda_q a)).\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} b_n \exp(-\lambda_n(a+ib))\right| &\leqslant \varepsilon'\exp(-\lambda_0 a) + \varepsilon'\exp(-\lambda_0 a) + \varepsilon'\frac{|a+ib|}{a}\exp(-\lambda_0 a)\\ &= \varepsilon'\exp(-\lambda_0 a)\left(2 + \frac{|a+ib|}{a}\right) = \varepsilon.\end{aligned}$$

La série $\sum b_n \exp(-\lambda_n(a+ib))$ vérifie le critère de Cauchy donc elle converge.
Posons $z - z_0 = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.La condition concernant une mesure de l'argument signifie $0 < \alpha \leqslant \cos(\theta)$ soit encore $1 \leqslant \dfrac{|z-z_0|}{\Re e(z-z_0)} \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.
Reprenons le calcul précédent avec ε étant donné un choix de $\varepsilon' = \varepsilon\dfrac{\alpha}{1+2\alpha}$.
Nous obtenons alors l'existence d'un entier N ne dépendant que de ε et non pas de z tel que pour p et q strictement supérieurs à N nous ayons

$$\left|\sum_{n=p}^{q} b_n \exp(-\lambda_n(a+ib))\right| \leqslant \varepsilon'\exp(-\lambda_0 a)\left(2 + \frac{|a+ib|}{a}\right) \leqslant \varepsilon'\left(2 + \frac{|a+ib|}{a}\right) = \varepsilon.$$

La convergence est bien uniforme.

44. (a) Pour $b = 0$, $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\cos(b\ln t)}{t}dt = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

Pour $b \neq 0$, une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\cos(b\ln t)}{t}$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{b}\sin(b\ln t)$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{b}\left(\sin(b\ln(n+1))\right)$.

Montrons que la suite de terme général $\sin(b\ln(n))$ est divergente.

On peut supposer $b>0$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\pi(8k+1)}{4b}\right)\left(\exp\left(\frac{\pi}{4b}\right)-1\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\pi(8k-1)}{4b}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{4b}\right)\right)=+\infty$.

Il existe donc $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $k\geqslant k_0$ on ait

$$\exp\left(\frac{\pi(8k+1)}{4b}\right)\left(\exp\left(\frac{\pi}{4b}\right)-1\right)\geqslant 2 \text{ et } \exp\left(\frac{\pi(8k-1)}{4b}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{4b}\right)\right)\geqslant 2.$$

Pour tout $k\geqslant k_0$ il existe donc un entier naturel strictement compris entre $\exp\left(\frac{\pi(8k+1)}{4b}\right)$ et $\exp\left(\frac{\pi(4k+1)}{2b}\right)$ et de même il existe donc un entier naturel strictement compris entre $\exp\left(\frac{\pi(4k-1)}{2b}\right)$ et $\exp\left(\frac{\pi(8k-1)}{4b}\right)$.

Soit $(N,\ k)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $k\geqslant k_0$, $\exp\left(\frac{\pi(8k+1)}{4b}\right)\geqslant N$ et $\exp\left(\frac{\pi(4k-1)}{2b}\right)\geqslant N$.

Il existe alors $n_1\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $n_1\geqslant N$, $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant b\ln(n_1)\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $n_2\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $n_2\geqslant N$, $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant b\ln(n_2)\leqslant-\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

$\forall N\in\mathbb{N}^*, \exists(n_1,\ n_2)\in\mathbb{N}^2,\ n_1\geqslant N,\ n_2\geqslant N$ avec $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(b\ln(n_1))\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin(b\ln(n_2))\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite de terme général $\sin(b\ln(n))$ est divergente. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

(b) $t\longmapsto\dfrac{\cos(b\ln(t))}{t}$ a pour dérivée $t\longmapsto-\dfrac{\cos(b\ln(t))+b\sin(b\ln(t))}{t^2}$.

Nous avons donc

$$\int_n^{n+1}(t-n-1)\frac{\cos(b\ln(t))+b\sin(b\ln(t))}{t^2}dt = \left[(n+1-t)\frac{\cos(b\ln(t))}{t}\right]_n^{n+1}+\int_n^{n+1}\frac{\cos(b\ln(t))}{t}dt$$

c'est-à-dire $u_n-v_n=\displaystyle\int_n^{n+1}(t-n-1)\frac{\cos(b\ln(t))+b\sin(b\ln(t))}{t^2}dt$.

(c) $|u_n-v_n|\leqslant(1+|b|)\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}dt=(1+|b|)\frac{1}{n(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1+|b|}{n^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n-v_n)$ est absolument convergente. Nous en déduisons que la série de terme général $\dfrac{\cos(b\ln(n))}{n}$ est divergente.

(d) Nous avons vu à l'exercice précédent que si la série de terme général

$a_n \exp(-\lambda_n z_0)$ converge ($(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante positive) alors la série de terme général $a_n \exp(-\lambda_n z)$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re e(z - z_0 > 0$.
Posons $\lambda_n = \ln(n)$. Nous en déduisons que si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^{z_0}}$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^z}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re e(z - z_0) > 0$.
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$. Nous savons que la série de Riemann diverge pour $z = 1$.
Supposons qu'il existe un nombre complexe $z_0 = a_0 + ib_0$ de partie réelle $a_0 < 1$ pour lequel la série de Riemann converge. Cette série devrait donc converger pour tout z tel que $\Re e(z) > a_0$ et en particulier pour $z = 1$ ce qui est faux. La série de Riemann diverge donc pour $\Re e(z) < 1$.
D'après ce que nous venons de voir, elle diverge pour tout $z = 1 + it$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Si $\Re e(z) > 1$ alors $\dfrac{1}{|n^z|} = \dfrac{1}{n^{\Re e(z)}}$. La série de Riemann converge donc absolument pour $\Re e(z) > 1$ et diverge pour $\Re e(z) \leqslant 1$.

45. (a) $\sum a_n$ est une série convergente, à termes réels $\geqslant 0$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{M}{n^2}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n(n+1)}$ est donc convergente.

(b) Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $R_k = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\sum a_n$ est une série convergente donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geqslant N$ on ait $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \leqslant \varepsilon$.

$$0 \leqslant R_k \leqslant \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{k=n}^{+\infty} a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{(k+1)(k+2)}.$$

Nous obtenons donc $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant n(n+1)R_n \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)R_n = 0$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $2v_k = (k+1)(k+2)R_k - k(k+1)R_k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2v_k &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)R_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)R_{k+1}\\ &= (n+1)(n+2)R_n + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(k+2)\frac{a_{k+1}}{(k+1)(k+2)}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = (n+1)(n+2)R_n + \sum_{k=1}^{n} a_k$ nous en déduisons que la série $\sum v_k$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

46. Posons, pour $(n,\ x) \in \mathbb{N} \times D$, $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)$. Soient p et q deux entiers naturels ; $p \leqslant q$. Soit $x \in D$. En utilisant la transformation d'Abel vue plus haut nous avons :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k(x)\alpha_k(x) = \sum_{k=p}^{q} A_k(x)(\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x)) - A_{p-1}(x)\alpha_p(x) + A_q(x)\alpha_{q+1}(x).$$

La suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante convergeant vers 0 donc pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(x) \geqslant 0$.

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k(x)\alpha_k(x)\right| \leqslant K\sum_{k=p}^{q}(\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x)) + K\alpha_p(x) + K\alpha_{q+1}(x) = 2K\alpha_p(x).$$

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 donc

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant N \Rightarrow 2K\alpha_p(x) \leqslant \varepsilon.$

Nous en déduisons :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ \forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{q} a_k(x)\alpha_k(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

La série $\sum a_k\alpha_k$ converge uniformément.

Application $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx) = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad x \equiv 0\ (2\pi) \\ \dfrac{1 - \exp(i(n+1)x)}{1 - \exp(ix)} & \text{sinon} \end{cases}$

$$\frac{1 - \exp(i(n+1)x)}{1 - \exp(ix)} = \frac{\exp\left(i\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Soit $x \in]2k\pi,\ 2(k+1)\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Soit $\eta \in]0,\ \pi[$. Pour $x \in [2k\pi + \eta,\ 2(k+1)\pi - \eta]$ et pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. La suite de terme général $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \in \mathbb{R}$ converge donc uniformément vers 0 et pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \in \mathbb{R}$ est décroissante. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(x \in [2k\pi + \eta,\ 2(k+1)\pi - \eta] \longmapsto \frac{\exp(inx)}{\sqrt{n+x}} \in \mathbb{C}\right.$ converge uniformément. Elle converge donc sur $E = \mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$.

Supposons $x = k\pi$. $\dfrac{\exp(inx)}{\sqrt{n+x}} = \dfrac{(-1)^{nk}}{\sqrt{n+2k\pi}}$.
Si k est impair, nous avons affaire à une série alternée dont le module converge vers 0 en décroissant ; la série converge donc. Si k est pair, la série diverge.
Nous en déduisons que la série de terme général $\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n+x}}$ converge sur $\mathbb{R}_+\backslash 2\pi\mathbb{N}$.
$\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ converge sur $\mathbb{R}_+$.

47. La série $\sum a_n$ est convergente donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \left\| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.
Notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Soient p et q deux entiers naturels ; $p \leqslant q$. Utilisons la relation vue plus haut lors de la transformation d'Abel.

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k}{1+x^k} a_k = \frac{x^p}{1+x^p} R_{p-1} - \frac{x^{q+1}}{1+x^{q+1}} R_q + \sum_{k=p}^{q} \frac{x^k(x-1)}{(1+x^k)(1+x^{k+1})} R_k.$$

Supposons $p-1$ et q au moins égaux à N. Nous avons alors

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} \frac{x^k}{1+x^k} a_k \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=p}^{q} \frac{x^k|x-1|}{(1+x^k)(1+x^{k+1})}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k|x-1|}{(1+x^k)(1+x^{k+1})} &= \left| \sum_{k=p}^{q} \frac{x^k(x-1)}{(1+x^k)(1+x^{k+1})} \right| = \sum_{k=p}^{q} \left(\frac{x^{k+1}}{1+x^{k+1}} - \frac{x^k}{1+x^k} \right) \\ &= \frac{x^{q+1}}{1+x^{q+1}} - \frac{x^p}{1+x^p}.\end{aligned}$$

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k|x-1|}{(1+x^k)(1+x^{k+1})} = \left| \frac{x^{q+1}}{1+x^{q+1}} - \frac{x^p}{1+x^p} \right| \leqslant 2$.

Finalement, $\left\| \displaystyle\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k}{1+x^k} a_k \right\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{4} + 2\dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1+x^k} a_k$ est une suite de Cauchy qui converge puisque E est un espace complet. La série $\sum \left(x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n} a_n \in E\right)$ est donc convergente. En reprenant le calcul précédent, nous en déduisons que pour $n \geqslant N$, pour $x \in \mathbb{R}_+$ nous avons $\left\| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^k} a_k \right\| \leqslant \varepsilon$.

La série converge donc uniformément. Chaque application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n} a_n \in E$ est continue donc l'application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} a_n \in E$ est continue.

48. Nous savons que si une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et décroit alors la série alternée $\sum(-1)^n x_n$ converge. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x_k$. Nous avons[19] $\forall(p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ S_{2p+1} \leqslant S_{2q}$ et $|S - S_n| \leqslant x_{n+1}$.
Si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n est une application définie sur un ensemble D à valeurs réelles et si pour chaque $x \in D$ la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante alors pour chaque $x \in D$ la série $\sum u_n(x)$ converge.
En notant $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k(x)$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k(x)$ nous avons
$\forall(x,\ n) \in D \times \mathbb{N},\ |S(x) - S_n(x)| \leqslant u_{n+1}(x)$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 alors la suite $(S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 et la série $\sum u_n$ est uniformément convergente.

Applications

$n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}.\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos(x)}$.
Pour x fixé, la suite $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{n} + \cos(x)}$ est décroissante et converge vers 0. La série alternée $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est donc convergente. Le reste $R_n(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n+1} - 1}$. La série converge donc uniformément.
$n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}.\ u_n(x) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \in \mathbb{R}$ est décroissante à partir d'un certain rang $N \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$ et converge vers 0. La série alternée $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est donc convergente.
Soit $A > 0$. Soit $N \in \mathbb{N},\ N \geqslant \dfrac{2A}{\pi}$. Pour $x \in [0,\ A]$, Le reste $R_n(x)$ vérifie, pour $n \geqslant N$, $|R_n(x)| \leqslant \sin\left(\dfrac{x}{n+1}\right) \leqslant \sin\left(\dfrac{A}{n+1}\right)$. La série converge donc uniformément.
Il y a donc aussi convergence uniforme sur $[-A,\ A]$.
Lorsqu'une série de fonctions u_n définies sur un ensemble A converge uniformément alors la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 car pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ et pour $x \in A$ $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$;

19. $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -x_{2n+3} + x_{2n+2} \geqslant 0$, $S_{2n+2} - S_{2n} = x_{2n+2} - x_{2n+1} \leqslant 0$.
La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes et sont donc convergentes, de même limite S. _ Nous avons donc $\forall(p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2q}$. Nous en déduisons $|S - S_n| \leqslant x_{n+1}$.

en particulier $|u_{n+1}(x)| = |R_n(x) - R_{n+1}(x)| \leqslant \varepsilon$.
La suite de terme général $(-1)^n \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ car par exemple la suite de terme général $(-1)^n \sin\left(\dfrac{n}{n}\right)$ ne tend pas vers 0.
$\sum u_n$ converge uniformément vers 0 sur tout compact inclus dans $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

49. Utilisons la transformation d'Abel que nous avons vue plus haut. Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in A$, $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$.
Soient p et q deux entiers naturels ; $p \leqslant q$. Soit $x \in A$. En utilisant les relations déjà vues nous obtenons
$$\sum_{n=p}^{q} f_n(x)g_n(x) = g_p(x)F_{p-1}(x) - g_{p+1}(x)F_q(x) + \sum_{n=p}^{q}(g_{n+1}(x) - g_n(x))F_n(x).$$
Supposons que pour $(x,\ n) \in A \times \mathbb{N}$, $g_n(x) \geqslant 0$.
$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} f_n(x)g_n(x)\right| &\leqslant g_p(x)|F_{p-1}(x)| + g_{q+1}(x)|F_q(x)| \\ &\qquad + \sup_{n\geqslant p,\ x\in A} |F_n(x)| \sum_{n=p}^{q}(g_n(x) - g_{n+1}(x)) \\ &= g_p(x)|F_{p-1}(x)| + g_{q+1}(x)|F_q(x)| + \sup_{n\geqslant p,\ x\in A} |F_n(x)|(g_p(x) - g_{q+1}(x)).\end{aligned}$$
La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(x,\ n) \in A \times N$, $n \geqslant N \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M+1}$.
Soit alors $p \geqslant N+1$.
Nous avons pour tout $x \in A$, $\left|\displaystyle\sum_{n=p}^{q} f_n(x)g_n(x)\right| \leqslant 2g_p(x)\dfrac{\varepsilon}{M+1} \leqslant \varepsilon$.
La série de fonctions $\sum f_n g_n$ est donc uniformément convergente.
Si les fonctions g_n ne sont pas positives ; posons pour $x \in A$, $h_n(x) = g_n(x) + M$.
L'hypothèse $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ implique $\forall (n,\ x) \in \mathbb{N} \times A$, $h_n(x) \geqslant 0$.
La série $\sum h_n f_n$ converge uniformément.
$$\sum_{k=0}^{n} f_n g_n = \sum_{k=0}^{n} f_n g_n - M \sum_{k=0}^{n} f_n.$$
La série $\sum g_n f_n$ converge donc uniformément.

50. Posons $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Soient p et q deux entiers naturels non nuls ; $p \leqslant q$.
Utilisons la transformation d'Abel vue plus haut.

$$\sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k a_k = \varepsilon_{q+1} A_q - \varepsilon_p A_{p-1} + \sum_{k=p}^{q} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |A_n| \leqslant A$. Nous obtenons donc

$$\left| \sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) \right| \leqslant (|\varepsilon_{q+1}| + |\varepsilon_p| + \sum_{k=p}^{q} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|) A.$$

La série de terme général $\sum (|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|)$ est supposée convergente donc pour $\alpha > 0$ donné, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple d'entiers $(p,\ q)$ on ait

$$N_1 \leqslant p \leqslant q \Rightarrow \sum_{k=p}^{q} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| \leqslant \frac{\alpha}{3(A+1)}.$$

La suite$(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |\varepsilon_n| \leqslant \frac{\alpha}{3(A+1)}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant \max(N_1,\ N_2)$. Pour $N \leqslant p \leqslant q$ nous avons alors $\left| \sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k a_k \right| \leqslant \alpha$.

La série $\sum \varepsilon_n a_n$ est donc convergente car elle vérifie le critère de Cauchy.

51. (a) $u_n(x) = (-1)^n \exp(-(n+1)x)$ donc $u_n(0) = (-1)^n$. La série de terme général $u_n(0)$ est divergente.
Supposons $x > 0$. La série est une série géométrique de raison $-\exp(-x)$.
Elle converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{1+\exp(x)}$.

(b) Si la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ alors la série de terme général $\lim\limits_{x\to 0^+} u_n(x)$ converge ; ce qui est faux donc la converge sur $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas uniforme[20].
Soit $a > 0$. Pour $x \geqslant a$, $|R_n(x)| \leqslant \exp(-(n+2)a)$. La convergence est donc uniforme sur $[a,\ +\infty[$.

52. Posons $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$.

$u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^2}$.

La série $\sum u_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)} = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x} \text{ donc}$$

20. Nous pouvons aussi calculer le reste, $R_n(x)$, d'ordre n de la série qui est égal à $\dfrac{(-1)^{n+1}\exp(-(n+2)x)}{1+\exp(-x)}$.

$R_n\left(\dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}\exp(-1)}{1+\exp\left(-\frac{1}{n+2}\right)}$. $\sup\limits_{x>0} |R_n(x)| \geqslant \dfrac{\exp(-1)}{2}$.

La convergence n'est donc pas uniforme.

$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1 - \frac{1}{1+(n+1)x}$.

$\lim_{n\to+\infty} U_n(0) = 0 = U(0)$ et pour $x > 0$ $\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 1 = U(x)$.

La série de fonctions continues a pour limite une fonction non continue. La convergence n'est uniforme ni sur $\mathbb{R}_+$ ni sur $\mathbb{R}_+^*$ car dans ce dernier cas nous devrions avoir $1 = \lim_{x\to 0^+} U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lim_{x\to 0^+} u_n(x)) = 0$.

Soit $a > 0$. $|U_n(x) - U(x)| = \frac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}$.

La suite majorante converge vers 0 donc la série converge uniformément sur $[a,\ +\infty[$ pour tout $a > 0$.

53. Soit $a > 0$. Soit $x \in [-a,\ a]$. Soit $n \geqslant a$. Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+x^2}$.

La dérivée de l'application $t \longmapsto \frac{t}{t^2+x^2}$ est égale en t à $\frac{x^2-t^2}{(t^2+x^2)^2}$.

La suite de terme général $u_n(x)$ est donc décroissante pour $n \geqslant a$. Elle converge vers 0 donc la série alternée de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $n \geqslant a$, nous avons $|R_n(x)| \leqslant \frac{n+1}{(n+1)^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}$ où $R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série $\sum u_n(x)$.

La série $\sum u_n$ converge donc uniformément sur $[-a,\ a]$.

Notons pour $x \in \mathbb{R}$, $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Les fonctions u_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ donc la restriction de U à $[-a,\ a]$ est continue. a étant strictement positif quelconque, U est donc[21] continue sur $\mathbb{R}$.

54. (a) Posons, pour $(n,\ x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $u_n(x) = nx\exp(-nx^2)$.

$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n(x) = 0$ donc lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série de terme général $u_n(x)$ est convergente pour tout réel x.

Soit $y \in]0,\ 1[$. Notons $f_n(y) = \sum_{k=0}^{n} y^k = \frac{1-y^{n+1}}{1-y}$.

$f_n'(y) = \sum_{k=0}^{n} ky^{k-1} = \frac{ny^{n+1} - (n+1)y^n + 1}{(1-y)^2}$.

$\sum_{k=0}^{n} ky^k = \frac{ny^{n+2} - (n+1)y^{n+1} + y}{(1-y)^2}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} ky^k = \frac{y}{(1-y)^2}$.

Nous en déduisons[22] pour $x \neq 0$, $S(x) = \frac{x\exp(-x^2)}{(1-\exp(-x^2))^2}$ et $S(0) = 0$.

21. En effet. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $a > 0$ avec $|x_0| < a$. La restriction de U à $[-a,\ a]$ est continue. $[-a,\ a]$ est un voisinage de x_0 donc U est continue en x_0 puis U est continue sur $\mathbb{R}$.

22. En utilisant les résultats concernant les séries entières, nous obtenons directement cette ré-

$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$. S n'est donc pas continue en 0.

(b) Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$; la somme S n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ donc la convergence de la série n'est pas uniforme.

Remarque sans déterminer S nous pouvons vérifier que la convergence de la série n'est pas uniforme.

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| \geqslant u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers 0 donc la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

$u_n'(x) = n(1-2nx^2)\exp(-nx^2)$. Soit $a>0$. Soit $x\in\mathbb{R},\ |x|\geqslant a$.

Pour $n\geqslant \dfrac{a^2}{2}$, $|u_n(x)|\leqslant u_n(a)$. La série converge donc normalement puis uniformément sur $]-\infty,\ -a]\cup[a,\ +\infty[$. La somme de la série définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$.

55. Notons pour $(n,\ x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(n)\,\mathrm{ch}(n+x)}$.

$\mathrm{ch}(n+x)\geqslant \dfrac{\exp(n)\exp(x)}{2}$, $|\,\mathrm{sh}(x)|\leqslant \dfrac{\exp(|x|)}{2}$ donc

$|u_n(x)|\leqslant \dfrac{\exp(|x|-x)\exp(-n)}{\mathrm{ch}(n)} \leqslant \exp(|x|-x)\exp(-n)$.

La série de terme général $u_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout réel x.

Soit $a<0$. Soit $x\in[a,\ +\infty[$. $|u_n(x)|\leqslant \exp(-2a)\exp(-n)$.

La série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,\ +\infty[$. Chaque fonction u_n est continue donc la somme de la série définit une fonction f continue[23] sur $\mathbb{R}$.

u_n est dérivable, $u_n'(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{ch}(x+n))^2}$. u_n est donc strictement croissante et f est strictement croissante.

La série de terme général $u_n'(x)$ est convergente car $u_n'(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\exp(-2(n+x))$.

$0\leqslant u_n'(x)\leqslant 4\exp(-2n)\exp(-2x)$ donc comme précédemment la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,\ +\infty[$ pour $a<0$. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{ch}(n+x))^2}.$$

ponse.

La série entière $\sum y^n$ a pour rayon de convergence 1 donc pour $|y|<1$, $\dfrac{d}{dy}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} y^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1}$ c'est-à-dire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1} = \dfrac{1}{(1-y)^2}$ puis $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ny^n = \dfrac{y}{(1-y)^2}$.

23. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Soit $a<0$, $a<x_0$. $[a,\ +\infty[$ est un voisinage V_a de x_0. La restriction de f à V_a est continue donc f est continue en x_0 puis f est continue sur $\mathbb{R}$.

56. Nous savons que pour $|t| < 1$, $-\ln(1-t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$.

Pour $0 < |t| < 1$, $-\dfrac{\ln(1-t)}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$. La série converge normalement sur $[-a,\ a]$ avec $0 < a < 1$ donc

$\forall t \in]-1,\ 1[,\ -\displaystyle\int_0^t \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1,\ 1]$ donc la somme définit une fonction continue sur $[-1,\ 1]$ et en particulier $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; il vient alors

$-\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La fonction φ définie par $\varphi(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ pour $t \in]0,\ 1[$ et $\varphi(0) = 1$ est continue et $\forall t \in [0,\ 1]$, $\displaystyle\int_0^t \varphi(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$.

En posant pour $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, $t = \exp(-(x^2+y^2))$ nous obtenons

$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,\ y) = -\displaystyle\int_0^{\exp(-(x^2+y^2))} \frac{\ln(1-u)}{u} du.$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = 2x\exp(-(x^2+y^2))\varphi(\exp(-x^2-y^2))$. De même

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = 2y\exp(-(x^2+y^2))\varphi(\exp(-x^2-y^2))$.

f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Nous aurions aussi pu étudier les séries de termes généraux $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,\ y)$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,\ y)$ où $u_n(x,\ y) = -\dfrac{1}{n^2}\exp(-n(x^2+y^2))$.

La série définissant f est clairement normalement convergente ; f est bien évidemment continue.

$\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,\ y) = -\dfrac{2x}{n}\exp(-n(x^2+y^2))$. $x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|\exp(-nx^2) \in \mathbb{R}$ est maximale en $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Nous en déduisons que $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,\ y)\right| \leqslant \frac{2}{n\sqrt{2n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \exp(-ny^2) \leqslant \frac{2}{n\sqrt{2n}}.$$

La série $\displaystyle\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^2$. Nous faisons de même pour $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,\ y)$. f a donc des dérivées partielles continues et est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

57. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\exp(-xn^2) = 0$ donc pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $\exp(-xn^2)$ est convergente.
Soit $a > 0$ fixé. Pour $x \in [a,\ +\infty[$ nous avons $\exp(-xn^2)\leqslant\exp(-an^2)$.
La série $\sum(x \in [a,\ +\infty[\longmapsto \exp(-xn^2) \in \mathbb{R}$ est donc normalement convergente.
La convergence étant uniforme, $x \in [a,\ +\infty[\longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\exp(-xn^2) \in \mathbb{R}$ est donc continue. Posons pour $x \in \mathbb{R}_+^* =,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\exp(-xn^2)$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in]0,\ x_0[$. $[a,\ +\infty[$ est un voisinage de x_0 ; la restriction de f à ce voisinage est continue donc f est continue en x_0 puis f est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ est continue donc f_α définie par $f_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^\alpha\exp(-xn^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$t \longmapsto \exp(-xt^2)$ est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons
$\exp(-x(n+1)^2)\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\exp(-xt^2)dt\leqslant\exp(-xn^2)$ puis
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\exp(-nx^2)\leqslant\int_0^{+\infty}\exp(-xt^2)dt\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\exp(-nx^2)$.
Nous obtenons donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-xt^2)dt\leqslant f(x)\leqslant 1+\int_0^{+\infty}\exp(-xt^2)dt$.
À l'aide du changement de variable $t \longmapsto u\sqrt{x}$ nous obtenons
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du\leqslant\sqrt{x}f(x)\leqslant\sqrt{x}+\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du$ puis
$\displaystyle x^{\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du\leqslant f_\alpha(x)\leqslant x^\alpha + x^{\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du$.
que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; α étant strictement positif, $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0$ donc
- si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^+} f_\alpha(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
- si [24] $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^+} f_\alpha(x) = 0$,
- si $\alpha < \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^+} f_\alpha(x) = +\infty$.

24. Lorsque $\alpha > \dfrac{1}{2}$, en étudiant les variations de $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^\alpha\exp(-xn^2) \in \mathbb{R}$ nous en déduisons que $x^\alpha\exp(-xn^2)\leqslant\alpha^\alpha\exp(-\alpha)\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$.
La série définissant f_α est alors normalement convergente donc est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f_\alpha(x) = f_\alpha(0) = 0$.

58. Un des dénominateurs s'annule pour les valeurs $x = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Pour éviter cela il suffit de supposer $x > 1$.
$\dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{nx}$.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{nx} = -\dfrac{1}{nx(nx+(-1)^n)}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est convergente pour tout $x > 1$ car $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2n^2}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{nx}$ est une série alternée convergente car la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. $f(x)$ est donc bien défini pour $x \in]1,\ +\infty[$.
$f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} - \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nx(nx+(-1)^n)} + \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
Pour $x \in [1,\ +\infty[$, $nx(nx+(-1)^n) \geqslant n(n+(-1)^n)$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(x \in [1,\ +\infty[\longmapsto \frac{1}{nx(nx+(-1)^n)} \in \mathbb{R}\right)$ est normalement convergente ; sa somme définit donc une application continue sur $[1,\ +\infty[$. f est donc continue sur $]1,\ +\infty[$.
Pour $n\geqslant 2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nx(nx+(-1)^n)} = 0$. Nous en déduisons[25] $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Reprenant l'expression de $f(x)$ vue plus haut nous obtenons $f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} -\dfrac{1}{x-1}$ puis. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

59. Soit f l'application définie sur $[-1,\ 1]$ par $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x-2} < 0$.
f est strictement décroissante et $f([-1,\ 1]) = \left[-\ln(2),\ \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right] \subset ([-1,\ 1])$.
$f(0) = 0$ donc $f(x)$ a le signe de $-x$.

$$|f(x)| - |x| = \begin{cases} -f(x) - x & \text{lorsque} \quad x > 0 \\ \\ f(x) + x & \text{lorsque} \quad x\leqslant 0 \end{cases}$$

25. Supposons $x\geqslant 2$. $((n+1)x + (-1)^{n+1}) - (nx + (-1)^n) = x - 2(-1)^n \geqslant 0$.
La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ converge car le module du terme général tend vers 0 en décroissant.
Nous savons qu'alors la somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives.
Nous avons donc $1 - \dfrac{1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant 1$. Il est alors clair que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Pour $x \in [-1,\ 1]$, $f'(x)+1 = \dfrac{x-1}{x-2} \geqslant 0$. $x \in [-1,\ 1] \longmapsto f(x)+x \in \mathbb{R}$ est donc strictement croissante ; $f(0)=0$ donc $f(x)+x$ a sur $[-1,\ 1]$ le signe de x puis $|f(x)|-|x| \leqslant 0$.
Soit alors, pour $x \in [-1,\ 1]$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0(x)=x$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$.
$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| \leqslant 0$.
La suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 donc convergente de limite $l \geqslant 0$. Il est immédiat que nous avons $u_n(x) = (-1)^n |u_n(x)| \operatorname{sgn}(x)$. Les suites $(u_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc respectivement vers l et $-l$. Nous en déduisons $l = f(-l)$ et $-l = f(l)$. En particulier $f(l)+l=0$ donc $l=0$ car $x \longmapsto f(x)+x$ est strictement croissante. Nous pouvons utiliser le résultat concernant la convergence des séries alternées dont le terme général converge vers 0 et dont la valeur absolue est décroissante pour en conclure que la série $\sum u_n(x)$ est convergente.

60. Considérons, pour $x \in]0,\ 1[$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (x^n \ln(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
$u_n(x) \leqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^n \ln(t)dt$.
$$\int_x^1 t^n \ln(t)dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\ln(t)\right]_x^1 - \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n dt$$
$$= -\frac{1}{n+1} x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}(1-x^{n+1}).$$
Nous en déduisons $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}$.
En utilisant le théorème de convergence dominée nous en déduisons :
$t \in]0,\ 1[\longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1-x} \in \mathbb{R}$ est intégrable [26] et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

61. Soit pour $(x,\ y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (x^y \exp(-(n+1)x))_{n\in\mathbb{N}}$.
$0 < \exp(-x) < 1$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = x^y \frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)} = \frac{x^y}{\exp(x)-1}$.
$\forall (x,\ y,\ n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $u_n(x) > 0$. $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto u_n(x) \in \mathbb{R}$ est continue.
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^y \exp(-(n+1)x) = 0$, $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^y$. u_n est donc intégrable lorsque $y > -1$.

26. $f\ :\ t \in]0,\ 1[\longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1-x} \in \mathbb{R}$ est continue. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$ donc f est prolongeable par continuité sur $]0,\ 1]$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\frac{\ln(x)}{1-x} = 0$ donc f est intégrable.

En utilisant le changement de variable $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t = (n+1)x \in \mathbb{R}_+^*$ nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)^{y+1}} \int_0^{+\infty} t^y \exp(-t)dt$.

La série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)^{y+1}}$ est convergente pour $y > 0$ donc nous pouvons appliquer le théorème d'échange séries intégrales pour en déduire que $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{x^y}{\exp(x)-1} \in \mathbb{R}$ est intégrable[27] et pour $y \in]0,\ +\infty[$ nous avons

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^y}{\exp(x)-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{y+1}} \int_0^{+\infty} t^y \exp(-t)dt = \Gamma(y+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{y+1}}.$$

62. (a) Pour $x = 0$ la série harmonique diverge. f n'est pas définie en 0.
Soit $x > 0$. $\dfrac{1}{n+n^2x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^2}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x}$ converge donc.
Soit $a > 0$. Pour $x \geqslant a$ nous avons $0 \leqslant \dfrac{1}{n+n^2x} \leqslant \dfrac{1}{n+n^2a}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(x \in [a,\ +\infty[\longmapsto \frac{1}{n+n^2x} \in \mathbb{R} \right)$ converge normalement donc uniformément .
Les fonctions f_n étant toutes continues sur $\mathbb{R}^*$, comme nous l'avons déjà vu plus haut la somme de la série définit une fonction, f, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) $t \in [1,\ +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t+t^2x} \in \mathbb{R}$ est continue, décroissante positive, intégrable donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x}$.
$\dfrac{1}{t+t^2x} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$. Une primitive de $t \in [1,\ +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t+t^2x} \in \mathbb{R}$ est $t \in [1,\ +\infty[\longmapsto \ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right) \in \mathbb{R}$.
Nous avons donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x} = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.
L'application $g_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{x}{n+n^2x} \in \mathbb{R}$ est croissante, nulle en 0 de limite égale à $\dfrac{1}{n^2}$ en $+\infty$.
Nous avons donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \dfrac{x}{n+n^2x} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

27. Supposons $y > 0$. $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{x^y}{\exp(x)-1} \in \mathbb{R}$ est continue et est prolongeable par continuité en 0.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{x^y}{\exp(x)-1} = 0$ donc f est intégrable

La série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement donc uniformément.

Nous en déduisons $\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n+n^2x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n+n^2x}\right)\right)$ c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=\frac{\pi^2}{6}$. Nous avons donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6x}$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Il est clair que $t\in[x,\ +\infty[\longmapsto\frac{1}{n+n^2t^2}\in\mathbb{R}$ est intégrable.

$\int_x^{+\infty}\frac{dt}{n+n^2t^2}=\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{x\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{n\sqrt{n}}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right)$.

Nous avons donc $\int_x^{+\infty}\frac{dt}{n+n^2t^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{xn^2}$.

La série de terme général $\int_x^{+\infty}\frac{dt}{n+n^2t^2}$ est convergente donc f est intégrable sur $[x,\ +\infty[$ et $g(x)=\int_x^{+\infty}f(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right)$.

$\frac{1}{n\sqrt{n}}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right)\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{\pi}{2}$.

La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\frac{1}{n\sqrt{n}}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right)\in\mathbb{R}\right)$ converge uniformément. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{n\sqrt{n}}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{\pi}{2}$. g possède donc une limite en 0 ; cette limite est égale à $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

f est donc intégrable sur $]0,\ +\infty[$ car f est de signe fixe et l'intégrale possède une limite en 0. Nous savions déjà que f était intégrable sur $]0,\ +\infty[$ car $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}-2\ln(|x|)$.

63. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{n^2}\operatorname{atan}(nx)\right|\leqslant\frac{\pi}{2n^2}$.

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\left(x\in\mathbb{R}\longmapsto\frac{1}{n^2}\operatorname{atan}(nx)\in\mathbb{R}\right)$ est donc normalement convergente.

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{atan}(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$x\in\mathbb{R}\longmapsto\frac{1}{n^2}\operatorname{atan}(nx)=u_n(x)\in\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. $u_n'(x)=\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

Soit $a>0$. Pour $|x|\geqslant a$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $|u_n'(x)|=u_n'(x)\leqslant\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$.

sur $I_a=]-\infty,\ -a]\cup[a,\ +\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n'$ converge uniformément car normalement. La restriction de f à I_a est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0\in\mathbb{R}^*$. Soit

$a > 0$, $|x_0| < a$. I_a est un voisinage de x_0 donc f est dérivable en x_0 et est continue en x_0. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x non nul nous avons $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

$t \in [1,\ +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)} \in \mathbb{R}$ est décroissante intégrable.

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ puis

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)}$.

$\dfrac{1}{t(1+t^2x^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{tx^2}{1+t^2x^2}$.

$\displaystyle\int_1^{A} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2x^2)\right]_1^A = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{A^2(1+x^2)}{1+A^2x^2}\right)$.

Nous en déduisons $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$ puis en utilisant l'inégalité écrite précédemment $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(|x|)$.

64. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$. $|u_n(x)| \leqslant |x|^n$.

Pour $|x| < 1$ la série $\sum x^n$ est absolument convergente donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ est bien définie sur $]-1,\ 1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$. $u_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)$.

$|u_n'(x)| \leqslant |x|^{n-1} + |x|^n$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'(x)$ est absolument convergente et pour $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx)$.

Soit $a \in]0,\ 1[$. Soit $x \in [-a,\ a]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n'(x)| \leqslant a^{n-1} + a^n$. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ est donc uniforme sur $[-a,\ a]$.

Soit $x_0 \in]-1,\ 1[$. Soit $a \in]0,\ |x_0|[$. $[-a,\ a]$ est un voisinage de x_0. La restriction de f à ce voisinage est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in [-a,\ a]$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

f est donc dérivable en x_0 et f' est continue en x_0. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in]-1,\ 1[$ $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

Nous obtenons donc $\forall x \in]-1,\ 1[,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx)$.

Pour $x \in]-1,\ 1[, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \exp(inx) = \frac{x\exp(ix)}{1-x\exp(ix)} = \frac{x\exp(ix)(1-x\exp(-ix))}{|1-x\exp(ix)|^2}$.

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \exp(inx) = \frac{x\exp(ix)-x^2}{x^2-2x\cos(x)+1}$ puis

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) = \frac{\sin(x)}{x^2-2x\cos(x)+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\cos(nx) = \frac{x\cos(x)-x^2}{x^2-2x\cos(x)+1}$

donc $f'(x) = \dfrac{\sin(x)+x\cos(x)-x^2}{x^2-2x\cos(x)+1}$.

Soit g la fonction définie sur $]-1,\ 1[$ par $g(x) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos(x)}\right)$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$g'(x) = \dfrac{(\sin(x)+x\cos(x))(1-x\cos(x)) - x\sin(x)(-\cos(x)+x\sin(x))}{1-2x\cos(x)+x^2}$.

En simplifiant nous obtenons $g'(x) = f'(x)$. $f(0) = 0,\ g(0) = 0$ donc $f = g$ et

$\forall x \in]-1,\ 1[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\sin(nx)}{n} = \operatorname{atan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos(x)}\right)$.

Soit $x \in [-1,\ 1]$. $(1-x\cos(x))^2 + x^2\sin(x)^2$ ne s'annule pas car il faudrait $x\sin(x) = 0$ et $x\cos(x) = 1$.

Il existe donc $M > 0$ tel[28] que $\forall x \in [-1,\ 1],\ x^2 - 2x\cos(x) + 1 \geqslant M$.

Posons pour $x \in [-1,\ 1]$, $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k \sin(kx)$

$$A_n(x) = \Im m\left(x\exp(ix)\frac{1-x^n\exp(inx)}{1-x\exp(ix)}\right) = \frac{x\sin(x) - x^{n+1}\sin((n+1)x) + x^{n+2}\sin(nx)}{x^2-2x\cos(x)+1}.$$

Pour $x \in [-1,\ 1]$ nous avons donc $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{3}{M}$.

Utilisons à nouveau la transformation d'Abel vue plus haut. Nous obtenons :

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k\sin(kx)}{k} = \frac{1}{q+1}A_q(x) - \frac{1}{p}A_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{q}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)A_k(x).$$

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \frac{3}{M}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{p} + \sum_{k=p}^{q}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{6}{Mp}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*,\ N \geqslant \dfrac{6}{M\varepsilon}$. Nous avons pour tout couple $(p,\ q)$ d'entiers

28. En étudiant les variations de $x \longmapsto x^2 - 2x\cos(x) + 1$ nous en déduisons que M est voisin de 0,36463314.

naturels non nuls, $N \leqslant p \leqslant q \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k \sin(kx)}{k}\right| \leqslant \varepsilon$.

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \left(x \in [-1,\ 1] \longmapsto \frac{x^n \sin(nx)}{n} \in \mathbb{R}\right)$ est donc uniformément convergente sur $[-1,\ 1]$ et sa somme est une fonction continue sur cet intervalle.

Il vient donc pour $x \in [-1,\ 1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n} = \operatorname{atan}\left(\frac{x \sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$.

En particulier [29] $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin(1)}{1-\cos(1)}\right) = \frac{\pi - 1}{2}$ et

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n} = -\operatorname{atan}\left(\frac{\sin(1)}{1+\cos(1)}\right) = -\frac{1}{2}$.

En soustrayant les égalités précédentes nous obtenons $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.

65. La série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge pour $x > 1$.

Soit $a > 1$. Pour $x \in I_a = [a,\ +\infty[$, $n^x \geqslant n^a$. La série de fonctions continues $\sum_{n \geqslant 1} \left(x \in I_a \longmapsto \frac{1}{n^x} \in \mathbb{R}\right)$ converge normalement donc uniformément. La somme est donc continue.

Soit $x_0 > 1$. Soit $a \in]1,\ x_0[$. La restriction de $f : x \in]1,\ +\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \in \mathbb{R}$ à I_a, qui est un voisinage de x_0 est continue donc f est continue en x_0. f est donc continue.

La série alternée $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge car la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant lorsque $x > 0$.

Pour $x \leqslant 0$ le terme général ne converge pas vers 0 donc cette série converge si et seulement si $x > 0$.

Nous avons de plus pour $x > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.

Soit $a > 0$. pour $x \geqslant a$ nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$. La série

29. En utilisant les séries de Fourier, nous prouvons facilement que pour $x \in]-\pi,\ \pi[$, $-\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$ et

pour $x \in]0,\ \pi[$, $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$ donc $-\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n)$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(n)$.

de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 1}\left(x\in[a,\ +\infty[\longmapsto \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\in\mathbb{R}\right)$ converge normalement donc uniformément. La somme est donc continue. Nous montrons alors comme précédemment que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue.
Soit $x>1$. $t\in[1,\ +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t^x}\in\mathbb{R}$ est décroissante intégrable. Nous avons donc les inégalités $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}\leqslant f(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}$ c'est-à-dire
$\dfrac{1}{x-1}\leqslant f(x)\leqslant 1+\dfrac{1}{x-1}$. Nous en déduisons $f(x)\underset{x\to 1^+}{\sim}\dfrac{1}{x-1}$ donc évidemment $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.
Supposons $x>1$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^x}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(2n+1)^x}$.
Chacune des sommes est convergente donc $g(x)=-\dfrac{1}{2^x}f(x)+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^x}$.
De même $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^x}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(2n+1)^x}$ nous obtenons alors
$f(x)=\dfrac{1}{2^x}f(x)+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^x}$ et nous en déduisons $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2^{x-1}}f(x)$
puis $g(x)=\left(1-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)f(x)$.
$f(x)=\dfrac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1}g(x)$. Cette relation [30] permet de prolonger f sur $]0,\ 1[$.

66. En utilisant le critère de d'Alembert nous en déduisons que la série $\sum x^{n^2}$ converge si et seulement si $|x|<1$. En effet
pour $|x|\geqslant 1$ le terme général ne tend pas vers 0.
Pour $|x|<1$, $\dfrac{|x|^{(n+1)^2}}{|x|^{n^2}}=|x|^{2n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{(n+1)^2}}{|x|^{n^2}}=0$ et la série converge absolument.
Soit $x\in]0,\ 1[$. $g\ :\ t\in\mathbb{R}_+\longmapsto x^{t^2}\in\mathbb{R}$ est continue décroissante. $\lim_{t\to+\infty}t^2g(t)=0$ donc g est intégrable.
Pour $t\in[n,\ n+1]$, $g(n+1)\leqslant g(t)\leqslant g(n)$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)dt\leqslant f(x)\leqslant g(0)+\int_0^{+\infty}g(t)dt$.
Soit le changement de variable $t\in\mathbb{R}_+\longmapsto u=t\sqrt{-\ln(x)}\in\mathbb{R}_+$.

30. Lorsque x tend vers 1 nous avons $2^{1-x}=\exp((1-x)\ln(2))=1-(x-1)\ln(2)+o(x-1)$ puis $1-\dfrac{1}{2^{x-1}}=(x-1)\ln(2)+o(x-1)$ c'est-à-dire $math1-\frac{1}{2^{x-1}}\underset{x\to 1}{\sim}(x-1)\ln(2)$.
Nous en déduisons $g(x)\underset{x\to 1}{\sim}\ln(2)$. g est continue en 1 donc $g(1)=\ln(2)$. Nous retrouvons là un résultat connu ; si nous l'utilisions nous obtiendrions un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

Nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}}$.

Nous en déduisons $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{-\ln(x)}}$.

67. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,\mathrm{sgn}(x)\exp(-n|x|)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} = 0$ donc la série de terme général $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ est absolument convergente pour $x \neq 0$.

Soit $x > 0$. Posons, pour $t\geqslant 1$, $g(t) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(tx)}$. g est continue décroissante intégrable donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt \leqslant f(x) \leqslant g(1) + \int_1^{+\infty} g(t)dt$.

En utilisant $t \in [1,\ +\infty[\longmapsto u = \exp(tx) \in [\exp(x),\ +\infty[$ nous obtenons $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{x}\int_{\exp(x)}^{+\infty}\frac{2}{u^2-1}du$.

$\dfrac{2}{u^2-1} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt = -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1}\right)$.

Lorsque x tend vers 0 à droite nous avons $\dfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1} = x\dfrac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$

$\dfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1} = \dfrac{x}{2}(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+o(x^2))(1-x/2+o(x^2)) = \dfrac{x}{2}(1-\dfrac{x^2}{12}+o(x^2))$.

$\ln\left(\dfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1}\right) = \ln(x) - \ln(2) - \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$.

Lorsque x tend vers 0 à droite $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6} + o(x^2)$.

Lorsque x tend vers 0 à droite on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt = -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(2)}{x} + \frac{x}{12} + o(x)$.

$-\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(2)}{x} + \dfrac{x}{12} + o(x) \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1+\ln(2)}{x} - \dfrac{x}{12} + o(x)$.

Nous en déduisons $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Soit, pour $(x,\ n] \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, $h(x) = \dfrac{\exp(x)}{\mathrm{sh}(nx)}$.

h est de classe $\mathcal{C}^1$, $h'(x) = \exp(x)\dfrac{\mathrm{sh}(nx) - n\,\mathrm{ch}(nx)}{(\mathrm{sh}(nx))^2}$.

$h'(x)$ a le signe de $\mathrm{th}(nx) - n \leqslant 0$. h est décroissante. Pour $x\geqslant 1$ et $n\geqslant 1$ nous avons $0 \leqslant \dfrac{\exp(x)}{\mathrm{sh}(nx)} \leqslant \dfrac{e}{\mathrm{sh}(n)}$. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(x\geqslant 1 \longmapsto \frac{\exp(x)}{\mathrm{sh}(nx)} \in \mathbb{R}\right)$ converge uniformément.

Pour $n\geqslant 2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{\mathrm{sh}(nx)} = 0$. Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\exp(x)}{\mathrm{sh}(nx)} = 0$ puis

$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)f(x) = 2$. Nous avons donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\exp(-x)$.

68. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$. $(-1)^n \dfrac{\exp(-nx)}{n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n \exp(-nx)}{n} - \dfrac{\exp(-nx)}{n(n+(-1)^n)}$.

Notons $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{\exp(-nx)}{n+(-1)^n}$.

$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2}$ converge vers 0 si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$.

La série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^n \exp(-nx)}{n}$ converge car la valeur absolue du terme général décroit et converge vers 0. Nous avons de plus

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \exp(-kx)}{k}\right| \leqslant \frac{\exp(-(n+1)x)}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

La série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{(-1)^n \exp(-nx)}{n} \in \mathbb{R}\right)$ converge uniformément et a pour somme une fonction continue.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n\geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{\exp(-nx)}{n(n+(-1)^n)} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$. La série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{\exp(-nx)}{n(n+(-1)^n)} \in \mathbb{R}\right)$ converge normalement donc uniformément et a pour somme une fonction continue.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{\exp(-nx)}{n+(-1)^n}\right)$ est continue.

69. Soit, pour $(x,\ n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2\pi^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est donc convergente.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Soit $A > 0$. Pour $x \in I_A = [-A,\ A]$ nous avons $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{A^2}{n^2}$. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc uniforme sur I_A. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $A > 0$, $A > |x_0|$. I_A est un voisinage de x_0. La restriction de f à I_A est continue donc f est continue en x_0 puis f est continue sur $\mathbb{R}$.

L'application g définie sur $[1,\ +\infty[$ par $g(t) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{t^2\pi^2}\right)$ est décroissante continue intégrable donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt \leqslant f(x) \leqslant g(1) + \int_1^{+\infty} g(t)dt$.

En intégrant par parties nous obtenons

$$\int_1^{+\infty} g(t)dt = -\ln\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) + 2x^2 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2\pi^2}.$$

$2x^2\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{x^2+t^2\pi^2}=\frac{2x}{\pi}\int_{\frac{\pi}{x}}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2x}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty}g(t)dt=-\ln\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\frac{2x}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$

Nous en déduisons, pour $x>0$,

$-\ln\left(1+\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)+\dfrac{2x}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{2x}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right).$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\operatorname{atan}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=\dfrac{\pi}{x}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc

$\dfrac{2x}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)=x-2+o\left(\dfrac{1}{x}\right).$

Lorsque x tend vers $+\infty$ $\ln(x)$ est négligeable devant x donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x.$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $0\leqslant\dfrac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2\pi^2}.$

Posons, pour $x\neq 0$, $v_n(x)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}{x^2}$ et $v_n(0)=\dfrac{1}{n^2\pi^2}.$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}v_n$ est une série normalement convergente de fonctions continues donc sa somme définit une fonction continue h sur $\mathbb{R}$.

$h(0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}$ donc $h(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{6}$ puis [31] $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x^2}{6}.$

31. Soit φ la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que sa restriction à $[-\pi,\ \pi]$ soit définie par $\varphi(x)=\operatorname{ch}(\alpha x)$ où α est un réel non nul. φ est continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. φ est développable en série de Fourier.

$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos(nx)dx=\frac{2(-1)^n\alpha\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}$ donc

pour $x\in[-\pi,\ \pi]$, $\operatorname{ch}(\alpha x)=\dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n\alpha\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}\cos(nx).$

En particulier $\operatorname{ch}(\alpha\pi)=\dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}.$

Pour $t\in\mathbb{R}^*$ nous avons donc $\dfrac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)}=\dfrac{1}{t}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2+n^2\pi^2}.$

$\displaystyle\int_0^x\frac{2t}{t^2+n^2\pi^2}dt=\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$

Nous en déduisons (ce que nous savions déjà) l'existence de $\displaystyle\int_0^x\left(\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)}-1\right)dt$ et

$\displaystyle\int_0^x\left(\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)}-1\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$

$\displaystyle\int_0^x\left(\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)}-1\right)dt=\ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)$ donc $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\ln\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=f(x).$

70. (a) $\forall (x,\ n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*,\ \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)\right|^2 \leqslant \left|\frac{\pi x}{2n}\right|^2.$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [n_0,\ n_0+1[$ nous avons $\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)\right|^2 \leqslant \frac{\pi^2(n_0+1)^2}{n}$.

$\sum\limits_{n \geqslant n_0+1} \left(x \in [n_0,\ n_0+1] \longmapsto \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)\right)^2 \in \mathbb{R}\right)$ est une série de fonctions continues convergeant normalement donc uniformément. La somme de la série définit donc une fonction continue.

$\sum\limits_{n>x} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)\right)^2$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sum\limits_{n>x} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)\right)^2$ est continue par morceaux.

(b) En utilisant le résultat précédent nous en déduisons

$$\lim_{x \to n_0^+} f(x) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi n_0}{2n}\right)\right)^2 \text{ et } \lim_{x \to (n_0+1)^-} f(x) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi(n_0+1)}{2n}\right)\right)^2.$$

Le saut de la fonction f en $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est donc égal à

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi n_0}{2n}\right)\right)^2 - \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi n_0}{2n}\right)\right)^2 = -\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = -1.$$

(c) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [n_0,\ n_0+1[$.

L'application g définie sur $[n_0+1,\ +\infty[$ par $g(t) = \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2t}\right)\right)^2$ est continue décroissante, car $0 \leqslant \frac{\pi x}{2t} \leqslant \frac{\pi(n_0+1)}{2(n_0+1)} = \frac{\pi}{2}$; $g(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^2 x^2}{4t^2}$ donc g est intégrable.

Nous avons pour $n \geqslant n_0+1$, $g(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant g(n)$ donc

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2t}\right)\right)^2 dt \leqslant f(x) \leqslant \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2(n_0+1)}\right)\right)^2 + \int_{n_0+1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2t}\right)\right)^2 dt.$$

En utilisant $t \in [n_0+1,\ +\infty[\longmapsto u = \frac{\pi x}{2t} \in \left]0,\ \frac{\pi x}{2(n_0+1)}\right]$ nous obtenons $\int_{n_0+1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2t}\right)\right)^2 dt = \frac{\pi x}{2} \int_0^{\frac{\pi x}{2(1+E(x))}} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du.$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi x}{2(1+E(x))}} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2(E(x)+1)}\right)\right)^2 = 1.$$

Nous en déduisons $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du.$

Il est alors clair que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{6}$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

71. (a) La série de terme général $(-1)^n \exp(-xa_n)$ est une série alternée convergente car la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant dès que $x > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante strictement positive de limite infinie. Nous savons alors que le reste d'ordre n vérifie la relation

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-xa_k)\right| \leqslant \exp(-xa_{n+1}).$$

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \exp(-xa_n)$ est bien défini pour $x > 0$.

Soit $A > 0$. Pour $x \geqslant A$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-xa_k)\right| \leqslant \exp(-Aa_{n+1})$.

La série $\sum (x \in [A,\ +\infty[\longmapsto (-1)^n \exp(-xa_n) \in \mathbb{R})$, de fonctions continues, est uniformément convergente et a pour somme une fonction continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $A \in]0,\ x_0[$. $[A,\ +\infty[$ est un voisinage de x_0. La restriction de f à ce voisinage est continue donc f est continue en x_0. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chaque fonction $x \in [0,\ +\infty[\longmapsto (-1)^n \exp(-xa_n) \in \mathbb{R}$ est continue, intégrable. $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^n \exp(-xa_n)dx = \frac{1}{a_n}$.

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \exp(-xa_k)dx\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a_k}.$$

La série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^n}{a_n}$ est convergente car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement positive) et a pour limite $+\infty$.

Pour $x > 0$,

$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \exp(-xa_k)dx\right)\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\exp(-xa_{n+1})dx = \frac{1}{a_{n+1}}.$$

En appelant $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \exp(-xa_k)$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(f(t) - f_n(t))dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} -f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Nous avons donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.

(b) Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n+1$.

Nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \exp(-x(n+1))\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\exp(x)+1} = \ln(2)$.

Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2n+1$.

Nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \exp(-x(2n+1))\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{2\operatorname{ch}(x)}dx = \operatorname{atan}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}dx = \operatorname{atan}(1) = \frac{\pi}{2}.$

72. L'application $t \in]0,\ 1[\longmapsto f(t) = \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} \in \mathbb{R}$ est continue.

$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{(t-1)\ln(1-t)}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = 0$. f est prolongeable par continuité en 1.

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -1$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+}\sqrt{t}f(t) = 0$. f est intégrable.

Pour[32] $t \in]-1,\ 1[$ nous avons $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$.

Soit $0 < a \leqslant 1$. En intégrant par parties nous avons

$$\begin{aligned}\int_a^1 \ln(t)\frac{t^n}{n+1}dt &= \left[\ln(t)\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^n}{(n+1)^2}dt\\ &= \left[\ln(t)\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_a^1 - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^3}\right]_a^1.\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0 nous obtenons $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\frac{t^n}{n+1}dt = -\frac{1}{(n+1)^3}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)^3}$ est convergente donc

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3}.$

73. Pour $x \geqslant 0$ fixé, la suite de terme général $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est décroissante, de limite nulle.
la série alternée de terme général $(-1)^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est donc convergente.

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est bien défini.

$$\begin{aligned}2f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\\ &= \ln(1+x) + f(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n+x}\right).\end{aligned}$$

32. En fait, en utilisant la convergence des séries alternées, il est simple de vérifier que l'égalité est vraie aussi pour $t = -1$.

La suite de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n+x}\right)$ est décroissante de limite nulle. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n+x}\right)$ converge en tant que série alternée donc $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n+x}\right)\right|\leqslant\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)\leqslant\ln(2)$.

Nous en déduisons $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\ln(x)$.

74. $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\leqslant\int_1^n\frac{dt}{t}+1$ car $t\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\dfrac{1}{t}\in\mathbb{R}_+^*$ est décroissante continue. Nous en déduisons $0\leqslant\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant\gamma_n\leqslant 1$.

$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\dfrac{1}{n+1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Nous savons[33] que $\forall x\in]-1,\ +\infty[,\ \ln(1+x)\leqslant x$; nous en déduisons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\leqslant-\dfrac{1}{n+0}$ puis $\gamma_{n+1}-\gamma_n\leqslant 0$. La suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ; étant minorée par 0 elle est convergente de limite $\gamma\geqslant 0$.

Autre méthode. $\gamma_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)+\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $\dfrac{1}{n}-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right)$ est donc convergente et $\gamma=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

La fonction ζ est définie sur $]1,\ +\infty[$. Soit $s>0$. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{s+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{s+1}}$ donc $\displaystyle\zeta(1+s)-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{s+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^{s+1}}-\frac{1}{t^{s+1}}\right)dt\right)$.

Posons $u_n(s)=\displaystyle\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^{s+1}}-\frac{1}{t^{s+1}}\right)dt$.

Soit s fixé, $s\geqslant 1$. Posons pour $t\geqslant 1$, $f(t)=\dfrac{1}{t^{s+1}}-\dfrac{1}{t}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f'(t)=\dfrac{t^s-(s+1)}{t^{s+2}}$.

Supposons $t\geqslant 3$. $\ln(t)>1$ donc $s\ln(t)>s$; $\ln(1+s)\leqslant s$ donc $s\ln(t)>\ln(1+s)$ c'est-à-dire $t^s-(s+1)>0$. f est donc strictement croissante sur $[3,\ +\infty[$.

Nous en déduisons, pour $n\geqslant 3$, $\dfrac{1}{n^{s+1}}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{(n+1)^{s+1}}-\dfrac{1}{n+1}$ soit encore

33. car ln est concave.

$$0\leqslant\frac{1}{n^{s+1}}-\frac{1}{(n+1)^{s+1}}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ est donc normalement convergente sur $I=[1,\ +\infty[$. Elle définit une fonction continue sur I et en particulier

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{t}\right)dt\right)\text{ c'est-à-dire}$$

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\gamma.$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{s+1}}=\frac{1}{s}\text{ donc }\lim_{s\to 0^+}\left(\zeta(s+1)-\frac{1}{s}\right)=\gamma.$$

75. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-t)t^n dt=n!$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\exp(-t)\left|\frac{a_n}{n!}t^nx^n\right|\right)dt=|a_nx^n|.$

La série de terme général $|a_nx^n|$ étant convergente nous pouvons appliquer le théorème d'échange “séries intégrales” et conclure :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\int_0^{+\infty}\left(\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}t^nx^ndt\right).$$

76. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(m+n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$. Soit alors $\alpha>1$. Posons, pour $m\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle S_m=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)^\alpha}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$

Pour $t\in[k,\ k+1]$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\frac{1}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}$ donc $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_p^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ soit encore $\displaystyle\int_{m+1}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_m^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}.$

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}}\leqslant S_m\leqslant\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(m)^{\alpha-1}}\text{ puis }S_m\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

$\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}^*}S_m$ converge si et seulement si $\alpha-1>1$ d'où le résultat demandé.

Nous pouvons effectuer une autre démonstration de ce résultat.

Supposons $\alpha>2$. $(m+n)^2\geqslant 2mn$. Pour $(m,\ n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\displaystyle\frac{1}{(m+n)^\alpha}\leqslant\frac{1}{(2mn)^{\frac{\alpha}{2}}}.$

Avec les notations précédentes nous obtenons $\displaystyle S_m\leqslant\frac{1}{(2m)^{\frac{\alpha}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{K}{m^{\frac{\alpha}{2}}}.$

$\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}^*}S_m$ est convergente.

Supposons $\alpha\leqslant 2$. Soit $N\in\mathbb{N},\ N\geqslant m\geqslant 1$.

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\geqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\geqslant\frac{m}{(2m)^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

Nous en déduisons[34] $S_m \geqslant \dfrac{1}{2^\alpha}\dfrac{1}{m^{\alpha-1}}$. S_m est alors le terme général d'une série divergente ; d'où à nouveau le résultat demandé.

77. (a) Si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-xn^\alpha\right) = +\infty$; la série $\sum f_n(x)$ est alors divergente.

$f_n(0) = 1$ donc la série $\sum f_n(0)$ est divergente.

Supposons $x > 0$. L'application $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \exp(-xt^\alpha) \in \mathbb{R}$ est continue, décroissante. $\ln(t^2 \exp(-xt^\alpha) = t^\alpha \left(\dfrac{2}{\alpha}\dfrac{\ln(t^\alpha)}{t^\alpha} - x\right)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t^2 \exp(-xt^\alpha) = -\infty$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \exp(-xt^\alpha) = 0$.

L'application $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \exp(-xt^\alpha) \in \mathbb{R}$ est intégrable. Nous obtenons donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leqslant 1 + \int_0^n \exp(-xt^\alpha)dt \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \exp(-xt^\alpha)dt.$$

La série à termes positifs $\sum f_n(x)$ est donc convergente. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour $x \geqslant a$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$. La convergence de la série $\sum f_n$ est donc normale sur $[a,\ +\infty[$. La restriction de f à $[a,\ +\infty[$ est donc continue (car les f_n le sont). a étant[35] quelconque strictement positif ; f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) La convergence de la série est uniforme sur $[1,\ +\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$.

Soit $n \geqslant 1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Nous en déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(c) Soit le changement de variable $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto u = xt^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'agit d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt^\alpha)dt = \frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

En utilisant les inégalités écrites plus haut nous avons

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leqslant x^{\frac{1}{\alpha}} f(x) \leqslant \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + x^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Finalement $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

78. (a) Soit, pour $(n,\ x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, $u_n(x) = \exp(-n^\alpha x^\beta)$. Si $\alpha \leqslant 0$ alors la suite de terme général $u_n(x)$ ne converge pas vers 0.

Supposons donc $\alpha > 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n(x) = 0$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \exp\left(-n^\alpha x^\beta\right)$ est convergente.

(b) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \exp(-n^\alpha x^\beta) \in \mathbb{R}_+^*$ est continue.

34. Si $\alpha \leqslant 1$ nous avons $+\infty \geqslant \dfrac{1}{2^\alpha}\dfrac{1}{m^{\alpha-1}}$.

35. Soit $x_0 > 0$. Soit $a \in]0,\ x_0[$. La restriction de f à $I = [a,\ +\infty[$ est continue ; I est un voisinage de x_0 donc f est continue en x_0 puis, x_0 étant quelconque strictement positif, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(-n^\alpha x^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta > 0 \\ \exp(-n^\alpha) & \text{si} \quad \beta = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}.$$

Nous supposons donc $\beta > 0$. u_n est alors prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 u_n(x) = 0$ donc u_n est intégrable.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \exp(-n^\alpha x^\beta)dx$. En utilisant le changement de variable $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t = n^\alpha x^\beta \in \mathbb{R}_+^*$, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} u_n(x)dx = \frac{1}{\beta} n^{-\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} \exp(-t) t^{\frac{1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} n^{-\frac{\alpha}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ converge si et seulement si $\dfrac{\alpha}{\beta} > 1$. Dans ce cas, la fonction f est intégrable et nous avons

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^\alpha x^\beta\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta} n^{-\frac{\alpha}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\zeta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Réciproquement. Nous avons vu en introduction de ces exercices que l'implication utilisée ici est une équivalence.
La réciproque est en fait immédiate. En effet. Supposons f intégrable.
$\forall (x,\ N) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leqslant f(x)$ donc

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right) dx \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)dx\ ;\text{ soit } \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} u_n(x)dx \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx \geqslant 0$ donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx$ converge.

Finalement, f est intégrable si et seulement si $0 < \beta < \alpha$.

79. Pour $t > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-nt) = \frac{\exp(-t)}{1-\exp(-t)} = \frac{1}{\exp(t)-1}$.

En intégrant par parties nous obtenons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \exp(-nt)dt = \frac{2}{n^3}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\exp(t)-1} dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

80. Supposons $x < 0$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x\exp(-nx)}{\ln(n)} = -\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$ est alors divergente.

Si $x = 0$ la série est clairement convergente.

Supposons $x > 0$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(-x)\ln(n)}{\ln(n+1)} = \exp(-x) < 1$.

En utilisant le critère de d'Alembert nous en déduisons la convergence de la série.

Finalement la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$ converge si et seulement si $x\geqslant 0$.

81. (a) Notons pour $(n,\ x) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{R})$, $u_n(x) = nx\exp(-nx^2)$.

Pour $x = 0$ la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

Si $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \dfrac{n+1}{n}\exp(-x^2)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \exp(-x^2) < 1$.

La série $\sum u_n(x)$ converge absolument. Elle converge donc absolument pour tout réel x. S est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) $u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ donc la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 et la série ne converge donc pas uniformément et bien évidemment ne converge pas normalement. Supposons $|x| \in [a,\ +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

$\dfrac{d}{dx}\left(nx\exp(-nx^2)\right) = n(1-2nx^2)\exp(-nx^2)$. Soit $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant\dfrac{1}{2a^2}$.

Les applications u_n, pour $n\geqslant N$, sont décroissantes sur $[a,\ +\infty[$ de limite 0 en $+\infty$. Nous en déduisons $\sup\limits_{|x|\in[a,\ +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a)$.

La série $\sum u_n$ converge donc normalement puis uniformément sur $[a,\ +\infty[$. Nous en déduisons que S est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $z = \exp(-x^2) \in]0,\ 1[$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = z\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Nous obtenons donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = \frac{x\exp(-x^2)}{(1-\exp(-x^2))^2}$.

$\dfrac{x\exp(-x^2)}{(1-\exp(-x^2))^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$. S n'est pas continue en 0.

82. (a) Pour $x\in\mathbb{R}$, la suite $\left(\dfrac{x^n\exp(-x)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge clairement [36] vers 0.

La convergence est-elle uniforme ?

f_n est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}-x^n}{n!}\exp(-x)$. Nous en déduisons $\forall (n,\ x) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(n) = \dfrac{n^n\exp(-n)}{n!}$.

---

36. Par exemple, en utilisant le critère de D'Alembert, la série $\dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$; on peut aussi remarquer que la série entière a un rayon de convergence infini.

$n\ln(|x|) - \ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{|x|}{k}\right)$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} \ln\left(\dfrac{|x|}{k}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(|x|) - \ln(n!) = -\infty$.

En utilisant la formule de Stirling nous obtenons $f_n(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n) = 0$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

(b) La série de terme général $f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Sa somme est égale à 1.
Supposons que la série converge uniformément. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Nous devrions donc avoir $1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = 0$.
La convergence de la série n'est donc pas uniforme.

83. $f : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(\mathrm{th}(t)) \in \mathbb{R}$ est continue. $\lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{x}\ln(\mathrm{th}(t)) = 0$. f est donc intégrable sur $]0,\ 1]$.
$\mathrm{th}(t) = \dfrac{1-\exp(-2t)}{1+\exp(-2t)}$.
Lorsque t tend vers $+\infty$ nous avons $\mathrm{th}(t) = 1 - 2\exp(-2t) + o(\exp(-2t))$ puis $\ln(\mathrm{th}(t)) = -2\exp(-2t) + o(\exp(-2t)) \underset{t\to+\infty}{\sim} -2\exp(-2t)$. f est donc intégrable sur $[1,\ +\infty[$. f est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant S(x) = \dfrac{\exp(-(2n+1)x)}{(2n+1)^2} \leqslant \dfrac{1)}{(2n+1)^2}$.
La série $\sum \left(x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{\exp(-(2n+1)x)}{(2n+1)^2} \in \mathbb{R}_+\right)$ est normalement donc uniformément convergente.
Pour $x < 0$ le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge. S est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue.
Considérons le changement de variable $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto u = \exp(-2t) \in]0,\ 1]$. Il s'agit d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Nous obtenons
$J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}(t))dt = \int_0^1 \frac{1}{2u} \ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right) du.$
Pour $|u| < 1$, $\ln\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^{2n+1}}{2n+1}$ puis $\dfrac{1}{2u}\ln\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^{2n}}{2n+1}$.
Supposons $u \in [0,\ 1]$. $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n}}{2n+1} du = \frac{1}{(2n+1)^2}$; la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ est convergente donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u} \ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right) du = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -J(0)$.

84. Notons $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n - \sqrt{n}\sin(n)}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\sin(n)}{n}$ qui n'est pas de signe fixe.Utilisons la transformation d'Abel déjà vue plus haut ; nous en déduisons que la série de terme général $\dfrac{\sin(n)}{n}$ converge.

$u_n - \dfrac{\sin(n)}{n} = \dfrac{\sin(n)}{n}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(n)} - 1\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$,
$u_n - \dfrac{\sin(n)}{n} = \dfrac{\sin(n)}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(n) + \dfrac{}{n}\sin^2(n) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ c'est-à-dire
$u_n - \dfrac{\sin(n)}{n} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sin^2(n) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
La série de terme général u_n est donc convergente.

85. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k$. Appelons q la partie entière de $\dfrac{N}{m}$.
$S_N = \sum_{k=1}^{mE\left(\frac{N}{m}\right)} u_k + \sum_{k=1+mE\left(\frac{N}{m}\right)}^{N} u_k$. $\sum_{k=1}^{mq} u_k = \sum_{j=0}^{q-1}\left(\sum_{k=1}^{m-1} u_{k+mj}\right) + \sum_{j=1}^{q} u_{mj}$.
$\sum_{k=1}^{mq} u_k = \sum_{k=1}^{mq}\dfrac{1}{k} + \sum_{j=1}^{q}\dfrac{x-1}{mj}$. Nous obtenons [37]
$S_N = \sum_{k=1}^{N}\gamma_N + \ln(N) + \dfrac{x-1}{m}\left(\gamma_q + \ln\left(E\left(\dfrac{N}{m}\right)\right)\right)$.
$\dfrac{N}{m} - 1 < E\left(\dfrac{N}{m}\right) \leqslant \dfrac{N}{m}$ donc $\ln\left(\dfrac{N}{m}-1\right) < \ln\left(E\left(\dfrac{N}{m}\right)\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{N}{m}\right)$.
$\ln\left(\dfrac{N}{m}-1\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$; $\ln\left(\dfrac{N}{m}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{N}{m}\right)}{\ln(N)} = 1$.
Pour que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge il faut avoir $1 + \dfrac{x-1}{m} = 0$ c'est-à-dire $x = 1-m$.
Supposons $x = 1-m$.
Lorsque N tend vers $+\infty$, $\ln\left(\dfrac{N}{m}-1\right) = \ln\left(\dfrac{N}{m}\right) - \dfrac{m}{N} + o\left(\dfrac{1}{N}\right)$; en reprenant les calculs précédents nous obtenons lorsque N tend vers $+\infty$

$-\ln(m) - \dfrac{m}{N} + o\left(\dfrac{1}{N}\right) \leqslant \ln\left(E\left(\dfrac{N}{m}\right)\right) - \ln(N) \leqslant -\ln(m)$. Nous en déduisons
$\lim\limits_{N\to+\infty}\ln\left(E\left(\dfrac{N}{m}\right)\right) - \ln(N) = -\ln(m)$ puis $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \ln(m)$.
Par exemple $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \cdots$ converge vers $\ln(2)$,

37. Je rappelle un résultat, déjà vu lors de l'étude des suites, que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$ est convergente de limite un élément noté γ appelé constante d'Euler. En effet $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$ car $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$; de plus $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1}\dfrac{dt}{t} = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ donc $\gamma_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) > 0$.
Nous en déduisons que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée donc convergente.

$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\ \cdots$ converge vers $\ln(3)$.

86. $(n+1)^{1+\frac{1}{n}}=\exp\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1)\right)$ donc lorsque n tend vers $+\infty$,

$$(n+1)^{1+\frac{1}{n}}=\exp\left(\ln(n)+\frac{1}{n}\ln(n)+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=n\exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n+\ln(n)+o(\ln(n)).$$

De même, $(n-1)^{1-\frac{1}{n}}=n-\ln(n)+o(\ln(n))$ donc
$(n+1)^{1+\frac{1}{n}}-(n-1)^{1-\frac{1}{n}}=2\ln(n)+o(ln(n))$ c'est-à-dire
$(n+1)^{1+\frac{1}{n}}-(n-1)^{1-\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}2\ln(n)$.

Il vient alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$.
En utilisant l'exercice concernant les séries de Bertrand nous en déduisons que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

87. (a) $f_n\,:\,x\in\mathbb{R}_+\longmapsto\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\in\mathbb{R}$ est continue. $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{n^n}{x^{2n}}$.

n étant supérieur à 1, la fonction f_n est intégrable.

(b) $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x^2}{n}\right)^k\geqslant 1+C_n^1\left(\frac{x^2}{n}\right)=1+x^2$.

Nous en déduisons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}=\exp(-x^2)$, $x\in\mathbb{R}_+\longmapsto\frac{1}{1+x^2}\in\mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée permet d'en déduire
$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx$.

(c) Considérons le changement de variable $t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto\sqrt{n}\tan(t)\in\mathbb{R}_+$. qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Nous obtenons alors
$\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^{2n-2}dt$.

Notons $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)^{2n}dt$. En intégrant par parties nous obtenons, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$I_n=\Big[\sin(t)\cos(t)^{2n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)^2\cos(t)^{2n-2}dt$$
$$=(2n-1)(I_{n-1}-I_n).$$

Finalement $I_0=\frac{\pi}{2}$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $2nI_n=(2n-1)I_{n-1}$.

Nous en déduisons donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons donc $I_n = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Par un calcul analogue avec $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1}dt$ nous obtenons $J_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)J_n = 2nJ_{n-1}$ donc $J_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k}{2k+1} = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.
Relation vraie aussi pour $n = 0$.
$I_n \geqslant J_n \geqslant I_{n+1}$. Nous en déduisons $\dfrac{2n+2}{2n+1} = \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \geqslant \dfrac{I_n}{J_n} \geqslant 1$.

Il vient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{I_n}{J_n} = 1$ c'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\left(\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2 = 1$.

Nous en déduisons $\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{n\pi}}$.

$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Nous obtenons donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

88. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{j=0}^{\varphi(0)} a_j + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1+\varphi(k-1)}^{\varphi(k)}\right) a_k = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} a_j$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi(n) = +\infty$, la série $\sum a_n$ étant supposée convergente nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j$.

La série $\sum b_n$ est donc convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{p \in \mathbb{N},\ \varphi(p) \leqslant n\}$ est fini car φ est strictement croissante donc vérifie $\forall p \in \mathbb{N},\ \varphi(p) \geqslant p$. Soit alors N le plus grand élément de cet ensemble A_n. Comme nous l'avons vu précédemment,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{\varphi(N)} a_j + \sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{N} b_k + \sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j.$$

La somme $\displaystyle\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j$ est remplacée par 0 lorsque $\varphi(N) = n$.

Dans le cas où $\varphi(N) < n$ nous avons

$$\left|\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j\right| \leqslant (n-\varphi(N)) \sup_{1+\varphi(N)\leqslant k\leqslant n} |a_k| \leqslant (\varphi(N+1)-\varphi(N)) \sup_{k\geqslant 1+\varphi(N)} |a_k|.$$

Si $p \in \mathbb{N} \longmapsto \varphi(p+1)-\varphi(p)) \in \mathbb{N}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(N+1)-\varphi(N) \leqslant M$ et donc $1+\varphi(N) \geqslant 1+\varphi(N+1)-M \geqslant n+2-M$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ (\varphi(N+1)-\varphi(N)) \sup_{k \geqslant 1+\varphi(N)} |a_k| \leqslant M \sup_{k \geqslant n+2-M)} |a_k|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant A \Rightarrow |a_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Pour $n \geqslant A+M-2$, $\left| \displaystyle\sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j \right| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1+\varphi(N)}^{n} a_j = 0$.

$\sum b_n$ étant convergente nous en déduisons que la série $\sum a_n$ est convergente.

89. Soit $p \in \mathbb{N},\ p > \varphi(0)$. Soit $E = \{k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) \geqslant p\}$.
E possède un plus petit élément ; ce plus petit élément k_0 est strictement positif et vérifie donc $\varphi(k_0) \geqslant p > \varphi(k_0-1)$. Nous en déduisons
$\forall p > \varphi(0),\ \exists k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) < p \leqslant \varphi(k+1)$.
k est unique car sinon, en supposant $k > k'$, nous avons $\varphi(k) \geqslant \varphi(k'+1)$ donc $\varphi(k'+1) < p$ et $\varphi(k'+1) \geqslant p$; d'où l'unicité.
$u_{\varphi(k)} \geqslant u_p \geqslant u_{\varphi(k+1)} \geqslant \dfrac{1}{\varphi(k+1)}$.
$$\sum_{j=1+\varphi(0)}^{\varphi(p+1)} u_j = \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{j=1+\varphi(k)}^{\varphi(k+1)} u_j \right) \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{\varphi(k+1)-\varphi(k)}{\varphi(k+1)}.$$
Posons $v_k = \dfrac{\varphi(k+1)-\varphi(k)}{\varphi(k+1)}$.
Si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série diverge.
Si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pas vers 0 alors $\ln(1-v_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -v_k$ c'est-à-dire
$\ln\left(\dfrac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k > 0$. La série de terme général v_k est de même nature que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)}\right)$ donc de même nature que la suite de terme général $\ln(\varphi(k))$ qui tend vers $+\infty$.
La série proposée est donc divergente[38].

90. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_n(x+T) = \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\int_{x+T}^{x+T+a_n} f_{n-1}(t)dt$.

Nous savons[39] que si f une fonction continue par morceaux est T-périodique alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ donc

38. Pour $\varphi = Id_{\mathbb{N}}$ nous connaissions déjà le résultat.

39. $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$.
$\displaystyle\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt$ car f est T-périodique ; donc
$\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

$$\begin{aligned}
f_n(x+T) &= \frac{1}{a_n}\int_{x+T}^{x+T+a_n} f_{n-1}(t)dt\\
&= \frac{1}{a_n}\int_{x+T}^{x} f_{n-1}(t)dt + \frac{1}{a_n}\int_{x}^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt + \frac{1}{a_n}\int_{x+a_n}^{x+T+a_n} f_{n-1}(t)dt\\
&= \frac{1}{a_n}\int_{T}^{0} f_{n-1}(t)dt + \frac{1}{a_n}\int_{x}^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt + \frac{1}{a_n}\int_{0}^{T} f_{n-1}(t)dt\\
&= \frac{1}{a_n}\int_{x}^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt = f_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$\forall (p,\ n) \in \mathbb{N}^2,\ n \geqslant p \geqslant 1 \Rightarrow f_n^{(p)}(x) = \dfrac{1}{a_n}(f_{n-1}^{p-1}(x+a_n) - f_{n-1}^{p-1}(x))$.

Chaque fonction f_n appartient à E.

Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue[40].

Pour $(n,\ x) \in \mathbb{N}^*\mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{a_n}\displaystyle\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt$ donc il existe $\theta(x) \in [0,\ 1]$ tel que $f_n(x) = f_{n-1}(x + \theta(x)a_n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\theta_1(x) \in [0,\ 1]$ tel que

$f_n(x) - f_{n-1}(x) = f_{n-1}(x+\theta(x)a_n) - f_{n-1}(x) = a_n\theta(x)f'_{n-1}(x+\theta_1(x)a_n)$.

Il existe $\theta_2(x) \in [0,\ 1]$ tel que $\begin{aligned}[t] f'_n(x) &= \frac{1}{a_n}(f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x))\\ &= f'_{n-1}(x+\theta_2(x)a_n).\end{aligned}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f'_n est continue périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Nous en déduisons, pour $n \geqslant 2$, $\|f'_n\|_\infty \leqslant \|f'_{n-1}\|_\infty$ soit finalement pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f'_n\|_\infty \leqslant \|f'_1\|_\infty$.

De même, pour $n \geqslant p$,

$f_n^{(p)}(x) = \dfrac{1}{a_n}(f_{n-1}^{(p-1)}(x+a_n) - f_{n-1}^{(p-1)}(x)) = f_{n-1}^{(p-1)}(x+\theta_2(x)a_n)$.

Nous avons alors $\|f_n^{(p)}\|_\infty \leqslant \|f_p^{(p)}\|_\infty$.

En faisant le même raisonnement qu'au dessus, nous avons pour $n \geqslant p+2$, $|f_n^{(p)}(x) - f_{n-1}^{(p)}(x)| \leqslant a_n \|f_{p+1}^{(p+1)}\|_\infty$.

Les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant p+2} f_n^{(p)}$ sont normalement donc uniformément convergentes.

$$\sum_{k=p+1}^{n}\left(f_k^{(p)}(x) - f_{k-1}^{(p)}(x)\right) = f_n^{(p)}(x) - f_p^{(p)}(x).$$

40. Soit g une fonction T-périodique continue définie sur $\mathbb{R}$. La restriction de g à $[0,\ 2T]$ est uniformément continue donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ (que l'on peut supposer strictement inférieur à T) tel que pour tout couple $(x,\ y) \in [0,\ 2T]$ on ait $|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$.

Soient x et y deux réels vérifiant $x \leqslant y \leqslant x + \alpha$. Soient $p = E\left(\dfrac{x}{T}\right)$ et $q = E\left(\dfrac{y}{T}\right)$.

$pT \leqslant x < pT + T$, $qT \leqslant y < qT + T$. $pT \leqslant x \leqslant y \leqslant x + \alpha \leqslant x + T < pT + 2T$. Il vient donc $p \leqslant q \leqslant p+1$. Posons $x_1 = x - pT$ et $y_1 = y - pT$. $x_1 \in [0,\ 2T]$ et $y_1 \in [0,\ 2T]$ et $x \leqslant y \leqslant \alpha$.

Nous avons donc $|g(x) - g(y)| = |g(x_1) - g(y_1)| \leqslant \varepsilon$. g est bien uniformément continue.

La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p}$ converge uniformément donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

91. (a) L'équation différentielle $y' = ny + nu(x)$ a pour solution les fonctions v définies sur $\mathbb{R}_+$ par $v(x) = C\exp(nx) + n\exp(nx)\displaystyle\int_0^x u(t)\exp(-nt)dt$ avec $C \in \mathbb{R}$.
u est bornée donc $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto u(x)\exp(-nx) \in \mathbb{R}$ est intégrable.
Si $C \neq -n\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\exp(-nt)dt$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(x) = \infty$ et v n'est pas bornée. Nous devons donc avoir $C = -n\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\exp(-nt)dt$ c'est-à-dire $v(x) = -n\exp(nx)\displaystyle\int_x^{+\infty} u(t)\exp(-nt)dt$.
$|v(x)|\leqslant n\|u\|_\infty \exp(nx)\displaystyle\int_x^{+\infty}\exp(-nt)dt = \|u\|_\infty$.
v est bien bornée et $\|v\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty$.
En utilisant la relation $v' = n(u+v)$ nous en déduisons $\|v'\|_\infty\leqslant 2n\|u\|_\infty$.
Soit alors $(x,\ y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. L'inégalité des accroissements finis conduit à $|v(x) - v(y)|\leqslant 2n\|u\|_\infty|x-y|$. L'application v est donc Lipschitzienne et en particulier uniformément continue. Il existe donc bien un et un seul élément v de X vérifiant $v' = n(u+v)$.

(b) Comme nous l'avons vu précédemment, l'unique solution de l'équation $v' = n(u+v)$ est définie par $v(x) = -n\exp(nx)\displaystyle\int_x^{+\infty} u(t)\exp(-nt)dt$.
L'application $u \in X \longmapsto v \in X$ est clairement linéaire. Nous avons vu que l'on a $\|v\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty$; T_n est donc continue de norme au plus égale à 1. $T_n(1) = x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto -n\exp(nx)\displaystyle\int_x^{+\infty}\exp(-nt)dt = 1$ donc $|||T_n||| = 1$.

(c) u est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(x,\ y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on ait $|x-y|\leqslant\alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $(T_n(u) - u)(x) = n\exp(nx)\displaystyle\int_x^{+\infty}(u(t) - u(x))\exp(-nt)dt$.

$$\begin{aligned}|(T_n(u) - u)(x)|&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}n\exp(nx)\int_x^{x+\alpha}\exp(-nt)dt\\ &\qquad +2n\|u\|_\infty\exp(nx)\int_{x+\alpha}^{+\infty}\exp(-nt)dt\\ &= \frac{\varepsilon}{2}(1-\exp(-n\alpha)) + 2\|u\|_\infty\exp(-n\alpha).\end{aligned}$$

Il vient alors $\|T_n(u) - u\|_\infty\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\exp(-n\alpha)$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\exp(-n\alpha)\right) = \frac{\varepsilon}{2}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de ε) tel que pour tout entier $n\geqslant N$ on ait $\left(\dfrac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\exp(-n\alpha)\right)\leqslant\varepsilon$.

Cela signifie $\lim\limits_{n\to+\infty}(T_n(u)-u)=0$ soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(u)=u$.

(d) Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n(u)$ est une fonction dérivable de X ; la suite $(T_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers u donc tout élément u de X est adhérent à l'espace D des fonctions dérivables de X. D est donc bien dense dans X.

92. (a) $g=\varphi^n$ est l'application dont la dérivée $n^{ième}$ est f et telle que pour tout $k\in\{0,\ \cdots,\ n-1\}$ $g^{(k)}(0)=0$.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral nous obtenons

$g(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}g^{(k)}(0)+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}g^{(n)}(t)dt$ c'est-à-dire

$g(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt.$

φ est bien à valeurs dans E $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. φ est clairement linéaire.

$\|\varphi(f)\|_\infty=\displaystyle\sup_{x\in[0,\ 1]}\int_0^x f(t)dt\leqslant|f|_\infty$. φ est donc continue de norme au plus égale à 1. La fonction constante égale à 1 a pour norme 1 $(\varphi(1))(x)=x$ donc $\|\varphi(1)\|_\infty=1$. Nous en déduisons $|||\varphi|||=1$.

$|(\varphi^n(f))(x)|\leqslant\|f\|_\infty\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{n-1}dt=\|f\|_\infty\frac{x^n}{n!}\leqslant\frac{1}{n!}\|f\|_\infty$. Nous en déduisons

$|||\varphi^n|||\leqslant\dfrac{1}{n!}$. En reprenant la fonction constante égale à 1 nous en déduisons comme précédemment pour φ que $|||\varphi^n|||=\dfrac{1}{n!}$.

(b) $\mathcal{L}_C(E)$ est complet donc la série $\sum\varphi^n$ converge absolument et est donc convergente dans $\mathcal{L}_C(E)$. La somme de la série est $(Id_E-\varphi)^{-1}$.

Il suffit pour cela de calculer $(Id_E-\varphi)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi^n$ et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi^n\right)(Id_E-\varphi)$.

En effet soit $u\in\mathcal{L}_C(E)$.

$v\in\mathcal{L}_C(E)\longmapsto u\circ v\in\mathcal{L}_C(E)$ et $v\in\mathcal{L}_C(E)\longmapsto v\circ u\in\mathcal{L}_C(E)$ sont continues donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u\circ\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varphi^k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u\circ\varphi^k$; de même

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varphi^k\right)\circ u=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(\varphi^k\circ u).$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(Id_E-\varphi)\circ\varphi^k=\sum_{k=0}^{n}\varphi^k-\sum_{k=1}^{n+1}\varphi^k=Id_E-\varphi^{n+1}.$

De même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi^k\circ(Id_E-\varphi)\right)=\sum_{k=0}^{n}\varphi^k-\sum_{k=1}^{n+1}\varphi^k=Id_E-\varphi^{n+1}$. Il vient alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(Id_E-\varphi)\circ\varphi^k=Id_E$ et de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\varphi^k\circ(Id_E-\varphi)\right)=Id_E$.

$Id_E - \varphi$ est inversible et d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^k$.

(c) Pour $g \in E$, $f = (Id_E - \varphi)^{-1}(g)$ est, d'après ce que nous avons vu précédemment, un élément de E. Il vérifie bien évidemment $f - \varphi(f) = g$ c'est-à-dire pour toute fonction $g \in E$ il existe une unique fonction $f \in E$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
En fait la fonction f solution est définie par
$\forall x \in [0,\ 1]$, $f(x) = g(x) + \exp(x)\displaystyle\int_0^x g(t)\exp(-t)dt$.
En effet $(f-g)'(x) = (f-g)(x) + g(x) = f(x)$ et $(f-g)(0) = 0$.

93. Soit $(n,\ k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. $C_n^k \dfrac{1}{n^k} \leqslant \dfrac{1}{k!}$.
$v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} u^k$. Considérons la suite de fonctions $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies sur $[1,\ +\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{L}_C(E)$ muni de la norme induite par la norme définie sur E par $\varphi_k(n) = 0$ si $k > n$ et $\varphi_k(n) = C_n^k \dfrac{1}{n^k} u^k$ si $k \leqslant n$.
Pour $k \leqslant n$, $|||\varphi_k(n)||| \leqslant \dfrac{1}{k!} |||u|||^k$. Cette inégalité est évidemment vérifiée lorsque $k > n$. La série $\sum \dfrac{1}{k!} |||u|||^k$ est convergente donc la série $\sum \varphi_k$ est normalement convergente ; nous en déduisons ($\mathcal{L}_C(E)$ étant complet)
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\lim_{n\to+\infty} \varphi_k(n)\Big).$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(n) = \Big(Id_E + \frac{u}{n}\Big)^n.$$
Soit k fixé. Soit $n > k$. Nous obtenons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_k(n) = \frac{1}{k!} u^k$.
Finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(Id_E + \frac{u}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k = \exp(u)$.
Remarque : pour utiliser les résultats que nous utilisons ici il est nécessaire de savoir que $\mathcal{L}_C(E)$ est complet dés que E l'est ; il est aussi nécessaire d'utiliser les résultats concernant les limites et les séries de fonctions. Ces résultats ont été vus dans d'autres chapitres.

94. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Soit a l'endomorphisme canonique associé à A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit χ_a le polynôme caractéristique de a. En écrivant $\chi_a = \displaystyle\prod_{k=1}^{N} (\lambda_k - X)^{p_k}$ où les λ_k sont deux à deux distincts et les entiers p_k non nuls nous en déduisons $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{N} E_k$ avec $E_k = \operatorname{Ker}((\lambda_k Id_{\mathbb{C}^n} - a)^{p_k})$.

Notons a_k l'endomorphisme de E_k induit par la restriction à E_k de a.
$\chi_a = \prod_{k=1}^{N} \chi_{a_k}$.
Soit x non nul appartenant à E_k. $a_k(x) = \lambda x \Rightarrow (x \in E_k,\ a(x) = \lambda x)$ c'est-à-dire $(a - \lambda_k)^{p_k}(x) = 0$ et $a(x) = \lambda x$.

$$(a-\lambda_k)^{p_k}(x) = \sum_{j=0}^{p_k} C_{p_k}^j (-\lambda_k)^{p_k-j} a^j(x) = \left(\sum_{j=0}^{p_k} C_{p_k}^j (-\lambda_k)^{p_k-j} \lambda^j \right) x.$$

Nous en déduisons $\sum_{j=0}^{p_k} \left(C_{p_k}^j (-\lambda_k)^{p_k-j} \lambda^j \right) = 0$ c'est-à-dire $(\lambda - \lambda_k)^{p_k} = 0$ donc $\lambda = \lambda_k$. a_k a donc pour polynôme caractéristique $(\lambda_k - X)^{q_k}$. En tenant compte de la relation $\chi_a = \prod_{k=1}^{N} \chi_{a_k}$ nous en déduisons que $\chi_{a_k} = (\lambda_k - X)^{p_k}$. Chaque espace E_k a donc pour dimension p_k. En choisissant dans chaque E_k une base de trigonalisation de a_k nous en déduisons qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de a est diagonale par blocs ; chaque bloc étant du type $\lambda_k I_{p_k} + T_k$ où T_k est une matrice triangulaire supérieure appartenant à $\mathcal{M}_{p_k}(\mathbb{C})$ et a diagonale nulle.
Soit $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}_p)^2} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Notons $t_{i,j,l}$ l'élément d'indices $(i,\ j)$ de la matrice T^l. $t_{i,j}$ est nul pour $i \leqslant j$.
$t_{i,j,2} = \sum_{k=1}^{p} t_{i,k} t_{k,j}$ est donc nul pour $i \leqslant j+1$. Supposons avoir montré que jusqu'au rang $h < p$, $t_{i,j,h}$ est nul pour $i \leqslant j+h-1$. $t_{i,j,h+1} = \sum_{k=1}^{p} t_{i,k,h} t_{k,j}$ est donc nul pour $i \leqslant j+p$. Le résultat est donc vrai pour tout $h \leqslant p$ et en particulier $t_{i,j,p}$ est nul pour $i - j \leqslant p-1$ ce qui est toujours vrai donc $T^p = 0$.
T est donc nilpotente. Nous obtenons donc que toute matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable a une matrice diagonale par blocs ; chaque bloc étant du type $(\lambda_k I_{p_k} + T_k$ où T_k est une matrice triangulaire supérieure nilpotente.

Revenons à notre exercice. Soit A la matrice de f dans une base de E. A est semblable a une matrice diagonale par blocs ; chaque bloc étant du type $\lambda I_p + T$ où T est une matrice triangulaire supérieure nilpotente et λ non nul. Nous cherchons à déterminer une matrice B telle que $\exp(B) = A$. Dans le calcul de A^m, les blocs restent stables ; il suffit donc pour prouver le résultat demandé de prouver que si on se donne une matrice du type $(\lambda I_p + T$ où T est une matrice triangulaire supérieure nilpotente et λ un nombre complexe non nul, il existe une matrice M telle que $\exp(M) = \lambda I_p + T$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
aI_p et M commutent donc[41] $\exp(aI_p + M) = \exp(a)\exp(M)$. λ étant non nul il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(a) = \lambda$.

41. Voir exercice1 ; exercice numéro 111 page 190.

$\exp(M) = \lambda I_p + T \iff \exp(-aM) = I_p + \mu T = I_p + T'$ avec $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$.

Il suffit donc de démontrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\exp(N) = I_p + T'$. Soit $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} \frac{(T')^k}{k}$. Montrons que $\exp(N) = I_p + T'$.

Montrons d'une manière plus générale que l'application exp de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est différentiable. Soient A et H deux matrices ; on peut supposer $\|H\| \leqslant 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Montrons que l'on a

$$(A+H)^n = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} A^i H A^{n-1-i} + \varepsilon_n(H) \text{ avec } \|\varepsilon_n(H)\| \leqslant \|H\|^2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \|A\|^k \right).$$

Pour $n = 1$ nous avons $A + H = A + \displaystyle\sum_{i=0}^{0} A^i H A^{n-1-i} + 0$.

Pour $n = 2$ nous avons $(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2 \displaystyle\sum_{k=0}^{0} C_2^k H^k$.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n.

$$\begin{aligned}(A+H)^{n+1} &= A^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} A^{i+1} H A^{n-1-i} + A\varepsilon_n(H) + HA^n \\ &\qquad\qquad + \sum_{i=0}^{n-1} HA^i H A^{n-1-i} + H\varepsilon_n(H) \\ &= A^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} A^i H A^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} HA^i H A^{n-1-i} + H\varepsilon_n(H) + A\varepsilon_n(H).\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{n+1}(H) = \sum_{i=0}^{n-1} HA^i H A^{n-1-i} + H\varepsilon_n(H) + A\varepsilon_n(H).$$

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}(H)\| &\leqslant \|H\|^2 \sum_{i=0}^{n-1} \|A\|^{n-1} + \|H\|^2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \|A\|^k \right) + \|H\|^2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \|A\|^{k+1} \right) \\ &= \|H\|^2 + \|H\|^2 \left(\sum_{k=1}^{n-2} (C_n^k + C_n^{k-1}) \|A\|^k \right) + \|H\|^2 C_n^{n-2} \|A\|^{n-1}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\|\varepsilon_{n+1}(H)\| \leqslant \|H\|^2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+1}^k \|A\|^k + C_n^{n-2} \|A\|^{n-1} \right) \leqslant \|H\|^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k \|A\|^k \right).$$

Le résultat est donc prouvé au rang $n+1$; il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Nous pouvons en fait majorer $\|\varepsilon_n(H)\|$ par $\|H\|^2 (1 + \|A\|)^n)$. Cette majoration est vraie aussi pour $n = 1$.

$$\exp(A+H) - \exp(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} [(A+H)^n - A^n] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} A^i H A^{n-1-i} + \varepsilon_n(H) \right)$$

avec $\|\varepsilon_n(H)\| \leqslant \|H\|^2 (1 + \|A\|)^n$.

$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon_n(H)\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+\|H\|)^n}{n!} = \exp(1+\|H\|)$. Nous obtenons finalement

lorsque H tend vers 0

$\exp(A+H)-\exp(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}A^iHA^{n-1-i}\right) + o(\|H\|)$.

exp est donc différentiable ; la différentielle de exp en A est l'application $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}A^iHA^{n-1-i}\right)$.

Nous pouvons faire une autre démonstration.

En choisissant la base $(e_1, \cdots, e_{2p^2})$ constituée des matrices $E_{k,l}$ et $iE_{j,q}$ nous pouvons considérer $A \longmapsto A^n$ comme une application de $\mathbb{R}^{2p^2}$ dans $\mathcal{M}_p\mathbb{C})$. Si nous appelons $(x_1, \cdots, x_{2p^2})$ les coordonnées d'un élément A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, la dérivée partielle d'indice k de la'application $A \longmapsto A$ est e_k. la dérivée partielle d'indice k de la'application $A \longmapsto A^2$ est $e_kA + Ae_k$. Nous montrons par récurrence que la dérivée partielle d'indice k de la'application $A \longmapsto A^n$ est $\sum_{i=1}^{2p^2}A^ie_kA^{2p^2-i}$. La continuité des applications dérivées partielles permet de conclure que $A \longmapsto A^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la différentielle de cette application est définie par $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \longmapsto \sum_{k=0}^{2p^2}\left(\sum_{i=0}^{2p^2}A^i(h_ke_k)A^{2p^2-i}\right) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ c'est-à-dire $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \longmapsto \sum_{i=0}^{2p^2}A^iHA^{2p^2-i} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Nous retrouvons le résultat précédent.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $f(t) = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}t^kT'^k$ et $g(t) = \exp(f(t))$.

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(t)$ commute avec $f'(t)$. Nous obtenons donc

$g'(t) = (d(\exp)(f(t))(f'(t)) = f'(t)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}nf(t)^{n-1}\right) = f'(t)\exp(f(t)) = f'(t)g(t)$.

$f'(t) = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}t^{k-1}T'^k$.

$$\begin{aligned}(I_p+tT')f'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}t^{k-1}T'^k + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}t^kT'^{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}t^{k-1}T'^k + \sum_{k=2}^{p}(-1)^kt^{k-1}T'^k = T'.\end{aligned}$$

Nous en déduisons $f'(t) = T'(I_p+T')^{-1}$. Posons $F(t) = (I_p+tT')\exp(-f(t))$.
$F'(t) = T'\exp(-f(t)) - f'(t)(I_p+tT')\exp(-f(t)) = 0$.

F est donc constante ; il existe une matrice M telle que $F(t) = M$ c'est-à-dire $(I_p + tT')\exp(-f(t)) = M$.
Pour $t = 0$ nous obtenons $M = I_p$ donc
$(I_p+T')\exp(-f(1)) = I_p = (I_p+T')\exp(-N)$. Nous en déduisons $\exp(N) = T'$ d'où le résultat demandé.

Nous pouvons faire une autre démonstration.

Reprenons les notations précédentes. Les éléments commutant entre eux nous avons $g(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} \exp\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k T'^k\right)$.

Soit $u_k(t) = \exp\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k} t^k T'^k\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^{(k+1)j}}{k^j j!} t^{kj} T'^{kj}$.

$u'(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-2} \frac{(-1)^{(k+1)(j+1)}}{k^j j!} t^{k(j+1)} T'^{k(j+1)} = (-1)^{k+1} t^{k-1} T'^k u_k(t)$.

Nous en déduisons $g'(t) = g(t) \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} t^{k-1} T'^k$. Nous terminons comme plus haut.

Chapitre 4

Séries entières

1. Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\ln n}z^n$, comportement sur le bord du disque de convergence,
$\displaystyle\sum a_n z^n,\ a_n=\int_1^{+\infty}\exp(-x^n)dx,\ (n\geqslant 1)$, comportement sur le bord du disque du convergence,
$\displaystyle\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)z^n,\ \sum\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]z^n,\ \sum n^{\sqrt{n}}z^n,$
$\displaystyle\sum\frac{\cos^2(n)}{n}z^n,\ \sum n!z^{n^2},\ \sum\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}z^n,\ \sum\left(\operatorname{atan}\left(n^\alpha\right)\right)z^n,$
$\sum a_n z^n,\ n\geqslant 1,\ a_n$ est la $n^{i\grave{e}me}$ décimale de $\sqrt{2}$.
2. Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R},\ a<0<b.\ f$ de classe $\mathcal{C}^\infty,\ \forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x)\geqslant 0$.
On pose, pour $x\in]a,\ b[$ et $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$.
Soit x fixé, $x\in[0,b[$, montrer que la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'application $\displaystyle x\in[0,\ b[,\longmapsto\frac{R_n(x)}{x^n}\in\mathbb{R}$ est croissante.
En déduire que f est développable en série entière à l'origine sur $[0,b[$ puis sur $]-c,b[$ avec $c=\min(-a,b)$.
3. Soit f une fonction définie sur une partie D non vide de $\mathbb{C}$. Soit $a\in D$ adhérent à $D\setminus\{a\}$. a est dit point d'accumulation de D.
Si $\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe alors f est dite dérivable en a et on note $f'(a)$ cette limite. Si f est dérivable en tout point de D f est dite dérivable et on note f' l'application qui à $a\in D$ associe $f'(a)$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On dit que f est p fois dérivable sur D si[1] pour tout $k\in\mathbb{N},\ k\leqslant p-1,\ f^{(k)}$ est dérivable ; la dérivée de $f^{(k)}$ étant notée $f^{(k+1)}$. Si f est dérivable à tout ordre elle est dite infiniment dérivable.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On pose pour

1. $f^{(0)}$ désigne f.

$z \in \mathbb{C},\ |z| < R,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C},\ |z_0| < R$. Montrer que f est dérivable en z_0 ; vérifier que pour tout entier n nous avons $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose pour $z \in \mathbb{C},\ |z| < R,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   Soit $r \in]0, R[$; montrer $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(r \exp(i\theta)\right) \exp(-in\theta) d\theta$.

   En déduire, si $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$.

   Application. Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$, développable en série entière de rayon de convergence infini. Montrer qu'alors f est constante.

5. Soit E un espace de Banach [2]. Considérons une série convergente à termes dans E, $\sum a_n$. Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = a_n t^n$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

6. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n)^2 z^n$?

7. Soit $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$.

   Quel est le rayon de convergence R' de la série $\sum S_n z^n$?

8. Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $a_0 = 0$, $a_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

   Montrer que $\lim_{\substack{z \in \mathbb{R} \\ z \to 1^-}} f(z) = 1$, où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   Soit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $b_1 = a_1$ et pour $n \geqslant 2$, $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$.

   Montrer que le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est $R_2 \geqslant 1$.

   Soit $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$. Vérifier : $g(z)(1 - f(z)) = f(z)$. Montrer $R_2 = 1$.

9. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n u_n z^n$?

2. C'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.

10. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$. Supposons $\sum a_n z_0^n$ convergente.
Montrer que $\sum a_n z_0^n t^n$ converge uniformément pour $t \in [0,1]$. On pourra utiliser une transformation d'Abel déjà vue dans les chapitres précédents.
Application : soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries (réelles ou complexes) convergentes. Soit w_n le terme général de la série produit de Cauchy des deux séries précédentes. On suppose que la série $\sum w_n$ converge.
Montrer la relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.
11. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Montrer que $\sum (a_n x)^n$ a un rayon de convergence infini. On suppose $\sum a_n$ divergente. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x)^n$.
Montrer que $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(f(x))$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On minorera f sur : $\left[\dfrac{e}{a_n}, \dfrac{e}{a_{n+1}}\right]$.
12. Soit f une application définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose f développable en série entière à l'origine et $f(0) \neq 0$.
Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière à l'origine.
13. Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{C}$. Soit g une application définie de V dans $\mathbb{C}$. On suppose $0 \in U$ et $f(0) = 0$, f et g développables en séries entières à l'origine ; séries entières de rayons respectifs R_1 et R_2 strictement positifs.
Montrer que l'application $g \circ f$ est développable en série entière à l'origine.
Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose $0 \in U$, $f(0) = a \neq 0$ et f développable en série entière à l'origine de rayon strictement positif. Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière à l'origine.
14. On définit la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \neq 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. On suppose que la série entière $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence > 0. Calculer sa somme et en déduire la valeur de u_n.
15. Soit $\sum a_n$ une série convergente de somme A. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.
   (a) Montrer que les rayons de convergence des séries entières $\sum \dfrac{a_n}{n!} t^n$ et

$\sum \frac{A_n}{n!}t^n$ sont infinis.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}t^n,\ g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!}t^n$.

Montrer : $f'(t) = g'(t) - g(t)$; en déduire :

$\forall t \in \mathbb{R},\quad \int_0^t f(u)\exp(-u)du = (g(t) - f(t))\exp(-t)$.

(b) Montrer : $\lim_{t\to+\infty} (g(t) - f(t))\exp(-t) = A$ puis $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(u)\exp(-u)du = A$.

(c) En changeant un peu les hypothèses, peut-on avoir une démonstration plus rapide ?

16. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$ sur $]-1,1[$. On suppose : $\lim_{x\to1^-} f(x) = S$ et $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*,\ x \in [0,1[$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer : $|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} |ku_k|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |ku_k|\, x^k$.

(b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \left(S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 0$.

(c) Montrer alors que la série $\sum u_n$ converge et a pour somme S.

17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(ta) \in SO(n)$.

18. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

Étude du comportement au bord du disque de convergence.

19. Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$.

Étudier la convergence pour $|z| = R$.

20. Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum \exp(n\sin(n))z^n$.

21. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} z^n$?

22. Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n\geqslant1} \frac{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}{n^\alpha} z^n$.

Nature de la série pour $|z| = R$.

23. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a+kd}\right) x^n$ où a et d sont deux réels strictement positifs.
Calculer la somme de la série.

24. (a) Soit f une fonction bornée de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $(n,\ t) \in \mathbb{N} \times [0,\ 1]$, $g_n(t) = t^n f(t)$. Montrer :
$\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,1] \Leftrightarrow f$ dérivable en 1, $f(1) = f'(1) = 0$

(b) Généralisation :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 telle que $a_n \geqslant 0$ et $\sum a_n$ diverge.
On note pour $t \in [0,1[$, $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

i. Quel est le comportement de φ en 1 ?

ii. Soit f définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue.
On pose pour $(n,\ t) \in \mathbb{N} \times [0,\ 1]$, $g_n(t) = a_n t^n f(t)$. Montrer
$\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,1] \Leftrightarrow \lim_{t \underset{<}{\to} 1} f(t)\varphi(t) = 0$

iii. Que se passe-t-il si f n'est définie que sur $[0,1[$?

25. (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{ch}(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{x^2 + (2n+1)^2}$.

(b) À-t-on le même type de résultat avec $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(ixt)}{\mathrm{ch}(t)} dt$?

(c) Montrer $\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\mathrm{ch}(t)} dt = 2p! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{p+1}}$.

26. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \int_0^1 t^{xt} dt$ est défini. Déterminer le développement en série entière de f.

27. Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(3n+2)}$; considérer la série $\sum \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

28. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

29. Développer en séries entières les fonctions f suivantes définies par : $f(x)$ où $f(z) =$
$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$, $\cos(x)\,\mathrm{ch}(x)$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{asin}(x)$, $\ln(1 - 2x\cos(a) + x^2)$,
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)\exp(-t)}{1+t^2} dt$, $\int_0^x \frac{\exp(t)-1}{t} dt$, $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, $(\ln(1+t))^2$,
$\frac{z\,\mathrm{sh}(\alpha)}{z^2 - 2z\,\mathrm{ch}(\alpha) + 1}$ $(\alpha > 0,\ z \in \mathbb{C})$, $\operatorname{atan}\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - x}\right)$ $\left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2(\sin(t))^2}}$, $\operatorname{atan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\tan(\alpha)\right)$ $\left(\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$,
$\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}$.

30. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respctifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$. Que dire du rayon de convergence de la série $\sum a_n b_n z^n$?
31. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose : $b_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = a_n$. Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon R, quel est celui de $\sum b_n z^n$?
32. Montrer les égalités suivantes :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.
33. Calculer les sommes des séries suivantes, où $P \in \mathbb{C}[X]$:
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{3n+1}}{(3n+1)!}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{3n+2}}{(3n+2)!}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(n)z^n$.
34. Soit $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Quel est celui de $\sum \dfrac{a_n}{n!}z^n$?
On pose, pour $z \in \mathbb{R}$, $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$.
Montrer que si $|z| < R$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n = \int_0^{+\infty}F(zt)\exp(-t)dt$.
35. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1}+2u_n+(-1)^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum u_n x^n$ est $\geqslant \dfrac{1}{2}$. On pourra montrer que l'on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2^{n+1}-1$.
   (b) Calculer la somme de la série ; en déduire la valeur de u_n.
36. Soit f une application continue définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in]-1,\ 1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-ax)f(ax)$.
Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
37. Quel est le rayon de convergence, R, de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}x^n$? Étude pour $x = R$
38. Soit f une application continue définie de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose $f(1) \neq 0$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$ $a_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.
Étude de la série entière $\sum a_n x^n$, calcul de la somme.
On supposera $f(1) = 0$ puis on montrera que, pour $f(1) \neq 0$, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|f(1)|}{n}$.
39. On pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^n(\cos(x))^{2n}$ et $f(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-t\cos(x)^2}$.

Développer f en série entière à l'origine.

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n} dx$.

40. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$. On suppose $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = l_1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = l_2$ $((l_1,\ l_2) \in \mathbb{R}^2))$.

    Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

41. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$.

    Calculer les sommes des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$.

42. Développer en série entière à l'origine la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

43. Développer en série entière la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x(\sin(t))^2) dt$.

44. Développer en série entière à l'origine $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2} dt$.

45. Soit f définie par $f(x) = \exp(x^2) \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2) dt$. Développer en série entière à l'origine la fonction f.

46. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)a)}{2n+1} x^{2n+1}$ où a est un réel.

47. Soit $f(x) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$. Développer f en série entière à l'origine.

48. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum \frac{z^n}{np+1}$.

    Écrire la somme de la série sous forme intégrale.
    Calculer cette somme pour $p = 4$ et z réel.

49. On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ et on étudie la série entière $\sum a_n x^n$. Calculer sa somme. Déterminer le rayon de convergence, étudier le comportement au bord de l'intervalle de convergence.

50. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u) \frac{\sin(xu)}{u} du$.

    Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
    Calculer les coefficients du développement.
    Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

51. Soit $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x-y-xy}$. Montrer que sur un ouvert à préciser, $f(x,y)$ s'écrit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(y)x^n$ où les fonctions a_n sont développables en séries entières à l'origine.

    Calculer $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

    On pourra calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta)\right)d\theta$.

52. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}\right]$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e}}\exp(ex)$.

53. Combien y a-t-il de possibilités d'obtenir n avec des jetons marqués 2 et 3 ?

54. Peut-on prolonger $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \operatorname{ch}\left(t\sqrt{t}\right) \in \mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_-^*$ pour en faire une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$?

55. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^4}}$ est-elle développable en série entière à l'origine ?

Chapitre 5

Corrigés séries entières

1. **Remarque concernant la règle de d'Alembert.**
Nous savons que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes[1] est non nulle à partir d'un certain rang et si la suite de terme général $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ a une limite strictement inférieure à 1 alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, si la suite de terme général $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ a une limite strictement supérieure à 1 alors la série $\sum u_n$ est divergente car le terme général ne tend alors pas vers 0. Si la limite est égale à 1 nous ne pouvons pas conclure. En revanche, si la suite de terme général $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ n'a pas de limite nous ne pouvons rien dire.
Si nous considérons alors la série entière $\sum u_n z^n$ (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant les mêmes propriétés qu'au dessus), si la suite de terme général $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ a une limite, l, appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$ alors le rayon de convergence de la série entière en question est égal à $\dfrac{1}{l}$, en convenant que si $l = +\infty$ alors $R = 0$.
Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{1}{n!}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. $\dfrac{|u_{2n+1}|}{|u_{2n}|} = \dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{|u_{2n+2}|}{|u_{2n+1}|} = 1$.
Nous ne pouvons donc pas conclure à l'aide de la règle de d'Alembert. Nous pouvons cependant écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(z^2)^k + z\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}(z^2)^k$.
De même $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(z^2)^k + z\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}(z^2)^k$.
La série entière $\sum \dfrac{1}{n!}\zeta^n$ a un rayon de convergence infini donc $\forall z \in \mathbb{C}$ la série entière $\sum u_n z^n$ converge ; elle a donc un rayon de convergence infini.
On peut aussi utiliser la règle de Cauchy qui n'est pas au programme et qu'il

1. On peut remplacer complexes par éléments d'un espace vectoriel normé complet en remplaçant module par norme.

faudrait donc auparavant justifier. Quelle est-elle ?
Si la suite de terme général $\sqrt[n]{|u_n|}$ a une limite strictement inférieure à 1 alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, si la suite de terme général $\sqrt[n]{|u_n|}$ a une limite strictement supérieure à 1 alors la série $\sum u_n$ est divergente car le terme général ne tend alors pas vers 0. Si la limite est égale à 1 nous ne pouvons pas conclure. En revanche, si la suite de terme général $\sqrt[n]{|u_n|}$ n'a pas de limite nous ne pouvons rien dire.

En effet. Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \in [0,\ 1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que[2] $l+\varepsilon < 1$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $\left|\sqrt[n]{|u_n|} - l\right| \leqslant \varepsilon$. Il vient alors, pour $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant (l+\varepsilon)^n$. La série de terme général $(l+\varepsilon)^n$ est convergente donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \in]1,\ +\infty]$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n au moins égal à N, $|u_n| \geqslant A^n$ où $A > 1$. La série $\sum u_n$ est bien divergente.
Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang est telle que la suite de terme général $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ possède une limite $l \in [0,\ +\infty]$.
Considérons d'abord le cas $l \in]0,\ +\infty[$.
Soit $\varepsilon \in]0,\ l[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ au moins égal à N on ait $l - \varepsilon \leqslant \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant l + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\left(l - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{p+1} \leqslant \displaystyle\prod_{n=N}^{N+p} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \left(l + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{p+1}$ soit encore
$|u_N| \left(l - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{p+1} \leqslant |u_{N+p+1}| \leqslant |u_N| \left(l + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{p+1}$.
Nous en déduisons

$$\sqrt[N+p+1]{|u_N|}\ \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p+1}{N+p+1}} \leqslant \sqrt[N+p+1]{|u_{N+p+1}|} \leqslant \sqrt[N+p+1]{|u_N|}\ \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p+1}{N+p+1}}.$$

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt[N+p+1]{|u_N|}\ \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p+1}{N+p+1}} = \lim_{p\to+\infty} \sqrt[N+p+1]{|u_N|}\ \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p+1}{N+p+1}} = l + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc il existe un entier M tel que pour tout entier p au moins égal à M nous ayons $l - \varepsilon \leqslant \sqrt[N+p+1]{|u_N|}\ \left(l - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p+1}{N+p+1}}$ et $\sqrt[N+p+1]{|u_N|}\ \left(l + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p+1}{N+p+1}} \leqslant l + \varepsilon$.
Finalement il existe un entier N_1 tel que pour tout entier n au moins égal à N_1 on ait $l - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant l + \varepsilon$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$.
Lorsque $l = 0$, nous écrivons $0 \leqslant \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant l + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et nous concluons comme précé-

2. Il suffit de choisir $\varepsilon \in \left]0,\ \dfrac{1-l}{2}\right[$.

demment ; pour $l = +\infty$ nous écrivons $0 < A \leqslant \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant l + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et nous concluons comme précédemment.
Cela signifie que si la suite de terme général $\sqrt[n]{|u_n|}$ n'a pas de limite il ne sert à rien d'essayer d'utiliser le critère de d'Alembert.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} = 1$. Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\ln n} z^n$ est égal à 1.
Soit $z = \exp(i\theta)$ avec $\theta \not\equiv 0 (\operatorname{mod} 2\pi)$.
Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \exp(ik\theta) = \exp(i\theta)\dfrac{\exp(in\theta)-1}{\exp(i\theta)-1}$

$S_n(\theta) = \exp\left(i(n+1)\dfrac{\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. Nous avons donc $|S_n(\theta)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$.

Soit $(p,\ q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p < q$. Notons $U_{p,q}(\theta) = \sum\limits_{n=p}^{q} \dfrac{1}{n\ln(n)} \exp(in\theta)$.

Nous obtenons $U_{p,q}(\theta) = \sum\limits_{n=p}^{q} \dfrac{1}{n\ln(n)} S_n - \sum\limits_{n=p-1}^{q-1} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} S_n$. En regroupant les termes il vient

$$U_{p,q}(\theta) = \frac{S_q}{q\ln(q)} - \frac{S_{p-1}}{p\ln(p)} + \sum_{n=p}^{q-1} S_n \left(\frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right).$$

Nous en déduisons

$$|U_{p,q}(\theta)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\left(\frac{1}{q\ln(q)} + \frac{1}{p\ln(p)} + \sum_{n=p}^{q-1}\left(\frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)\right)$$

donc $|U_{p,q}(\theta)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \dfrac{2}{p\ln(p)}$.

$\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \dfrac{2}{p\ln(p)} = 0$ donc, grâce au critère de Cauchy, la série de terme général $\dfrac{\exp(in\theta)}{n\ln(n)}$ est convergente.
Pour $z = 1$ nous avons une série de Bertrand que nous avons déjà rencontrée et qui diverge.
la série entière de terme général $\dfrac{z^n}{n\ln(n)}$ est donc convergente sur le bord du disque sauf pour $z = 1$.

• Supposons $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant le changement de variable $x \in [1,\ +\infty[\longmapsto u = x^n \in [1,\ +\infty[$ nous en déduisons $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^n)dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \exp(-u)u^{\frac{1}{n}-1}du$.
$\forall u \in [1,\ +\infty[,\ 0 \leqslant u^{\frac{1}{n}-1} \leqslant 1$; a_n existe.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-u)u^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{\exp(-u)}{u}$ donc en utilisant le théorème de convergence

dominé nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u}du = A > 0.$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ est égal à 1.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement décroissante, de limite nulle.

En utilisant la même transformation [3] qu'à l'exercice précédent, nous en déduisons $\left|\displaystyle\sum_{n=p}^{q} a_n \exp(in\theta)\right| \leqslant \frac{2}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} a_p$. Comme précédemment, la série converge donc au bord sauf pour $z = 1$ où elle diverge.

• $|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})z^n| \leqslant |z|^n$ donc pour $|z| < 1$, la série entière de terme général $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})z^n$ est absolument convergente et a un rayon de convergence au moins égal à 1.

Lorsque n tend vers $+\infty$ nous avons $\sqrt{n^2+n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc

$$\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour $z = 1$ la série converge comme somme d'une série alternée dont le module décroit et converge vers 0 et d'une série absolument convergente.

Pour $z = -1$ la série diverge comme somme de la série divergente de terme général $\frac{K}{n}$ avec $K < 0$ et d'une série convergente. Le premier exemple nous permet de conclure (ce que nous savions déjà) que le rayon de convergence R est au moins égal à 1 ; le second exemple permet de conclure que ce même rayon est au plus égal à 1. Le rayon de convergence est donc égal à 1.

• Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - e \\ &= -\frac{e}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{2n}.\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)n - e\right)z^n$ est égal à 1.

• $\dfrac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}} (n+1)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ln(n+1)) = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = 1.$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} z^n$ est égal à 1.

3. Transformation d'Abel

• Posons $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k) = \Re e\left(\exp(2i)\frac{\exp(2in)-1}{exp(2i)-1}\right) = \frac{\cos(n+1)\sin(n)}{\sin(1)}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |A_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin(1)}$.

Supposons $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ 2 \leqslant p < q$.

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{cos(2k)}{k} = \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k}(A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k} A_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} \frac{1}{k+1} A_k$$
$$= \frac{1}{p} A_{p-1} + \frac{1}{q} A_q + \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{cos(2k)}{k}\right| \leqslant \frac{2}{\sin(1)} \frac{1}{p}.$$

$\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{2}{\sin(1)} \frac{1}{p} = 0$ donc, en utilisant le critère de Cauchy, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{cos(2k)}{k}$ est convergente.

$\dfrac{(\cos(n))^2}{n} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\cos(2n)}{2n}$ donc la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\cos(n))^2}{n} z^n$ est divergente pour $z = 1$.

Le rayon de convergence de cette série est donc au plus égal à 1.

$\left|\dfrac{(\cos(n))^2}{n} z^n\right| \leqslant \dfrac{1}{n} |z|^n$. La série entière de terme général , pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} z^n$ a pour rayon de convergence 1 donc le rayon de convergence de la série entière de terme général, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{(\cos(n))^2}{n} z^n$ est [4] au moins égal à 1. Il est donc égal à 1.

• Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{\left|(n+1)! z^{(n+1)^2}\right|}{|n! z^{n^2}|} = (n+1)|z|^{2n+1}$.

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)|z|^{2n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| \geqslant 1 \end{cases}.$$

la série de terme général $u_n(z) = n! z^{n^2}$ $(u_0 = 1)$ converge donc pour $|z| < 1$ et

---

4. La série de terme général , pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{(\cos(n))^2}{n} (-1)^n$ est convergente.

En effet $\dfrac{(\cos(n))^2}{n} (-1)^n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{(-1)^n \cos(2n)}{2n}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(2k) = \Re e\left(\exp\left(i\frac{2+\pi}{2}(n+1)\right) \frac{\sin\left(\frac{2+\pi}{2} n\right)}{\sin\left(\frac{2+\pi}{2}\right)}\right) = \cos\left(\frac{2+\pi}{2}(n+1)\right) \frac{\sin\left(\frac{2+\pi}{2} n\right)}{\sin\left(\frac{2+\pi}{2}\right)}.$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(2k)\right| \leqslant \frac{1}{\cos(1)}.$$

En utilisant la méthode précédente, nous en déduisons que la série de terme général, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{(\cos(n))^2}{n} (-1)^n$ est convergente.

diverge dans le cas contraire. En tant que série entière, son rayon de convergence est égal à 1.

• Lorsque n tend vers $+\infty$, $n^\alpha \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} \geqslant 0$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp\left(-\frac{1}{2}(n+1)^{\alpha-2} + \frac{1}{2}n^{\alpha-2} + O\left(\frac{1}{n^{4-\alpha}}\right)\right)$.

$A_n = -\frac{1}{2}(n+1)^{\alpha-2} + \frac{1}{2}n^{\alpha-2} + O\left(\frac{1}{n^{4-\alpha}}\right) = \frac{2-\alpha}{2}n^{\alpha-3} + O\left(\frac{1}{n^{4-\alpha}}\right)$.

Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \alpha > 3 \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad \alpha = 3 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < 3 \end{cases}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha > 3 \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & \text{si} \quad \alpha = 3 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha < 3 \end{cases}.$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général, pour $n \geqslant 1$, $a_n z^n$ est donc égal à $+\infty$ lorsque $\alpha > 3$, $\sqrt{e}$ lorsque $\alpha = 3$ et 1 lorsque $\alpha < 3$.

• $\operatorname{atan}(n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ n^\alpha & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$.

Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{atan}((n+1)^\alpha)}{\operatorname{atan}(n^\alpha)} = 1$. Le rayon de convergence de la série entière de terme général, lorsque $n \geqslant 1$, $\operatorname{atan}(n^\alpha)$ est égal à 1.

• Soit a_n la $n^{ième}$ décimale de $\sqrt{2}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers donc ne converge[5] pas vers 0 sauf à être nulle à partir d'un certain rang mais alors $\sqrt{2}$ serait un nombre décimal ce qui est faux.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donc au plus égal à 1.

$a_n|z|^n \leqslant 9|z|^n$. la rayon de convergence de la série entière $\sum 9z^n$ est égal à 1 donc celui de la série entière $\sum a_n z^n$ est donc au moins égal à 1. La rayon de convergence est donc égal à 1.

5. Une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang. En effet : Supposons qu'un telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite l. Soit $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n on ait $n \geqslant N \Rightarrow l - \frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{1}{4}$. L'intervalle $\left[l - \frac{1}{4},\ l + \frac{1}{4}\right]$ est de longueur $\frac{1}{2}$ et contient au plus un seul entier ; donc il en contient un et un seul et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

2. $R_n(x)$ est défini par la relation $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x)$. Nous avons donc $\forall x \in]a,\ b[,\ R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + R_{n+1}(x)$.
Pour $x \in [0,\ b[$ nous avons donc $R_{n+1}(x) \leqslant R_n(x)$.
La formule de Taylor conduit à $\forall x \in]a,\ b[,\ \ R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.
Pour $x \in [0,\ b[$ nous avons donc $R_n(x) \geqslant 0$. La suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 donc converge de limite au moins égale à 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$R'_n(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(0) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{(k)!} f^{(k+1)}(0)$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n+1)}(t)dt.$$
$$xR'_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x x(x-t)^{n-1} f^{(n+1)}(t)dt.$$
$$xR'_n(x) - nR_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} t f^{(n+1)}(t)dt \geqslant 0.$$
La dérivée de $x \in]0,\ b[\longmapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est $x \in]0,\ b[\longmapsto \frac{xR'_n(x) - nR_n(x)}{x^{n+1}}$ donc $x \in]0,\ b[\longmapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante.
$R_0(x) = f(x) - f(0)$. f est croissante donc $x \in]0,\ b[\longmapsto R_0(x) \in \mathbb{R}$ aussi.
Soit $x \in [0,\ b[$. Il existe $y \in]x,\ b[$. Nous avons alors $R_n(x) \leqslant R_n(y)\left(\frac{x}{y}\right)^n$. Pour x fixé $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n(y) \in \mathbb{R}$ donc $\forall x \in]0,\ b[,\ \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
$R_n(0) = 0$ donc pour $x \in [0,\ b[\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.
Soit $x \in [0,\ c[$. Nous en déduisons $x \in [0,\ b[$ et $-x \in]a,\ 0]$.
Posons $g(x) = f(x) + f(-x)$. $\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + (-1)^k f^{(k)}(-x)$. Pour k pair $g^{(k)}(x) \geqslant 0$ et pour k impair $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(-x) \geqslant 0$ car $x \geqslant -x$.
On peut donc appliquer à g la démonstration précédente. Nous en déduisons
$\forall x \in [0,\ c[,\ \ f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ soit encore
$$\forall x \in [0,\ c[,\ \ f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} 2f^{(2n)}(0) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(0)$$

Donc $\forall x \in [0,\ c[,\ f(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(n)!} f^{(n)}(0)$.

Nous avons bien pour $x \in]-c,\ 0],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)!} f^{(n)}(0)$ puis

$\forall x \in]-c,\ b[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)!} f^{(n)}(0)$.

f est donc développable en série entière à l'origine ; le rayon de convergence de la série est au moins égal à $\min(-a,\ b)$.

3. Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. La série a un rayon de convergence $R > 0$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}/\ |z_0| < R$. Pour $|z| < R$ et $z \neq z_0$, $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$.

$\left|\dfrac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k z_0^{n-1-k}|$. Soit $\alpha > 0$ tel que le disque D centré en z_0 de rayon α soit inclus dans le disque ouvert de convergence. Soit $z \in D$. $|z| \leqslant |z_0| + \alpha < R$.

Dans ces conditions $\left|\dfrac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (|z_0| + \alpha)^k |z_0|^{n-1-k} \leqslant n(|z_0| + \alpha)^n$.

Soit $\rho \in]0,\ R[$. Considérons la série $\sum n a_n \rho^n$. Soit $r \in]\rho,\ R[$. Nous savons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n a_n \rho^n = 0$. Le rayon de convergence R' de la série entière $\sum n a_n z^n$ est donc au moins égal à R ; étant donné que $|a_n z^n| \leqslant |n a_n z^n|$ nous avons $R' \leqslant R$ donc $R = R'$. La série $\sum n(|z_0| + \alpha)^n$ est donc convergente et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(z \in D \longmapsto a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \in \mathbb{C}\right)$ converge uniformément.

Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{z\to z_0} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$. f est donc dérivable en z_0.

Nous avons donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R \Rightarrow f'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Le rayon de cette dernière série étant égal à R, f' est dérivable et il est immédiat que f est infiniment dérivable. Supposons $f^{(p)}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n$ alors

$f^{(p+1)}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1,p} z^n$ donc $a_{n,p+1} = (n+1) a_{n+1,p}$ avec $a_{n,0} = a_n$.

Nous en déduisons $a_{n,p} = \dfrac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}$. La relation est vraie pour $p = 0$.

Supposons là vraie jusqu'au rang p.

$a_{n,p+1} = (n+1) a_{n+1,p} = (n+1) \dfrac{(n+1+p)!}{(n+1)!} a_{n+1+p} = \dfrac{(n+p+1)!}{n!} a_{n+p+1}$.

Le résultat est vrai au rang $p+1$. Finalement $f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$.

En particulier $f^{(p)}(0) = p! a_p$. Nous avons bien [6] $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

4. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $R > 0$. Nous en déduisons qu'alors pour tout réel $r \in [0,\ R[$ la série de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente. Nous en déduisons que pour $p \in \mathbb{N}$ la série

   $\sum (t \in \mathbb{R} \longmapsto a_n r^n \exp(i(n-p)t) \in \mathbb{C})$ est normalement donc uniformément convergente. Nous pouvons donc écrire :
   $\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \exp(i(n-p)t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} a_n r^n \exp(i(n-p)t) dt \right)$

   c'est-à-dire $\int_0^{2\pi} f(r \exp(it)) \exp(-ipt) dt = 2\pi r^p a_p$.

   Si $r \in]0,\ R[$ alors $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(r \exp(it) \exp(-int) dt$.

   Posons [7] $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$; alors $\left| \int_0^{2\pi} f(r \exp(it)) \exp(-ipt) dt \right| \leqslant 2\pi M(r)$.

   $|2\pi r^p a_p| \leqslant 2\pi M(r)$ c'est-à-dire $|a_p| \leqslant \frac{M(r)}{r^p}$.

   Si f est développable en série entière à l'origine, de rayon de convergence infini et si f est bornée alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout réel strictement positif r on ait $\forall p \in \mathbb{N},\ |a_p| \leqslant \frac{M}{r^p}$.

   Pour $p \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{p \to +\infty} \frac{M}{r^p} = 0$ donc pour $p \in \mathbb{N}^*$ nous avons $a_p = 0$ et f est constante [8].

5. Utilisons la transformation d'Abel que nous avons vue dans les préliminaires.

6. Voir le livre "Compléments de cours " pour avoir des prolongements sur les fonctions complexes dérivables.

7. $M(r)$ existe car $t \in [0,\ 2\pi] \longmapsto |f(r \exp(it))| \in \mathbb{R}_+$ est continue

8. Dans le livre "'complément de cours" sur ce même site nous démontrons le résultat suivant : Soit f une fonction définie sur un ouvert U dérivable (holomorphe) sur U. f est infiniment dérivable sur U et pour tout $z_0 \in U$ f est développable en série entière en z_0 le rayon de convergence de la série entière étant au moins égal au rayon du plus grand disque centré en z_0 inclus dans U.

Admettons donc ce résultat ici. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant de degré $d \geqslant 1$. Supposons que ce polynôme ne possède aucune racine. Posons pour $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{1}{P(z)}$. f est dérivable sur $\mathbb{C}$. $|P(z)| = |a_d z^d| \left| \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{a_d} \frac{1}{z^{d-k}} \right|$ donc $\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$.

f est donc bornée développable en série entière de rayon infini ; f est alors constante ce qui est contradictoire donc P possède au moins un zéro puis possède d zéros.

La série $\sum a_n$ étant convergente posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$. Notons $R_{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n$. La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = R_{n-1} - R_n$. Soit p et q deux entiers naturels, $p < q$.

$$\sum_{n=p}^{q} a_n t^n = \sum_{n=p}^{q}(R_{n-1} - R_n)t^n = \sum_{n=p}^{q} R_{n-1}t^n - \sum_{n=p}^{q} R_n t^n$$
$$= \sum_{n=p-1}^{q-1} R_n t^{n+1} - \sum_{n=p}^{q} R_n t^n = R_{p-1}t^p - R_q t^q + \sum_{n=p}^{q-1} R_n(t^{n+1} - t^n).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel N tel que pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|R_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $t \in [0,\ 1]$ et pour p et q au moins égaux à $N + 1$ nous avons :

$$\left\| R_{p-1}t^p - R_q t^q + \sum_{n=p}^{q-1} R_n(t^{n+1} - t^n) \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(t^p + t^q + \sum_{n=p}^{q-1}(t^n - t^{n+1}) \right) = 2t^p\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

L'inégalité est vraie aussi pour $p = q$.

Nous en déduisons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2$, $\forall t \in [0,\ 1]$, $M \leqslant p \leqslant q \Rightarrow \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n t^n \right\| \leqslant \varepsilon$. La convergence de la série est bien uniforme sur $[0,\ 1]$.

6. Si R est le rayon de convergence d'une série entière alors cela équivaut au fait que pour tout nombre complexe z de module strictement inférieur à R $\lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$ et pour tout nombre complexe z de module strictement supérieur à R la suite de terme général $a_n z^n$ ne converge pas vers 0.
   Soit $z \in \mathbb{C},\ |z| < R^2$. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine carrée complexe de z. $\lim_{n\to+\infty} a_n\zeta^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} (a_n\zeta^n)^2 = 0 = \lim_{n\to+\infty} (a_n)^2 z^n = 0$.
   Soit $z \in \mathbb{C},\ |z| > R^2$. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine carrée complexe de z. La suite de terme général $a_n\zeta^n$ ne converge pas vers 0 (et d'ailleurs comme nous l'avons déjà rappelé) n'est pas bornée donc La suite de terme général $(a_n\zeta^n)^2 = (a_n)^2 z^n$ ne converge pas vers 0. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n)^2 z^n$ est égal à R^2.
7. Nous savons que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\right)\left(u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ (les séries sont à coefficients complexes).
   En particulier si $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont pour rayons respectifs R et $R' > 0$ alors la série entière $\sum w_n z^n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}$ possède un

rayon de convergence au moins égal à $\min(R,\ R')$.

$S_n = \sum_{p=0}^{n}(1 \cdot a_p)$ donc le rayon de convergence, R', de la série $\sum S_n z^n$ est au moins égal au minimum de celui de la série entière $\sum z^n$, c'est-à-dire 1, et celui de la série entière $\sum a_n z^n$. $R' \geqslant \min(1,\ R)$.

Pour $|z| < \min(1,\ R)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$.

Considérons la série entière de terme général $S_n z^n$ et celle dont tous les termes, $\alpha_n z^n$, sont nuls sauf les deux premiers respectivement égaux à 1 et $-z$.

Le terme général de la série entière produit est $u_n z^n$ avec $u_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}\alpha_k$.

$u_0 = S_0 = a_0$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1} = a_n$. Nous en déduisons alors

$R \geqslant \min(R',\ +\infty) = R'$ et pour $|z| < R'$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$.

Finalement $R \geqslant R'$.

Supposons $R \leqslant 1$. Nous avons alors $R' \geqslant R$ donc $R = R'$.

Supposons $R > 1$. Nous avons alors $R' \geqslant 1$. Soit $a_n = \dfrac{1}{a^n}$ avec $a > 1$. $R = a$.

$S_n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}$ sonc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{a-1}$. $R' = 1$.

Soit $a_n = \dfrac{n-1}{n!}$. $R = +\infty$. $S_0 = -1, S_1 = -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \Rightarrow S_n = -1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n-1}{n!} = -1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = -\frac{1}{n!}.$$

$R' = +\infty$.

Dans le cas $R > 1$ $R' \in [1,\ R]$.

8. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc $b_1 \in [0,\ 1]$.
Supposons que jusqu'au rang n on ait $b_n \in [0,\ 1]$.
$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n+1-k \in [0,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k] \subset [0,\ 1]}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \in [0,\ 1]$. En particulier la série entière $\sum_{n\geqslant 1} b_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
Considérons une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels entre 0 et 1 avec $b_0 = 1$. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est au moins égal à 1.
$c_0 = 0$, $c_1 = b_0 a_1 = a_1$, pour $n \geqslant 2$ $c_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$. Notons $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$ les rayons de convergences respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Pour $|z| < \min(R_1,\ R_2)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right)$. D'après l'hypothèse faite, pour $n\geqslant 1$, $c_n = b_n$ donc en notant $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ nous avons $g(z) = (1 + g(z))f(z)$. Supposons $R_2 > 1$. Les limites lorsque $z \in \mathbb{R}$ tend vers 1 à gauche éxistent et vérifient $g(1) = 1 + g(1)$ ce qui est faut donc $R_2\leqslant 1$ puis $R_2 = 1$.

9. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant N$ on ait $l - \varepsilon\leqslant \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leqslant l + \varepsilon$. Pour $n\geqslant N$ nous avons donc $(l - \varepsilon)^{n-N+1}\leqslant \displaystyle\prod_{k=N}^{n} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}\leqslant(l + \varepsilon)^{n-N+1}$ c'est-à-dire pour $n\geqslant N + 1$, $|u_N|(l - \varepsilon)^{n-N}\leqslant|u_n|\leqslant|u_N|(l + \varepsilon)^{n-N}$; relation vraie aussi pour $n = N$.
   Supposons $l = 0$. Nous avons pour $n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant|u_N|\varepsilon^{n-N}$. Soit $z \in \mathbb{C},\ |z| < \dfrac{R}{\varepsilon}$.
   Notons $\rho = |z|\varepsilon < R$. Pour $n\geqslant N$ nous avons $|a_n u_n z^n|\leqslant|u_N|\varepsilon^{-N}|a_n\rho^n|$.
   Par hypothèse la série de terme général $|a_n u_n z^n|$ est donc convergente. Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n a_n z^n$ est donc au moins égal à $\dfrac{R}{\varepsilon}$. Soit alors $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{R}{\varepsilon}$. La série entière $\sum u_n a_n z^n$ est donc convergente. le rayon de convergence est égalà $+\infty$.
   Supposons $l > 0$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*,\ |z| < \dfrac{R}{l}$. Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant $0 < \varepsilon < \dfrac{R}{|z|} - l$. D'après le choix de z ε existe.
   Notons $\rho = |z|(l + \varepsilon) < R$.
   En reprenant ce qui a été vu plus haut nous en déduisons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\geqslant N \Rightarrow |u_n a_n z^n|\leqslant|u_N|(l + \varepsilon)^{-N}|a_n|\rho^n$. la série de terme général $|u_n a_n z^n|$ est donc convergente et le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n a_n z^n$ est au moins égal à $\dfrac{R}{l}$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| > \dfrac{R}{l}$. Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant $0 < \varepsilon < l - \dfrac{R}{|z|}$. D'après le choix de z ε existe.
   Notons $\rho = |z|(l - \varepsilon) > R$.
   Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\geqslant N \Rightarrow |u_n a_n z^n|\geqslant|u_N|(l - \varepsilon)^{-N}|a_n|\rho^n$.
   La série de terme général $|u_n a_n z^n|$ est donc divergente et le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n a_n z^n$ est au plus égal à $\dfrac{R}{l}$.
   Finalement le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n a_n z^n$ est égal à $\dfrac{R}{l}$.

10. Nous avons déjà répondu à la première question à l'exercice numéro 5.
   Considérons la série entière de terme général $\sum u_n z^n$ et celle de terme général

$\sum v_n z^n$. Ces deux séries entière ont, d'après les hypothèses de convergence, un rayon de convergence au moins égal à 1. Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\sum w_n z^n$ est donc au moins égal à 1 et pour tout $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n$

D'après le résultat précédent les trois fonctions $x \in [0,\ 1] \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \in \mathbb{C}$, $x \in [0,\ 1] \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \in \mathbb{C}$ et $x \in [0,\ 1] \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n \in \mathbb{C}$ sont continues. donc en calculant la limite en 1 à gauche nous en déduisons l'égalité

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \dfrac{1}{|x|}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow 0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon$. Nous en déduisons $0 \leqslant a_n|x| < 1$. La série de terme général $(a_n|x|)^n$ est donc convergente et le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n x)^n$ est égal à $+\infty$.

    Montrons un résultat préliminaire. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Supposons que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

    $0 \leqslant u_n - u_{n+1}$, $\sum_{n=0}^{N}(u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1} \leqslant u_0$ donc la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge.

    $\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{q+1}$ donc $\sum_{k=p}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = u_p$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0).

    $0 \leqslant p u_p = \sum_{k=p}^{+\infty} p(u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1})$. La série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ étant convergente nous en déduisons $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}) = 0$ puis $\lim_{p\to+\infty} p u_p = 0$.

    Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$. Nous en déduisons qu'alors la série $\sum u_n$ converge.

    Donc si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ diverge aussi et étant à termes réels positifs $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = +\infty$.

    f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x)^n$ est continue ; elle est clairement croissante

sur $\mathbb{R}_+$. Soit alors $x \in \left[\frac{e}{a_p},\ \frac{e}{a_{p+1}}\right]$. $f(x) \geqslant f\left(\frac{e}{a_p}\right)$ soit $f(x) \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_p}\right)^n e^n \geqslant e^p$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \leqslant e$. N existe car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour tout entier naturel p, $p \geqslant N \Rightarrow a_p \leqslant e$.
$\displaystyle\int_{\frac{e}{a_p}}^{\frac{e}{a_{p+1}}} \frac{1}{x^2}\ln(f(x))dx \geqslant p\int_{\frac{e}{a_p}}^{\frac{e}{a_{p+1}}}\frac{dx}{x^2} = \frac{p}{e}(a_p - a_{p+1})$.
$\displaystyle\int_{\frac{e}{a_N}}^{\frac{e}{a_{p+1}}} \geqslant \frac{1}{e}\sum_{k=N}^{p} k(a_k - a_{k+1})$.
La série $\sum a_n$ étant divergente nous en déduisons, d'après ce qui a été démontré plus haut, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_1^{\frac{e}{a_p}}\frac{1}{x^2}\ln(f(x))dx = +\infty$.
$x \longmapsto \frac{1}{x^2}\ln(f(x))$ n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

12. f est définie sur un voisinage de 0, $V \subset \mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, développable en série entière à l'origine. $f(0)$ étant supposé non nul nous pouvons, quitte à multiplier f par une constante non nulle, supposer $f(0) = 1$.
Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière définissant f au voisinage de 0. Soit W un disque centré en 0 de rayon $R_1 \in]0,\ R[$ inclus dans V.
Supposons que pour $z \in W$ on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = 1$.
Nous recherchons une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum b_n z^n$ ait un rayon de convergence R' strictement positif et vérifie $\forall z \in V' \subset W,\ |z| < R'$, $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ où V' est un voisinage de 0 sur lequel f ne s'annule pas. V' existe car $f(0)$ est non nul et f est continue en 0.
Nous devons donc avoir $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1$ donc $b_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ c'est-à-dire $b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
Soit $r \in]0,\ R[$. La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |b_n| r^n \leqslant M(M+1)^{n-1}$.
Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $b_1 = -a_1$.
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n.
$b_{n+1}r^{n+1} = -a_{n+1}r^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k r^k\right)\left(b_{n+1-k}r^{n+1-k}\right)$.
$|b_{n+1}|r^{n+1} \leqslant M + \sum_{k=1}^{n} M^2(M+1)^{n-k} = M + M^2\frac{(M+1)^n - 1}{M} = M(M+1)^n$ d'où le résultat.

Soit $\rho < \dfrac{r}{M+1}$. Posons $a = \dfrac{\rho(M+1)}{r} \in]0,\ 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$|b_n|\rho^n = |b_n|r^n \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n \leqslant M(M+1)^n \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n = M\left(\dfrac{\rho(M+1)}{r}\right)^n = Ma^n$.
La série $\sum b_n\rho^n$ est donc convergente et le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est strictement positif. $\dfrac{1}{f}$ est bien développable en série entière à l'origine.

13. Pour $R > 0$, notons D_R le disque ouvert centré en 0 de rayon R. Notons Δ un disque ouvert de rayon ρ inclus dans $V \cap D_{R_2}$. $\forall z \in U \cap D_{R_1}$, $f(z) = z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
$\forall z \in V \cap D_{R_2}$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.
Nous savons que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Posons pour $z \in U \cap D_{R_1}$, $f_1(z) = z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$.
f_1 est continue et donc aussi $f_2 : z \in U \cap D_{R_1} \longmapsto f_1(|z|)$.
Notons $W = f_2^{-1}(\Delta) \cap D_{R_1}$. f_2 étant continue W est un ouvert contenant 0.
$z \in W \Rightarrow f_2(z) \leqslant \rho$. $\forall z \in W$, $\left|z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right| \leqslant f_2(z) \leqslant \rho$ donc $f_2(z) \in \Delta \subset V \cap D_{R_2}$.
Pour $z \in \Delta$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} z^n$ et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n\right)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{k,n} z^n$. En effet nous savons que la série produit de Cauchy de deux séries entières, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$, de rayons respectifs R_1 et R_2 strictement positifs a un rayon de convergence $R > 0$ au moins égal au minimum des deux rayons R_1 et R_2 et pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \min(R_1,\ R_2) \Rightarrow \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n\right) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n\right)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$.
Dans notre exemple nous avons donc $\alpha_{0,n} = \beta_{0,n} = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_{k+1,n} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_{k,j} a_{n-j}$, $\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_{k+1,n} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \beta_{k,j} |a_{n-j}|$.
$\forall (k,\ n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ |\alpha_{k,n}| \leqslant \beta_{k,n}$.

Considérons la série double $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_n\alpha_{n,p}z^{n+p}\right)$.

Pour $z \in W$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |\alpha_{n,p}z^{n+p}| \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_{n,p}|z^{n+p}| = (f_1(|z|))^n$. $f_1(|z|)\leqslant R_2$ donc la série double converge.

Montrons un résultat préliminaire. Soit la suite double $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$. Supposons que la série $\displaystyle\sum_q |a_{p,q}|$ converge de somme S_p ; supposons que la série $\displaystyle\sum_p S_p$ converge alors la série $\displaystyle\sum_p |a_{p,q}|$ converge de somme S'_q, la série $\displaystyle\sum_q S'_q$ converge et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=k} a_{p,q}\right)$.

Commençons par le cas d'une suite positive.

Notons, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^2$, $S_J(a) = \displaystyle\sum_{(p,q)\in J} a_{p,q}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $J_n = \{0,\ \cdots,\ n\}^2 \subset \mathbb{N}^2$. $S_{J_n}(a) = \displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} a_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{n} S_p \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} S_p = S$.

Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset J_n$; $S_J(a)\leqslant S_{J_n}(a)\leqslant S$. Les $S_J(a)$ sont majorés ; notons alors S' le réel positif $S' = \sup_J S_J(a)$. Il vient immédiatement $S'\leqslant S$.

S' étant la borne supérieure de l'ensemble des $S_J(a)$ nous en déduisons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe J une partie finie de $\mathbb{N}^2$ vérifiant $S' - \varepsilon\leqslant S_J(a)\leqslant S'$. Il existe $(p_0,\ q_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que $J \subset \{0,\ \cdots,\ p_0\} \times \{0,\ \cdots,\ q_0\} = J_{p_0,q_0}$. Les réels $a_{i,j}$ étant positifs nous en déduisons (S' étant la borne supérieure) $S_{J_{p_0,q_0}}(a)\leqslant S'\leqslant S_J(a) + \varepsilon\leqslant S_{J_{p_0,q_0}}(a) + \varepsilon$.

De même, pour $p\geqslant p_0$ et $q\geqslant q_0$ nous obtenons $S_{J_{p,q}}(a)\leqslant S'\leqslant S_{J_{p,q}}(a) + \varepsilon$.

p étant fixé $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} S_{J_{p,q}}(a) = \sum_{k=0}^{p} S_k$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} S_k\leqslant S'\leqslant \sum_{k=0}^{p} S_k + \varepsilon$ puis en calculant la limite lorsque p tend vers $+\infty$, qui existe par hypothèse, nous avons $S\leqslant S'\leqslant S - \varepsilon$. Il vient immédiatement $S = S'$. Nous avons donc $S = \sup_J S_J(a)$.

Soit $J = \{0,\ \cdots,\ p\} \times \{q\}$. $S_J(a) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_{i,q}\leqslant S$ donc $\displaystyle\sum_p a_{p,q}$ est convergente ; notons S'_q la somme de cette série. En reprenant le calcul précédent nous obtenons $S - \varepsilon\leqslant \displaystyle\sum_{j=0}^{q} S'_j\leqslant S$. Donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $J_n = \{(p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ p + q\leqslant n\}$. La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Il existe $(p_0,\ q_0)$ tel que $J \subset J_{p_0,q_0}$. Il est immédiat que nous avons $J_{p_0,q_0} \subset J_{p_0+q_0}$ donc pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^2$

il existe un entier naturel N tel que $J \subset J_N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ au moins égal à N, $J \subset J_n$. Nous en déduisons $S_J(a) \leqslant S_{J_N}(a) \leqslant S_{J_n}(a)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit J associé tel que $S - \varepsilon \leqslant S_J(a)$. Pour tout entier $n \geqslant N$ nous avons $S - \varepsilon \leqslant S_J(a) \leqslant S_{J_n}(a) \leqslant S$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{J_n}(a) = S$.

Revenons au cas où les $a_{i,j}$ ne sont pas de signe fixe. Par hypothèse $\sum\limits_q a_{p,q}$ converge car elle converge absolument et $\left| \sum\limits_{i=0}^{q} a_{i,q} \right| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{q} |a_{i,q}|$ donc la série de terme général $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ est convergente. Nous avons aussi la convergence de la série $\sum\limits_p a_{p,q}$ et de la série de terme général $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right) - \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_{i,j} \right) = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=n+1}^{+\infty} a_{i,j} \right)$ donc

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right) - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} \right) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_{i,j}| \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}| \right) - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

D'après les résultats précédents nous en déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}| \right) = 0$ donc $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_{i,j} \right)$.

De même $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_{i,j} \right)$.

$$\left| \sum_{i+j \leqslant n} a_{i,j} - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} \right) \right| = \left| \sum_{\substack{i+j>n \\ 0 \leqslant i,j \leqslant n}} a_{i,j} \right|$$
$$\leqslant \sum_{\substack{i+j>n \\ 0 \leqslant i,j \leqslant n}} |a_{i,j}| = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} |a_{i,j}| \right) - \sum_{i+j \leqslant n} |a_{i,j}|.$$

D'après les résultats vus plus haut il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i+j \leqslant n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right)$ d'où le résultat prouvé [9].

Revenons à notre question.
En appliquant ce que nous venons de voir nous en déduisons [10] que pour $z \in \Delta$

9. Il ne serait pas nécessaire de refaire cette démonstration si les familles sommables avaient été conservées dans le programme de mathématiques.
10. Dans le complément de cours qui est aussi sur ce site, l'utilisation des fonctions holomorphes

$(g\circ f)(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ avec $c_n=\sum_{p+q=n}b_q\alpha_{q,p}$.

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose $0\in U$, $f(0)\neq 0$ et f développable en série entière à l'origine de rayon strictement positif. Notons pour $|z|<1$, $g(z)=\dfrac{1}{1-z}$.

$\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1}{f(0)}g\left(\dfrac{f(0)-f(z)}{f(0)}\right)$. Notons $f_1(z)=\dfrac{f(0)-f(z)}{f(0)}$. g est développable en série entière à l'origine, $f_1(0)=0$, f_1 est développable en série entière à l'origine. Il existe $\alpha>0$ tel que pour $|z|<\alpha$ et $z\in U$ on ait $|f_1(z)|<1$ donc pour $z\in U\cap D_\alpha$, $(g\circ f)(z)$ est bien défini. Nous avons $\dfrac{1}{f(z)}=(g\circ f_1)(z)$ donc $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière à l'origine.

14. Supposons que la série entière $\sum u_nz^n$ a un rayon de convergence $R>0$. Notons, pour $|z|<R$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nz^n$. Il vient, pour $|z|<R$, $(f(z))^2=\sum_{n=0}^{+\infty}v_nz^n$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}$.

Par hypothèse $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=v_n$ nous en déduisons $\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}z^n=(f(z))^2$ c'est-à-dire $f(z)-u_0=z(f(z))^2$.
La restriction à l'intervalle réel $]-R,\ R[$ est solution de l'équation, en y, $xy^2-y+u_0=0$.
Pour $1-4xu_0\geqslant 0$ donc en particulier pour $0<|x|\leqslant\dfrac{1}{4|u_0|}$, $y=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4xu_0}}{2x}$.
Pour $x=0, y=u_0$.
Montrons que la fonction f définie par $f(0)=u_0$ et pour $0<|x|<\dfrac{1}{4|u_0|}$ par $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4xu_0}}{2x}$ est la solution.
Supposons qu'il existe $A\neq\emptyset$ et $B\neq\emptyset$ avec $A\cup B\cup\{0\}=\left]-\dfrac{1}{4|u_0|},\ \dfrac{1}{4|u_0|}\right[$ tel que pour $x\in A$, $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-4xu_0}}{2x}$ et pour $x\in B$, $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4xu_0}}{2x}$.
0 ne peut être adhérent à A car la restriction de f à A n'a pas de limite en 0.
Il existe donc $\alpha>0$ tel que $[-\alpha,\ \alpha]\setminus\{0\}\subset B$. Soit $r\in\left]0,\ \dfrac{1}{4|u_0|}\right]$, $r=\sup\{\alpha,\ [-\alpha,\ \alpha]\setminus\{0\}\subset B\}$. Si $r<\dfrac{1}{4|u_0|}$ alors $a=-r$ ou $a=r$ est adhérent à A et à B. Les restrictions de f à A et à B doivent avoir la même

permet d'obtenir une réponse plus précise à cette question.

limite en a ce qui est faux. Finalement f est bien la fonction proposée.

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4|u_0|}, \dfrac{1}{4|u_0|}\right[$, $\sqrt{1-4u_0x} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!(u_0)^n}{(n!)^2(2n-1)} x^n$ donc

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4|u_0|}, \dfrac{1}{4|u_0|}\right[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!(u_0)^{n+1}}{(n+1)(n!)^2} x^n$.

Nous en déduisons [11] $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(2n)!(u_0)^{n+1}}{(n+1)(n!)^2}$.

15. (a) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées car convergentes ; la première de limite 0 la seconde de limite A. Le rayon de convergence des séries entières $\sum \dfrac{a_n}{n!}t^n$ et $\sum \dfrac{A_n}{n!}t^n$ sont au moins égaux à celui de la série entière $\sum \dfrac{1}{n!}t^n$; ils sont donc infinis.

    D'après les propriétés des séries entières, pour tout réel t (car le rayon de convergence est infini) nous avons $f'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n$.

    De même $g'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n+1}}{n!} t^n$.

    Finalement $g'(t) - f'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n+1} - a_{n+1}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} t^n = g(t)$.

    (b) La dérivée en t de l'application $t \longmapsto (g(t) - f(t))\exp(-t)$ est égale à $((g'(t) - f'(t)) - (g(t) - f(t)))\exp(-t) = f(t)\exp(-t)$. $g(0) = f(0) = a_0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^t f(u)\exp(-u)du = (g(t) - f(t))\exp(-t)$.

    (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe de limite nulle. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

    Notons pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$.

    $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{|u_n|}{n!} |t|^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} |t|^n$.

    Nous avons donc pour $t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(t)\exp(-t)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{|u_n|}{n!} t^n \exp(-t) + \frac{\varepsilon}{2}$.

    $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{|u_n|}{n!} t^n \exp(-t) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $T \in \mathbb{R}_+$ tel que pour $t \geqslant T$ on ait $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{|u_n|}{n!} t^n \exp(-t) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)\exp(-t) = 0$.

11. En réécrivant la relation de récurrence nous en déduisons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^k C_{n+1}^{k+1}}{C_{2n}^{2k}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+2}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n - A}{n!} t^n = g(t) - A\exp(t).$$

Si nous appliquons ce résultat avec $u_n = a_n$ ou avec $u_n = A_n - A$ il vient $\lim_{t \to +\infty} f(t)\exp(-t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} g(t)\exp(-t) = A$.

Finalement $\lim_{t \to +\infty} (g(t) - f(t))\exp(-t) = A$. En utilisant la relation démontrée plus haut nous en déduisons $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t (f(u)\exp(-u))\,du = A$.

(d) Supposons que $\sum a_n$ soit absolument convergente.

$\int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!} t^n \exp(-t)dt = |a_n|$. Nous pouvons donc appliquer le théorème concernant les "échanges" intégrales et séries et nous obtenons le fait que $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f(t)\exp(-t) \in \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \exp(-t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A.$$

16. (a) $S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k(1 - x^k)\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k$.

$(1 - x^k) = (1 - x)\sum_{i=0}^{k-1} x^j$ donc pour $x \in [0,\ 1[$, $0 \leqslant 1 - x^k \leqslant k(1 - x)$.

Pour $k > n$ nous avons $1 < \frac{k}{n}$.

Finalement $|S_n - f(x)| \leqslant (1 - x)\left(\sum_{k=0}^{n} |ku_k|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |ku_k|\, x^k$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. La suite de terme général nu_n converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $n \geqslant N \Rightarrow |nu_n| \leqslant \frac{e\varepsilon}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ puis pour $n \geqslant N$, $\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |ku_k| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{e\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|u_k| = 0$. Il s'agit de la moyenne de Césaro que nous pouvons prouver de la manière suivante :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé convergente vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $n \geqslant N \Rightarrow \|x_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right\| + \frac{(n - N + 1)\varepsilon}{2n}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{N-1}x_k\right\|+\dfrac{(n-N)\varepsilon}{2n}=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $N_1\in\mathbb{N}$ tel que

$n\in\mathbb{N},\ n>\max(N,\ N_1\Rightarrow\left\|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{N-1}x_k\right\|+\dfrac{(n-N)\varepsilon}{2n}\leqslant\varepsilon.$

Nous avons donc $\left\|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}x_k\right\|\leqslant\varepsilon$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k|x_k|=0$.

Nous obtenons finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}|ku_k|+\dfrac{e\varepsilon}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Il existe alors $N\in\mathbb{N}^*$ tel que l'on ait pour tout entier n au moins égal à N, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}|ku_k|+\dfrac{e\varepsilon}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant\varepsilon$ puis pour $n\geqslant N$, $\left|S_n-f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\varepsilon$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)=0$.

(c) f possède une limite à gauche, égale à S, en 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=S$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$ c'est-à-dire série $\sum u_n$ converge et a pour somme S.

17. $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique réelle c'est-à-dire $A+{}^tA=0$. Nous avons démontré dans le chapitre 4 (Espaces euclidiens, préhilbertiens) exercice numéro 30 page 90 qu'une matrice antisymétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice B du type suivant : $B=\mathrm{Diag}(0_p,\ B_1,\ \cdots,\ B_q)$ $(n=p+2q)$ où chaque matrice B_i (pour $i\in\mathbb{N}_p$) est du type $\begin{pmatrix}0&-b_i\\ b_i&0\end{pmatrix}$ où $b_i\neq 0$. Si $A=0$ alors les B_i ne figurent pas dans la décomposition, si $\det(A)\neq 0$ alors seules les matrices B_i figurent dans la décomposition (cela n'est possible que dans le cas où n est pair). A s'écrit donc $A=PB{}^tP$ où P est une matrice orthogonale.
$\forall k\in\mathbb{N},\ (tA)^k=P(tB)^{k\,t}P$ car P est une matrice orthogonale.
L'application $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longmapsto PM{}^tP\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue donc

$\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}(tPM{}^tP)^k=P\left(\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{1}{k!}(tM)^k\right){}^tP$ c'est-à-dire
$\exp(tA)=P\exp(tB){}^tP$.
$\exp(tB)=\mathrm{Diag}(\exp(t0_p),\ \exp(tB_1),\ \cdots,\ \exp(tB_q))$. $\exp(t0_p)=I_p$.
Calculons $\exp(tB_i)$. $\forall k\in\mathbb{N},\ (B_i)^{2k}=(-1)^kb^{2k}I_2$ et $(B_i)^{2k+1}=(-1)^kb^{2k+1}B_i$.
Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\exp(tB_i)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(tb)^{2k}}{(2k)!}I_2+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(tb)^{2k+1}}{(2k+1)!}B_i\\&=\cos(tb)I_2+\sin(tb)B_i=\begin{pmatrix}\cos(tb)&-\sin(tb)\\ \sin(tb)&\cos(tb)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\exp(tB)$ est bien un élément de $SO(n)$ et donc $\exp(tA) \in SO(n)$.

18. $a_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}du = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u+n\pi}}du.$

    $0 \leqslant \sqrt{n\pi}\dfrac{\sin(u)}{2\sqrt{u+n\pi}} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n\pi}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u+n\pi}} = \frac{1}{2}\sin(u)$ donc en utilisant le théorème de convergence dominée nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n a_n \sqrt{n\pi} = 1$.

    Finalement $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}}$.

    La série entière $\sum a_n z^n$ a donc pour rayon 1.

    Pour $z = -1$, $(-1)^n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$. la série est donc divergente.

    Supposons $z = \exp(it) \neq -1$. $a_n z^n = |a_n| \exp(i(n\pi + nt))$.
    Utilisons à nouveau la transformation d'Abel déjà utilisée de nombreuses fois.
    La suite de terme général $|a_n|$ converge vers 0 et décroit ; en effet

    $|a_{n+1}| - |a_n| = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(u)\left(\frac{1}{\sqrt{u+(n+1)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{u+n\pi}}\right)du \leqslant 0$ donc la série converge.

    Finalement la série converge sur le bord du disque de convergence sauf en -1.

19. $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} = \exp((-1)^n n)\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{3n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

    Pour n pair, $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(n)\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

    Pour n impair, $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(-n)\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

    Soit $|z| < \dfrac{1}{e}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n = 0$.

    Soit $|z| > \dfrac{1}{e}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n}\right)^{4n^2} |z^{2n}| = +\infty$.

    Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$ est égal à $\dfrac{1}{e}$.

    Pour $|z| = \dfrac{1}{e}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp(n)|z| = 1$ donc le terme général de la série ne tend pas vers 0 et celle-ci diverge sur le bord du disque de convergence.

20. Nous savons [12] que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,\ 1]$.

12. Nous avons déjà vu dans le chapitre concernant les groupes et sous-groupes (exercice numéro 44 page 265) que l'ensemble, G, des réels $\{n + 2k\pi\}$ avec $(n,\ k) \in \mathbb{Z}^2$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe une infinité de couples $(n,\ k) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $-\varepsilon < n+2k\pi < \varepsilon$ (une infinité de n et une infinité de k). Il existe donc (car si $-\varepsilon < n + 2k\pi < 0$ alors $0 < (-n) + 2(-k)\pi < \varepsilon$) une infinité de couples $(n,\ k) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $0 < n + 2k\pi < \varepsilon$ (une infinité de n et une infinité de k).

En particulier pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $\sin(n) > 1-\varepsilon$. Soit alors Mat $a \in \mathbb{R},\ a > \frac{1}{e}$. En utilisant le résultat précédent avec $\varepsilon = 1+\ln(a) > 0$ nous en déduisons qu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $\sin(n) > -\ln(a)$ c'est-à-dire $\exp(\sin(n))a > 1$. Il existe φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp(\sin(\varphi(n)))a > 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\exp(\sin(\varphi(n))))^n = +\infty$. La suite de terme général $\exp(n\sin(n))a^n$ n'est pas bornée. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \exp(n\sin(n))z^n$ est au plus égal à $\dfrac{1}{e}$. La suite de terme général $\exp(n\sin(n))\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ est bornée donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \exp(n\sin(n))z^n$ est au moins égal à $\dfrac{1}{e}$. Finalement Le rayon de convergence de la série entière $\sum \exp(n\sin(n))z^n$ est égal à $\dfrac{1}{e}$.

21. Soit $\varepsilon \in \left]0,\ \dfrac{1}{4}\right[$. Soit k un entier naturel, $k \geqslant \dfrac{1}{8\varepsilon}$.
$\left[\left(\dfrac{1}{2}+2k-\varepsilon\right)^2,\ \left(\dfrac{1}{2}+2k+\varepsilon\right)^2\right]$ a pour longueur $2\varepsilon(1+4k) \geqslant 2\varepsilon(1+\dfrac{1}{2\varepsilon}) > 1$ donc contient un entier n. Nous en déduisons que pour tout $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant \dfrac{1}{8\varepsilon}$ il existe $n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2}+2k-\varepsilon \leqslant \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2}+2k+\varepsilon$.

Nous en déduisons [13] $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \sin(\pi\sqrt{n}) \geqslant \cos(\varepsilon\pi)$. En particulier pour

---

Supposons que n ne soit pas dans $\mathbb{N}$. Soit $x = n+2k\pi \in]0,\ \varepsilon[$ avec $n < 0$. Il existe une infinité d'éléments de G de la forme $p+2q\pi$ avec $p < 0$ dans l'intervalle $]0,\ x[$ (sinon il existerait un entier positif r vérifiant $r+2s\pi \in]0,\ \varepsilon[$). Pour p fixé, le nombre d'éléments de la forme $p+2q\pi \in]0,\ x[$ est fini car $-\dfrac{p}{2\pi} < q < \dfrac{x-p}{2\pi}$. L'un des p est strictement inférieur à n. Il existe donc un couple $(p,\ q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p < n$ et $0 < y = p+2q\pi < x$. $0 < x-y < \varepsilon$. $x-y = (n-p)+2(k-q)\pi$ avec $n-p > 0$. Il existe donc $(r,\ s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ tel que $0 < r+2s\pi < \varepsilon$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit enfin $y = n+2k\pi$ avec $(n,\ k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ et $0 < y < \varepsilon$.
Notons $N = E\left(\dfrac{a}{y}\right)$. $Ny \leqslant a < Ny+y$ donc $0 \leqslant a-(Nn)-2(kN)\pi < \varepsilon$. L'ensemble G_1, des réels $\{n+2k\pi\}$ avec $(n,\ k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.
Montrons que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,\ 1]$.
Soit $x \in [-1,\ 1]$. Soit $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\sin(\alpha) = x$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\sin(n)-\sin(\alpha)| < \varepsilon$. $|\sin(a)-\sin(b)| = 2\left|\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant |a-b|$.
En utilisant le résultat précédent nous en déduisons qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ et de $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a < n+2k\pi < a+\varepsilon$ donc vérifiant $|\sin(n)-x| < \varepsilon$. D'où le résultat demandé.

13. Nous pouvons en fait démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\sin(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,\ 1]$.
Soit $a \in \left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right]$ et soit $\varepsilon \in \left]0,\ \dfrac{1}{4}\right[$.
Soit $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant \dfrac{5}{16\varepsilon}$. L'intervalle d'extrémités $(a+2k)^2$ et $(a+2k+\varepsilon)^2$ a pour longueur $\varepsilon(2a+4k+\varepsilon) \geqslant \varepsilon(-1+4k+\varepsilon) > \varepsilon\left(-1+\dfrac{5}{4\varepsilon}+\varepsilon\right) = \varepsilon(\varepsilon-1)+\dfrac{5}{4} > 1$. Il existe donc un entier

$\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, il y a une infinité d'entiers naturels n tels que $\sin(\pi\sqrt{n})\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Soit alors $z \in \mathbb{C},\ a = |z| > 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$ La suite de terme général $\dfrac{\sin(\sqrt{n}\pi)}{n^\alpha} z^n$ n'est donc pas bornée et le rayon de convergence de la série est au plus égal à 1.
$\left|\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} z^n\right| \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}|z|^n$. Supposons $|z| < 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^n}{n^\alpha} = 0$ donc le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1. Finalement le rayon de convergence de la série est égal à 1.

22. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = n + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Nous obtenons alors lorsque n tend vers $+\infty$, $\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) = (-1)^n\left(\dfrac{\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.
$|\sin(\pi\sqrt{1+n^2})| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.
Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}{n^\alpha} z^n$ est le même que celui de la série entière de terme général $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}} z^n$.
Le rayon de convergence est donc, en utilisant le critère de d'Alembert par exemple, égal à 1.
Étudions le comportement au bord du disque de convergence. Pour $|z| = 1$ il s'agit d'étudier la série de terme général $(-1)^n \exp(int)\left(\dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2+\alpha}}\right)\right)$ où $t \in \mathbb{R}$.
Lorsque $1+\alpha\leqslant0$ le terme général de la série ne tend pas vers 0 et celle-ci diverge.
Supposons $1+\alpha > 0$. Pour $\alpha > 0$ $\left|\dfrac{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}}$.la série est donc absolument convergente.
Supposons $-1 < \alpha\leqslant0$.
Pour $z = -1$ le terme général de la série est égal à $\left(\dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2+\alpha}}\right)\right)$; la série diverge.
Plaçons-nous finalement dans le cas $-1 < \alpha\leqslant0$ et $z = \exp(it)$ avec $t \in]-\pi,\ \pi[$.
La série dont le terme général est $(-1)^n \exp(int) o\left(\dfrac{1}{n^{2+\alpha}}\right)$ (lorsque n tend vers $+\infty$) converge absolument.

---

naturel n dans cet intervalle ; c'est-à-dire
$\forall\varepsilon \in \left]0,\ \dfrac{1}{4}\right[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k\geqslant\dfrac{1}{8\varepsilon},\ \exists n \in \mathbb{N},\ a\leqslant\sqrt{n} - 2k\leqslant\varepsilon + a$. Donc $\sin(\pi a)\leqslant\sin(\pi(\sqrt{n}-2k))\leqslant\sin(\pi a + \pi\varepsilon)$
c'est-à-dire $0\leqslant\sin(\pi\sqrt{n}) - \sin(\pi a)\leqslant\sin(\pi a + \pi\varepsilon) - \sin(\pi a) = 2\sin\left(\dfrac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi(\sqrt{n}+a)}{2}\right)\leqslant\pi\varepsilon$.
Nous faisons le même raisonnement lorsque $a \in \left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$. D'où la conclusion.

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \exp(ikt) = \frac{1+(-1)^n \exp(i(n+1)t)}{1+\exp(it)}$.

$|S_n| \leqslant \dfrac{1}{1+\cos(t)}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n \exp(int)\dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}} = (S_n - S_{n-1})\dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}}$.

La suite de terme général $\dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}}$ décroit et converge vers 0. Soient m et n deux entiers naturels non nuls, $m \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}(-1)^k \exp(ikt)\frac{\pi}{2k^{1+\alpha}} &= \sum_{k=m}^{n} S_k \frac{\pi}{2k^{1+\alpha}} - \sum_{k=m}^{n} S_{k-1}\frac{\pi}{2k^{1+\alpha}} \\
&= \sum_{k=m}^{n} S_k \frac{\pi}{2k^{1+\alpha}} - \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k \frac{\pi}{2(k+1)^{1+\alpha}} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} S_k \left(\frac{\pi}{2k^{1+\alpha}} - \frac{\pi}{2(k+1)^{1+\alpha}}\right) + S_n \frac{\pi}{2n^{1+\alpha}} - S_{m-1}\frac{\pi}{2m^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=m}^{n}(-1)^k \exp(ikt)\frac{\pi}{2k^{1+\alpha}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{1+\cos(t)}\left(\sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2k^{1+\alpha}} - \frac{\pi}{2(k+1)^{1+\alpha}}\right) + \frac{\pi}{2n^{1+\alpha}} + \frac{\pi}{2m^{1+\alpha}}\right) \\
&= \frac{1}{1+\cos(t)}\left(2\frac{\pi}{2m^{1+\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\cos(t)}\left(2\frac{\pi}{2m^{1+\alpha}}\right) = 0.$

En appliquant le critère de Cauchy nous en déduisons que la série de terme général $\dfrac{\pi}{2n^{1+\alpha}}\exp(int)$ converge lorsque $t \in]-\pi,\ \pi[$ et $-1 < \alpha \leqslant 0$.

23. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a+kd}$.

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{a+(n+1)d}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$.

En utilisant le critère de d'Alembert nous obtenons que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ où a et d sont deux réels strictement positifs est égal à $+\infty$.

Notons pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. $dxf'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ndb_n x^n$

donc $dxf'(x) + af(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(nd+a)b_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}x^n = 1 + xf(x)$.

f est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $dxy' + (a-x)y = 1$ (1).

Soit I l'un des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

Pour $x \in I$, les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) sont

les applications $\lambda\varphi$ où $\varphi\,:\,x\in I\longmapsto \lambda|x|^{-\frac{a}{d}}\exp\left(\dfrac{x}{d}\right)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
En utilisant la méthode de la variation de la constante nous obtenons en cherchant une solution du type $u(x)\varphi(x)$ nous obtenons $u'(x)=\dfrac{1}{dx}|x|^{\frac{a}{d}}\exp\left(-\dfrac{x}{d}\right)$.
Notons $\varepsilon=\pm1=\operatorname{sgn}(x)$.
Une solution particulière de (1) définie sur I est alors définie par
$g\,:\,x\in I\longmapsto \dfrac{\varepsilon}{d}|x|^{-\frac{a}{d}}\exp\left(\dfrac{x}{d}\right)\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}-1}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt.$
$\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}-1}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt$ est bien défini car $\dfrac{a}{d}>0$.
$x\in\mathbb{R}\longmapsto \displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}-1}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt$ est continue, nulle en 0.
En intégrant par parties nous obtenons
$\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}-1}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt=\dfrac{\varepsilon d}{a}|x|^{\frac{a}{d}}\exp\left(-\dfrac{x}{d}\right)+\dfrac{1}{a}\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt.$
Pour $x\geqslant 0$, $\left|\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt\right|\leqslant\left|\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}}dt\right|$,
pour $x\leqslant 0$, $\left|\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt\right|\leqslant\exp\left(\dfrac{|x|}{d}\right)\left|\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}}dt\right|$ donc dans tous les cas $\left|\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt\right|\leqslant\exp\left(\dfrac{|x|}{d}\right)\dfrac{d}{a(a+d)}|x|^{\frac{a}{d}+1}$.
Nous en déduisons $\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}-1}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\varepsilon d}{a}|x|^{\frac{a}{d}}$.
Finalement $g(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{a}$.
Les solutions de (1) sont donc définies par $x\in I\longmapsto g(x)+\lambda\varphi(x)$. Pour λ non nul les fonctions précédentes ont une limite infinie en 0 donc seule g est solution de (1) prolongeable par continuité en 0. Nous en déduisons
$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{\varepsilon}{d}|x|^{-\frac{a}{d}}\exp\left(\dfrac{x}{d}\right)\displaystyle\int_0^x |t|^{\frac{a}{d}-1}\exp\left(-\dfrac{t}{d}\right)dt\,;\ f(0)=\dfrac{1}{a}.$
Par exemple pour $a=d=1$ nous obtenons
$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{1}{x}\exp(x)\displaystyle\int_0^x \exp(-t)\,dt=\dfrac{\exp(x)-1}{x}\,;\ f(0)=1.$

24. (a) Si la série $\sum g_n$ de fonctions continues converge uniformément alors sa somme, S, est une fonction continue. $S(1)$ doit exister donc $\sum f(1)$ converge ce qui nécessite $f(1)=0$.
Pour $t\in[0,\ 1[$ nous avons $S(t)=\dfrac{f(t)}{1-t}=-\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$.
La continuité de S en 1 implique la dérivabilité de f en 1 et
$S(1)=0=-\displaystyle\lim_{t\to1^-}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=-f'(1).$
Supposons $f(1)=f'(1)=0$.

la série $\sum g_n$ converge sur $[0,\ 1]$. Montrons que la convergence est uniforme.
$S_{p,q}(t) = \displaystyle\sum_{k=p}^{q} g_k(t) = f(t)t^p \frac{1-t^{q-p+1}}{1-t}$. $|S_{p,q}(t)| \leqslant t^p \left|\dfrac{f(t)-f(1)}{1-t}\right|$.
$\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{f(t)-f(1)}{1-t} = 0$ donc pour $\varepsilon > 0$ donné il existe $\alpha \in]0,\ 1[$ tel que pour$t \in]1-\alpha,\ 1[$ on ait $\left|\dfrac{f(t)-f(1)}{1-t}\right| \leqslant \varepsilon$.
Nous avons donc pour $t \in]1-\alpha,\ 1[$ $|S_{p,q}(t)| \leqslant \varepsilon$. $S_{p,q}(1) = 0$. La continuité de f implique qu'il existe M_ε tel que pour $t \in [0,\ ]1-\alpha]$, nous ayons $\left|\dfrac{f(t)}{1-t}\right| \leqslant M_\varepsilon$.
Pour $t \in [0,\ ]1-\alpha]$, nous avons $|S_{p,q}(t)| \leqslant (1-\alpha)^p M_\varepsilon$.
$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (1-\alpha)^p M_\varepsilon = 0$ donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geqslant N$ et pour $t \in [0,\ 1-\alpha]$ on ait $|S_{p,q}(t)| \leqslant \varepsilon$. Finalement il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple $(p,\ q)$ d'entiers on ait $\forall t \in [0,\ 1],\ q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=p}^{q} t^k f(t)\right| \leqslant \varepsilon$.
$\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$.

(b) i. Par hypothèse φ est définie sur $[0,\ 1[$. les coefficients a_n étant positifs la fonction φ est croissante donc possède une limite, l, réelle ou égale à $+\infty$ en 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,\ 1[,\ \varphi(t) \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. En calculant la limite en 1 à gauche nous obtenons $\forall n \in \mathbb{N},\ l \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Si l est réel alors la série $\sum a_n$ est convergente ce qui est faux donc $l = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = +\infty$.

ii. La série $\sum g_n(1)$ doit converger donc si $f(1) \neq 0$ cela est impossible ; il faut donc avoir $f(1) = 0$.
Chaque application g_n est continue en 1 ; la convergence étant uniforme la somme φf est continue en 1 et
$\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \varphi(t)f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t\to 1^-} a_n t^n f(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(1) = 0.$
Supposons $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \varphi(t)f(t) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha \in]0,\ 1[$ tel que pour $t \in [1-\alpha,\ 1[$ on ait $0 \leqslant \varphi(t)|f(t)| \leqslant \varepsilon$.
Pour $t \in [1-\alpha,\ 1[$ nous avons donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_n t^n |f(t)| \leqslant \varphi(t)|f(t)| \leqslant \varepsilon$.
Soit alors $t \in [0,\ 1-\alpha]$. f est continue sur $[0,\ 1]$ donc est bornée.

$$\sum_{k=p}^{q} a_n t^n |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{k=p}^{q} a_n(1-\alpha)^n.$$

la convergence de la série implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow \|f\|_\infty \sum_{k=p}^{q} a_n(1-\alpha)^n \leqslant \varepsilon$. Nous avons donc pour $t \in [0,\ 1]$ et pour $q \geqslant p \geqslant N$ $\left|\sum_{k=p}^{q} g_k(t)\right| \leqslant \varepsilon$.

La convergence de la série est bien uniforme.

iii. L'hypothèse $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t)f(t) = 0$ implique nécessairement que f a pour limite 0 en 1 à gauche car φ a pour limite $+\infty$. On peut alors prolonger f en lui donnant la valeur 0 en 1. Posons $\widetilde{g_n}(t) = a_n t^n f(t)$ pour $t \in [0,\ 1[$ et $\widetilde{g_n}(1) = 0$ et, en utilisant le résultat précédent, la série $\sum \widetilde{g_n}$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$; nous en déduisons que $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,\ 1[$.

En utilisant les résultats concernant la convergence uniforme nous en déduisons que si f une limite en 1 à gauche alors φf a une limite, l, en 1 à gauche, la série $\sum a_n l$ converge et a pour somme $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t)f(t)$.

Nous en déduisons comme plus haut $l = 0$ et $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t)f(t) = 0$.

La convergence uniforme de la série $\sum g_n$ implique que pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p,\ q,\ t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times [0,\ 1[$ on ait $q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow |f(t)| \sum_{k=p}^{q} a_k t^k \leqslant \varepsilon$. En particulier $|f(t)| \sum_{k=N}^{+\infty} a_k t^k \leqslant \varepsilon$.

$\lim_{t\to 1^-} \dfrac{\varepsilon}{\sum_{k=N}^{+\infty} a_k t^k} = 0$ donc il existe $\alpha \in]0,\ 1[$ tel que $t \in [1-\alpha,\ 1[\Rightarrow |f(t)| \leqslant \varepsilon$.

f a donc une limite nulle en 1.

L'équivalence précédente a donc encore lieu.

25. (a) Pour $t > 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2(-1)^n \exp(-(2n+1)t))$. Donc

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{ch}(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2(-1)^n \exp(-(2n+1)t)\sin(xt)).$$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} (2(-1)^n \exp(-(2n+1)t)\sin(xt))$$

$$= 2(-1)^{N+1}\sin(xt)\exp(-(2N+3)t)\frac{1}{1+\exp(-2t)}$$

donc $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (2(-1)^n \exp(-(2n+1)t)\sin(xt))\right| \leqslant 2\exp(-(2N+3)t)$ et

$$\left|\int_0^{+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}(2(-1)^n\exp(-(2n+1)t)\sin(xt))\,dt\right|$$
$$\leqslant 2\int_0^{+\infty}\exp(-(2N+3)t)dt=\frac{2}{2N+3}.$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{ch}(t)}=0$, $t\in\mathbb{R}_+\longmapsto\dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{ch}(t)}\in\mathbb{R}$ est continue donc intégrable.

Chaque fonction $t\in\mathbb{R}_+\longmapsto 2(-1)^n\exp(-(2n+1)t)\sin(xt)\in\mathbb{R}$ est intégrable. Nous avons donc

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\operatorname{ch}(t)}dt-\sum_{k=0}^{N}\left(\int_0^{+\infty}(2(-1)^n\exp(-(2n+1)t)\sin(xt)\right)dt)\right|\leqslant\frac{2}{2N+3}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\operatorname{ch}(t)}dt=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}(2(-1)^n\exp(-(2n+1)t)\sin(xt))\,dt.$$

1mm] $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-(2n+1)t)\exp(ixt)dt=\Im m\left(\frac{1}{2n+1-ix}\right)=\frac{x}{x^2+(2n+1)^2}.$

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\operatorname{ch}(t)}dt=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx}{x^2+(2n+1)^2}.$

(b) En reprenant le calcul précédent nous obtenons

$$\int_0^{+\infty}\frac{\exp(ixt)}{\operatorname{ch}(t)}dt=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+ix)}{x^2+(2n+1)^2}.$$

Supposons $|x|<1$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\exp(ixt)}{\operatorname{ch}(t)}dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ixt)^n}{n!\operatorname{ch}(t)}\right)dt.$$

L'application $t\in\mathbb{R}_+\longmapsto\dfrac{(ixt)^n}{n!\operatorname{ch}(t)}\in\mathbb{C}$ est continue intégrable.

$\left|\dfrac{(ixt)^n}{n!\operatorname{ch}(t)}\right|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}2t^n\exp(-t)$ donc

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(ixt)^n}{n!\operatorname{ch}(t)}\right|dt\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\int_0^{+\infty}2t^n\exp(-t)dt=2|x|^n.$$

La série $\sum 2|x|^n$ est convergente donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\exp(ixt)}{\operatorname{ch}(t)}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(ix)^n}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{\operatorname{ch}(t)}\right)dt \text{ c'est-à-dire}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(ix)^n}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{\operatorname{ch}(t)}\right)dt=2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1-ix}.$$

Supposons à nouveau $|x|<1$. $\displaystyle\frac{1}{2p+1-ix}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{(2p+1)^{n+1}}.$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^p(ix)^n}{(2p+1)^{n+1}}\right| = \frac{|x|}{(2p+1)(2p+1-|x|)}$.

Lorsque p tend vers $+\infty$, $\displaystyle\frac{|x|}{(2p+1)(2p+1-|x|)} = O\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

Nous pouvons appliquer le théorème concernant les séries doubles et en déduire :

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(ix)^n}{(2p+1)^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{n+1}}i^n\right)x^n$ puis

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p(ix)^n}{(2p+1)^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{n+1}}i^n\right)x^n$ c'est-à-dire

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1-ix} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{n+1}}i^n\right)x^n$ soit encore

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(ix)^n}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{\mathrm{ch}(t)}\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{n+1}}i^n\right)x^n$.

L'unicité du développement d'une fonction en série entière conduit alors à : $\displaystyle 2n!\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{n+1}} = \int_0^{+\infty}\frac{t^n}{\mathrm{ch}(t)}dt$.

26. Posons, pour $t\in]0,\ 1]$, $u(t)=\exp(xt\ln(t))$ et $u(0)=1$. $\lim_{t\to 0^+}u(t)=1$. u est continue sur $[0,\ 1]$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall (x,\ t)\in\mathbb{R}\times]0,\ 1],\ u(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n(t\ln(t))^n}{n!}$.

Soit $p\in\mathbb{N}$ donné. Pour $q\in\mathbb{N}$, notons $I_q=\displaystyle\int_0^1 t^p(\ln(t))^q dt$. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\sqrt{t}(\ln(t))^q=0$ donc I_q est bien définie.

Soit $a\in]0,\ 1]$. En intégrant par parties, pour $(p,\ q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, nous avons

$$\int_a^1 t^p(\ln(t))^q dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln(t))^q\right]_a^1 - \frac{q}{p+1}\int_a^1 t^p(\ln(t))^{q-1}dt.$$

En calculant la limite lorsque a tend vers 0 nous en déduisons $I_q = -\dfrac{q}{p+1}I_{q-1}$ puis, I_0 étant égal à $\dfrac{1}{p+1}$, $I_q=\dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Finalement $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n(t\ln(t))^n}{n!}dt = \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)^{n+1}}$.

ln étant de signe fixe sur $]0,\ 1]$, $u_n=\displaystyle\int_0^1\left|\frac{x^n(t\ln(t))^n}{n!}\right|dt = \frac{|x|^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Pour $x\neq 0$, $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|x|}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$ donc $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{|x|}{ne}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème concernant "l'échange" des intégrales et des sommes de séries et en déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

27. Pour $x \in]-1,\ 1[$ nous avons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$.

 Nous avons donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{1-x^3}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{3n+2}(3n+2)}$.

 $\displaystyle\frac{x}{1-x^3} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$. En multipliant par $1-x$ et en substituant 1 à x nous obtenons $a = \dfrac{1}{3}$. En multipliant par x et en calculant la limite en $+\infty$ nous obtenons $b = \dfrac{1}{3}$. Enfin en choisissant $x = 0$ nous obtenons $c = -\dfrac{1}{3}$.

 $$\frac{x}{1-x^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

 Une primitive de l'application $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^3}$ est donc l'application

 $$x \longmapsto -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{atan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

 $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{3n}(3n+2)} = \frac{3}{2}\ln\frac{13}{4} - 3\sqrt{3}\operatorname{atan}\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

 Une valeur approchée de cette somme est : $0,50758363247010693650301236195$.

28. Notons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Soit $E = \{x \in \mathbb{R},\ -x \notin \mathbb{N},^*\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$. La série alternée de terme général $u_n(x)$ est convergente car $n > \max(0,\ -x) \longmapsto |u_n(x)|$ décroit et converge vers 0.

 Notons pour $x \in E$ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

 u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^{p+n}p!}{(x+n)^{p+1}}$.

 En utilisant les propriétés des séries alternées nous avons pour $n \geqslant 1 + |x|$

 $$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^{(p)}(x)\right| \leqslant |u_{n+1}^{(p)}(x)| = \frac{p!}{|x+n+1|^{p+1}}.$$

 Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$. Soit $x \in E$, $x \geqslant a$. Soit $n > -a$. $n + x \geqslant n + a \geqslant 1$ donc

 $$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^{(p)}(x)\right| \leqslant |u_{n+1}^{(p)}(x)| = \frac{p!}{|a+n+1|^{p+1}}.$$

 La convergence de la série est donc uniforme et la restriction de f à $E \cap]a,\ +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. a étant quelconque nous en déduisons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

 Nous avons la relation $\forall (p,\ x) \in \mathbb{N} \times E,\ f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n}p!}{(x+n)^{p+1}}$.

Soit $x \in]-1,\ +\infty[$. Posons $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$. En reprenant le même raisonnement que plus haut nous en déduisons que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2,\ +\infty[$ et $\forall (p,\ x) \in \mathbb{N} \times]-2,\ +\infty[,\ g^{(p)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n} p!}{(x+n)^{p+1}}$.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral nous avons

$$g(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{p!} \int_0^x (x-t)^p g^{(p+1)}(t)dt.$$

La convergence de la série définissant $g^{(k)}$ étant uniforme sur l'intervalle fermé d'extrémités 0 et x (avec $x > -2$) nous avons

$$\int_0^x (x-t)^p g^{(p+1)}(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \left((-1)^{n+p+1} (p+1)! \int_0^x \frac{(x-t)^p}{(t+n)^{p+2}} dt \right).$$

Supposons $0 \leqslant x < 2$.

$$\left| (-1)^{n+p+1} (p+1) \int_0^x \frac{(x-t)^p}{(t+n)^{p+2}} dt \right| \leqslant \frac{p+1}{n^{p+2}} \int_0^x (x-t)^p dt = \frac{x^{p+1}}{n^{p+2}}.$$

$$0 \leqslant \frac{x^{p+1}}{n^{p+2}} = \left(\frac{x}{n}\right)^p \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} \left(p \in \mathbb{N}^* \longmapsto \frac{x^{p+1}}{n^{p+2}} \in \mathbb{R} \right)$ converge uniformément donc

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{n^{p+2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\lim_{p \to +\infty} \frac{x^{p+1}}{n^{p+2}} \right) = 0.$$

Nous en déduisons : $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p!} \int_0^x (x-t)^p g^{(p+1)}(t)dt = 0$.

Supposons $-2 < x < 0$.

$$\left| (-1)^{n+p+1} (p+1) \int_0^x \frac{(x-t)^p}{(t+n)^{p+2}} dt \right| \leqslant \frac{p+1}{(n+x)^{p+2}} \int_x^0 (t-x)^p dt = \frac{|x|^{p+1}}{(n+x)^{p+2}}.$$

Pour $n \geqslant 4$, $0 \leqslant \frac{|x|^{p+2}}{p!(n+x)^{p+2}} = \left(\frac{|x|}{n+x} \right)^p \frac{|x|}{p!(n+x)^2} \leqslant \frac{|x|}{(n+x)^2}$.

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} \left(p \in \mathbb{N}^* \longmapsto \frac{|x|^{p+1}}{p!(n+x)^{p+2}} \in \mathbb{R} \right)$ converge uniformément donc $\lim_{p \to +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|x|^{p+1}}{p!(n+x)^{p+2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\lim_{p \to +\infty} \frac{|x|^{p+1}}{p!(n+x)^{p+2}} \right) = 0$.

Nous en déduisons $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p!} \int_x^0 (t-x)^p g^{(p+1)}(t)dt = 0$.

Nous avons donc pour $|x| < 2$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

$x \in]-1,\ 1[\longmapsto \frac{-1}{x+1} \in \mathbb{R}$ est développable en série entière à l'origine donc

$x \in]-1,\ 1[\longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \in \mathbb{R}$ est développable en série entière à l'origine.

Nous avons finalement $\forall x \in]-1,\ 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$ avec $a_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n}}{n^{p+1}}$.

Nous pouvons faire une autre démonstration de ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in]-1,\ 1[,\ \dfrac{1}{x+n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^p}{n^{p+1}}$.

Considérons la série double $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^p}{n^{p+1}} \right)$.

$\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^{n+p} x^p|}{n^{p+1}} = \frac{|x|}{n(n-|x|)}$; $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{|x|}{n(n-|x|)}$ converge donc la série double est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^p}{n^{p+1}} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^p}{n^{p+1}} \right)$.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge ; nous avons donc

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^p}{n^{p+1}} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^p}{n^{p+1}} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ c'est-à-dire

$\forall x \in]-1,\ 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^p}{n^{p+1}} \right)$.

29. • Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \dfrac{1-\cos(2x)}{2x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1-\cos(2x)}{2x^2} = -\dfrac{1}{x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+2)!}$.

• $\cos(x)\operatorname{ch}(x) = \dfrac{(\exp(ix)+\exp(-ix))(\exp(x)+\exp(-x))}{4}$

$= \dfrac{\exp((i+1)x)+\exp((i-1)x))+\exp((-i+1)x)+\exp((-i-1)x)}{4}$.

La fonction exponentielle est développable en série entière de rayon infini donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)\operatorname{ch}(x) = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^n + (i-1)^n + (-i+1)^n + (-i-1)^n}{n!} x^n$.

Lorsque n est impair $a_n = (i+1)^n + (i-1)^n + (-i+1)^n + (-i-1)^n$ est nul.

$(i+1)^2 = 2i,\ (i-1)^2 = -2i.\ a_{2p} = 2^{p+1}(i^p + (-i)^p)$.

a_{2p} est nul pour p impair ; $a_{4q} = (-1)^q 4^{q+1}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{4^q (-1)^q x^{4q}}{(4q)!}$.

• $x \in]-1,\ 1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,\ 1[\longmapsto \operatorname{asin}(x) \in \mathbb{R}$ sont deux ap-

plications développables en séries entières à l'origine de rayons de convergence égaux à 1. Le produit est donc développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.
Si le rayon est strictement supérieur à 1 alors la somme de la série définit une fonction continue en 1 donc $f\ :\ x \in]-1,\ 1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{asin}(x) \in \mathbb{R}$ possède une limite réelle en 1 ce qui n'est pas le cas donc la fonction proposée est développable en série entière de rayon de convergence égal à 1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
$f'(x) = \dfrac{x}{1-x^2} f(x) + \dfrac{1}{1-x^2}$ donc $\forall x \in]-1,\ 1[\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$.

Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-1,\ 1[\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$, car f est impaire.

$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}$. La relation entre f et f' conduit à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)a_{n-1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n} - 1 = 0.$$

L'unicité du développement en série entière nous donne alors
$a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n+1)a_n = 2na_{n-1}$. Les coefficients a_n sont tous non nuls et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$. Il vient alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Nous en déduisons $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{asin}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 2x\cos(a) + 1)$.
f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{2x - 2\cos(a)}{x^2 - 2x\cos(a) + 1}$.

La fraction rationnelle à coefficients complexes $\dfrac{2X - 2\cos(a)}{X^2 - 2X\cos(a) + 1}$ se décompose en éléments simples ; nous obtenons :

$$\frac{2X - 2\cos(a)}{X^2 - 2X\cos(a) + 1} = \frac{1}{X - \exp(ia)} + \frac{1}{X - \exp(-ia)}.$$

Pour $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ nous avons

$\dfrac{1}{z - \exp(ia)} = -\dfrac{\exp(-ia)}{1 - z\exp(-ia)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -\exp(-i(n+1)a) z^n$. De même

$\dfrac{1}{z - \exp(-ia)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -\exp(i(n+1)a) z^n$. En additionnant nous obtenons

$$\frac{2z - 2\cos(a)}{z^2 - 2z\cos(a) + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-2\cos((n+1)a)\right] z^n.$$

Étudions la convergence de la suite de terme général $\cos(n\theta)$.
Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ la suite est constante et converge vers 1.
Si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, $\cos(n\theta) = (-1)^n$ et la suite diverge.
Supposons, pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, que cette suite converge vers l.
$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$,
$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$.
En additionnant nous en déduisons $l = l\cos(\theta)$.
$\cos(\theta)$ étant différent de 1 nous obtenons $l = 0$ puis, $\sin(\theta)$ étant non nul $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = 0$. Cela est impossible car $\sin^2 + \cos^2 = 1$.
La suite de terme général $\cos(n\theta)$ ne converge pas sauf dans le cas $\cos(\theta) = 1$ où elle est constante.
Dans tous les cas la suite de terme général $\cos(n\theta)$ ne converge pas vers 0. Nous aurions pu nous limiter à cela pour conclure [14] plus rapidement que la série de terme général $\cos(n\theta)$ est divergente. Nous en déduisons que le rayon de convergence de la série entière $\sum [-2\cos((n+1)a)]\, z^n$ est égal à 1.

Pour $x \in]-1,\ 1[$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{2t - 2\cos(a)}{t^2 - 2t\cos(a) + 1}dt &= \ln(x^2 - 2x\cos(a) + 1)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2\cos((n+1)a)}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2\cos(na)}{n}x^n.\end{aligned}$$

• $\forall (x,\ t) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}\exp(-t)}{1+t^2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Notons, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}\exp(-t)}{1+t^2}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. u_n est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt &= \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}\exp(-t)}{1+t^2}dt\\ &\leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^{2n+1}\exp(-t)dt = |x|^{2n+1}.\end{aligned}$$

La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt$ converge donc pour $|x| < 1$.
Nous en déduisons que pour $|x| < 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}\exp(-t)}{1+t^2}dt\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Notons pour $n \in \mathbb{N},\ b_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}\exp(-t)}{1+t^2}dt$.

$$b_n - b_{n+1} = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^{2n+1}\exp(-t)dt = (-1)^n(2n+1)!.$$

14. Supposons que la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n\theta) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 2(\cos(n\theta))^2 - 1 = -1$. Nous aboutissons à une contradiction. La suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

$\sum_{k=0}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)!$ donc
$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_0 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)!$.

• $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{\exp(t)-1}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n!}$. La fonction est alors prolongeable par continuité en 0. Nous savons que la convergence d'une série entière est uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans l'intervalle ouvert de convergence donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x \frac{\exp(t)-1}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{nn!}$.

• Comme précédemment, $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{\sin(t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$ donc
$\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

• $\forall t \in]-1,\ 1[,\ \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$.

Nous savons que si deux fonctions f et g sont développables en séries entières à l'origine de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 et vérifient $\forall x \in]-R_1,\ R_1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ et $\forall x \in]-R_2,\ R_2[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$ alors la fonction fg est développable en série entière de rayon de convergence R au moins égal au plus petit des deux réels R_1 et R_2 et vérifie :
$\forall x \in]-R,\ R[,\ f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$.

Ici, $a_0 = b_0 = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Nous en déduisons $c_0 = 0,\ c_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ c_n = \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{k}\dfrac{(-1)^{n-k}}{n-k}$.

$\dfrac{1}{k(n-k)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n-k}\right)$ donc $\forall n \geqslant 2,\ c_n = \dfrac{2(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}$.

En fait la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$ converge uniformément sur $[-a,\ 1]$ pour tout $a \in [0,\ 1[$. En effet, la convergence est uniforme sur $[-a,\ a]$ d'après les propriétés des séries entières. Pour $x \in [0,\ 1]$, la suite de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ est décroissante car $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ et donc $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\dfrac{n}{x^n} = \dfrac{n}{n+1}x \leqslant 1$.

Nous en déduisons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$.

La somme de la série définit donc une fonction continue sur $]-1,\ 1]$ et

$\ln(2) = \lim_{t \to 1^-} \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Nous avons bien $\forall t \in]-1,\ 1]$ $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

Lorsque une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ converge en R, alors la série entière converge uniformément sur l'intervalle $[0,\ R]$.

Pour $t \in [0,\ 1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n t^n$ converge par hypothèse.

Notons $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Soient p et q deux entiers naturels non nuls avec $p < q$.

$$\sum_{k=p}^{q} a_k R^k t^k = \sum_{k=p}^{q} (S_{k-1} - S_k) t^k = \sum_{k=p-1}^{q-1} S_k t^{k+1} - \sum_{k=p}^{q} S_k t^k$$
$$= S_{p-1} t^p - S_q t^q + \sum_{k=p}^{q-1} S_k (t^{k+1} - t^k).$$

Pour $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour $n \geqslant N \Rightarrow \|R_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k R^k t^k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(t^q + t^p + \sum_{k=p}^{q-1} (t^k - t^{k+1})\right) = \varepsilon t^p \leqslant \varepsilon.$$

La série $\sum a_k R^k t^k$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$ et définit une fonction continue sur cet intervalle.

$$|c_{n+1}| - |c_n| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) \leqslant 0.$$

La suite $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0 donc la série alternée de terme général c_n est convergente. Nous avons donc pour tout x appartenant à $]-1,\ 1]$, $(\ln(1+x))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n x^n$.

- $\frac{z \operatorname{sh}(\alpha)}{z^2 - 2\operatorname{ch}(\alpha) z + 1} = \frac{1}{2(1 - z\exp(\alpha))} - \frac{1}{2(1 - z\exp(-\alpha))}$.

Pour $|z| < \exp(-\alpha)$ nous avons

$$\frac{1}{2(1 - z\exp(\alpha))} - \frac{1}{2(1 - z\exp(-\alpha))} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\exp(n\alpha) - \exp(-n\alpha))\, z^n.$$

Donc pour $|z| < \exp(-\alpha)$ nous avons $\frac{z \operatorname{sh}(\alpha)}{z^2 - 2\operatorname{ch}(\alpha) z + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sh}(n\alpha) z^n$.

• Posons $f(x) = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-x}\right) & \text{si} \quad x < \cos(\theta) \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = \cos(\theta) \\ \pi + \operatorname{atan}\left(\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-x}\right) & \text{si} \quad x > \cos(\theta) \end{cases}$.

$\lim\limits_{x \to \cos(\theta)^+} f(x) = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{x \to \cos(\theta)^-} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A = \mathbb{R} \backslash \{\cos(\theta)\}$. Pour $x \in A$ nous avons $f'(x) = \dfrac{\sin(\theta)}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1}$.
f' possède une limite en $\cos(\theta)$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; de dérivée en tout point x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\sin(\theta)}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1}$.

$$\frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1 - x\exp(i\theta)} - \frac{1}{1 - x\exp(-i\theta)}\right).$$

Pour $|x| < 1$ nous avons

$$\frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}(\exp(in\theta) - \exp(-in\theta))\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n.$$

Pour $x \in]-1,\ 1[$ nous avons donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin((n-1)\theta)}{n}x^n$.

• Commençons par redémontrer un résultat déjà vu de nombreuses fois.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^n dt$.

En utilisant le théorème de convergence dominée nous en déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En intégrant par parties nous obtenons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^n dt = \Big[-\cos(t)(\sin(t))^{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)(\sin(t))^{n-2}dt$$

c'est-à-dire $I_n = (n-1)(I_n - I_{n-2})$ soit encore $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; nous avons donc $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2nI_{2n} = (2n-1)I_{2(n-1)}$ et $(2n+1)I_{2n+1} = 2nI_{2(n-1)+1}$.

Nous obtenons donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \dfrac{2}{\pi}(2n+1)(I_{2n})^2$.

Nous avons l'équivalence[15] suivante $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

15. Nous pouvons obtenir cette équivalence en utilisant la formule de Stirling :

Revenons à notre exercice.

$\forall t \in]-1,\ 1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi} I_n t^n$ donc

$\forall x \in]-1,\ 1[\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2(\sin(t))^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi} I_n x^{2n}(\sin(t))^{2n}$.

La série de terme général $\dfrac{2}{\pi} I_n x^{2n} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{2n} dt = (I_n)^2 x^{2n}$ est convergente pour $|x| < 1$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2(\sin(t))^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!^2}{(2^n n!)^4} x^{2n}$.

La suite de terme général $(I_{2n})^2$ est décroissante et converge vers 0 donc la série précédente converge en $x = \pm 1$. En utilisant le résultat démontré plus haut, nous en déduisons que l'égalité précédente est vraie pour $|x| \leqslant 1$. En utilisant le critère de d'Alembert nous obtenons que le rayon de convergence de la série est égal à 1.

• Posons pour $x \in]-1,\ 1[\ f(x) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\tan(\alpha)$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = -\dfrac{\sin(2\alpha)}{x^2 + 2x\cos(2\alpha) + 1}$.

Nous avons déjà développé en série entière une telle fonction. Nous avons obtenu pour $|x| < 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1 - x\exp(i(2\alpha+\pi))} - \frac{1}{1 - x\exp(-i(2\alpha+\pi))}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin(2n\alpha) x^n. \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et x nous obtenons $f(x) = \alpha - \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin((2n-2)\alpha) x^n$.

• $$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} &= \frac{1}{2(z-1)} - \frac{(1+i)}{4(z+i)} - \frac{(1-i)}{4(z-i)} \\ &= -\frac{1}{2(1-z)} - \frac{(1-i)}{4(1-zi)} - \frac{(1+i)}{4(1+zi)}. \end{aligned}$$

Pour $|z| < 1$ nous avons

$$-\frac{1}{2(1-z)} - \frac{(1-i)}{4(1-zi)} - \frac{(1+i)}{4(1+zi)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i^n}{4}\left(1 - i + (-1)^n(1+i)\right)\right) z^n.$$

$$a_n = -\frac{1}{2} - \frac{i^n}{4}\left(1 - i + (-1)^n(1+i)\right) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 4p,\ p \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } n = 4p+1,\ p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 4p+2,\ p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 4p,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à 1 car pour $|z| > 1$, le terme général ne tend pas vers 0.
Nous pouvons aussi dire que si le rayon est strictement supérieur à 1 alors la somme de la série définit une fonction continue sur le disque ouvert de convergence et la fonction doit posséder une limite en 1 par exemple ; ce qui est faux.

30. Soient R_1 et R_2 deux réels strictement positifs. Soit $a \in]0,\ R_1R_2[$.
Soit $a_1 \in \left]\dfrac{a}{R_2},\ R_1\right[$. Posons $a_2 = \dfrac{a}{a_1} \in \left]\dfrac{a}{R_1},\ R_2\right[$. Si $R_1 = +\infty$ ou $R_2 = +\infty$ le raisonnement précédent s'applique avec $\dfrac{a}{R_1} = 0$ ou $\dfrac{a}{R_2} = 0$.
Il existe donc deux réels strictement positifs $a_1 < R_1$ et $a_2 < R_2$ tel que $a_1a_2 = a$.
Soit alors $z \in \mathbb{C},\ |z| < R_1R_2$. Soit $a \in]|z|,\ R_1R_2[$. Soient $\alpha_1 \in]0,\ R_1[$ et $\alpha_2 \in]0,\ R_2[$ tels que $\alpha_1\alpha_2 = a$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(\alpha_1)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(\alpha_2)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_na^n = 0$. La série $\sum |a_nb_nz^n|$ est convergente ; nous en déduisons que le rayon R de la série entière $\sum a_nb_nz^n$ est au moins égal à R_1R_2. Nous ne pouvons obtenir un meilleur résultat.
Supposons $a_n = 1$ lorsque n est pair et nul sinon ; supposons $b_n = 1$ lorsque n est impair et nul sinon. $R_1 = R_2 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_nb_n = 0$ donc $R = +\infty$.
De même supposons $a_n = 1$ lorsque n est pair et égal à $\dfrac{1}{a^n}$ (avec $a > 1$) sinon et supposons $b_n = 1$ lorsque n est impair et égal à $\dfrac{1}{b^n}$ (avec $b > 1$) sinon. $R_1 = 1,\ R_2 = 1$. a_nb_n est égal à $\dfrac{1}{a^n}$ lorsque n est impair et à $\dfrac{1}{b^n}$ dans le cas contraire. $R = \min(a,\ b)$ et $R_1R_2 = 1$. On peut donc obtenir des rayons prenant toutes les valeurs supérieures à 1.
dans le cas où $R_1 = 0$ et $R_2 = +\infty$ nous pouvons aussi obtenir diverses valeurs pour R.
Par exemple $a_n = n!,\ b_n = \dfrac{1}{b^n n!}$ avec $b \in \mathbb{R}_+^*$. $R_1 = 0,\ R_2 = +\infty$. $a_nb_n = \dfrac{1}{b^n}$ et $R = b$.
Avec $b_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$ $a_nb_n = \dfrac{1}{n!}$ et $R = +\infty$.

31. Si R est le rayon de convergence de la série $\sum a_nz^n$ alors la série $\sum a_nz^{2n}$ converge absolument lorsque $|z|^2 < R$ et diverge lorsque $|z|^2 > R$. La rayon de convergence de la série entière $\sum b_nz^n$ est égal à $\sqrt{R}$.

32. • Soit $x \in [0,\ 1[$. Nous avons $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$.
$f\ :\ x \in]0,\ 1] \longmapsto x^{2n}\ln(x) \in \mathbb{R}$ est continue ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}x^{2n}\ln(x) = 0$ donc f est intégrable.

Soit $a \in]0,\ 1[$. En intégrant par parties nous avons :

$$\int_a^1 x^{2n}\ln(x)dx = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\ln(x)\right]_a^1 - \frac{1}{2n+1}\int_a^1 x^{2n}$$
$$= \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\ln(x) - \frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}\right]_a^1.$$

En calculant la limite en 0 à droite nous avons $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\ln(x)dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$.

La série de terme général $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}|\ln(x)|dx$ est convergente donc

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}.$$

• Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\displaystyle\frac{x^2}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2\exp(-(n+1)x)$.

$f_n\ :\ x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^2\exp(-(n+1)x) \in \mathbb{R}$ est continue.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(x^2\exp(-(n+1)x)\right) = 0$ donc f_n est intégrable. En intégrant deux fois par parties nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\exp(-(n+1)x)dx = \frac{2}{(n+1)^3}$.

la série de terme général $\displaystyle\frac{2}{(n+1)^3}$ est convergente donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

33. • $\displaystyle\sum\frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. $\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$,

Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\exp(jz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{j^n z^n}{n!}$, $\exp(\overline{j}\ z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\overline{j}^{\ n} z^n}{n!}$.

$1 + 2\cos\left(\dfrac{2p\pi}{3}\right) \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 3k$.

$1 + j^n + \overline{j}^{\ n} = 1 + 2\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k$, de même

$1 + j^{n+1} + \overline{j}^{\ n+1} \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k-1$ et

$1 + j^{n-1} + \overline{j}^{\ n-1} \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k+1$. Nous en déduisons

$$\exp(z) + \exp(jz) + \exp(\overline{j}\ z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + j^{3n} + \overline{j}^{\ 3n}\right)\frac{z^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3z^{3n}}{(3n)!}.$$

De même $\exp(z) + j\exp(jz) + \overline{j}\exp(\overline{j}\,z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3z^{3n-1}}{(3n-1)!}$

et $\exp(z) + \overline{j}\exp(jz) + j\exp(\overline{j}\,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3z^{3n+1}}{(3n+1)!}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} z^n$. (par convention $n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
En utilisant le critère de d'Alembert nous obtenons le fait que le rayon de convergence de la série est égal à $+\infty$. La famille $\left(\displaystyle\prod_{j=0}^{l-1}(X-j)\right)_{l \in \mathbb{N}_k}$ à laquelle on adjoint le polynôme 1 est une base de $\mathbb{C}_k[X]$.
Notons, pour $l \in \mathbb{N}^*$, P_l le polynôme $\displaystyle\prod_{j=0}^{l-1}(X-j)$ et P_0 le polynôme 1.

$\forall k \in \mathbb{N},\ X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_{j,k} P_j$ donc $\displaystyle\frac{n^k}{n!} = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \frac{P_j(n)}{n!}$.

$$\frac{P_j(n)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j > n \\ \dfrac{1}{(n-j)!} & \text{si} \quad j \leqslant n \end{cases}.$$

Nous en déduisons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} z^n = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{n=j}^{+\infty} a_{j,k} \frac{z^{n-j}}{(n-j)!} \right) z^j = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} z^j \exp(z)$.

Soit alors $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} b_i X^i$. En utilisant les notations précédentes nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n = \left(\sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \right) b_k z^k \right) \exp(z).$$

Par exemple $n^3 - 2n + 1 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) - n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n!} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} z^3 + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} z^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} z + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= (z^3 + 3z^2 - z + 1) \exp(z). \end{aligned}$$

• Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $R_p = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X+k)$ et $P_0 = 1$. $\forall n \in \mathbb{N},\ R_p(n) = p! C_{n+p}^p$.

Comme[16] pour $z \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1, \forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\frac{p!}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_p(n) z^n$.

Le résultat est vrai pour $p = 0$. Supposons-le vrai jusqu'au rang p.

$$\frac{(p+1)!}{(1-z)^p} \frac{1}{1-z} = (p+1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_p(n) z^n \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

En utilisant les résultats concernant les séries produit nous en déduisons que le terme général $a_n z^n$ de la série produit des deux séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (p+1) R_p(n) z^n$

16. En regardant le livre, sur ce même site, concernant les fonctions holomorphes vous retrouverez ce résultat de manière naturelle.

et $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est défini par $a_n = \sum_{k=0}^{n} (p+1) R_p(k) = (p+1)! \sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p}$.

$\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p}$ est le coefficient de X^p du polynôme $\sum_{k=0}^{n+p} (1+X)^k$ c'est-à-dire du polynôme $\dfrac{(1+X)^{n+p+1}-1}{X}$. Il s'agit donc du coefficient de X^{p+1} du polynôme $(1+X)^{n+p+1}$ c'est-à-dire C_{n+p+1}^{p+1}.

Nous en déduisons $a_n = (p+1)! \dfrac{(n+p+1)!}{n!(p+1)!} = \dfrac{(n+p+1)!}{n!} = R_{p+1}(n)$.

Le résultat est donc prouvé au rang $p+1$. Il est vrai pour tout entier p.

Comme nous l'avons vu à l'exercice précédent, $n^k = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} P_j(n)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_j(n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P_j(n+j) z^{n+j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+j)!}{n!} z^{n+j} = z^j \frac{j!}{(1-z)^{j+1}}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{j=0}^{N} b_j X^j$.

Nous en déduisons $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) z^n = \sum_{k=0}^{N} \left(b_k \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \dfrac{j! z^j}{(1-z)^{j+1}} \right)$.

Exemple $P(n) = n^2 + n + 1$. $P(n) = n(n-1) + 2n + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1) z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) z^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\ &= z^2 \frac{2}{(1-z)^3} + z \frac{2}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{1+z^2}{(1-z)^3}.\end{aligned}$$

34. Nous savons que si une série entière a un rayon $R > 0$ alors pour tout nombre complexe z de module strictement inférieur à R la série converge absolument et en particulier la suite de terme général $a_n z^n$ converge vers 0. Pour tout nombre complexe z de module strictement supérieur à R la série diverge et la suite de terme général $a_n z^n$ n'est pas bornée [17]. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $r \in]0,\ R[$.

17. Soit E l'ensemble des modules des nombres complexes tels que la suite de terme général $a_n z^n$ soit bornée.
$0 \in E$. Soit $R \in \overline{\mathbb{R}}$ la borne supérieure de E. Supposons $R \neq 0$. Soit $r \in [0,\ R[$. Il existe $r' \in]r,\ R[\cap E$. $a_n r^n = a_n r'^n \left(\dfrac{r}{r'}\right)^n$ donc Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r'^n| \leqslant M$ donc $|a_n r^n| \leqslant M \left(\dfrac{r}{r'}\right)^n$.

La série de terme général $M \left(\dfrac{r}{r'}\right)^n$ est convergente donc la série de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente.
Si $R < +\infty$, soit $r \in]R,\ +\infty[$.
Par hypothèse la suite de terme général $a_n r^n$ n'est pas bornée donc la série de terme général $a_n r^n$ est divergente. R est le rayon de convergence de la série.
$|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ absolument convergente.

$\dfrac{a_n}{n!}z^n = a_n r^n \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n$. Soit M un majorant de la suite de terme général $|a_n|r^n$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{a_n}{n!}z^n\right| \leqslant M\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$. La série de terme général $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n$ est absolument convergente donc la série de terme général $\dfrac{a_n}{n!}z^n$ l'est aussi. Le rayon de convergence de cette série est donc égal à $+\infty$.
$t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{a_n}{n!}z^n t^n \exp(-t) \in \mathbb{C}$ est continue intégrable.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!}z^n t^n \exp(-t)dt = a_n z^n,\ \int_0^{+\infty} \left|\frac{a_n}{n!}z^n t^n \exp(-t)\right| dt = |a_n z^n|.$
La série $\sum |a_n z^n|$ est convergente pour $|z| < R$ donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R$,

$$\int_0^{+\infty} F(zt)\exp(-t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!}z^n t^n \exp(-t)dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

35. (a) $u_0 = u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (-1)^n + 2u_n + u_{n+1}$.
$1 = u_0 \leqslant 2^1 - 1,\ 1 = u_1 \leqslant 2^2 - 1$. Supposons avoir prouvé l'inégalité $1 \leqslant u_p \leqslant 2^{p+1} - 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}_n$.
$(-1)^n + 2u_{n-1} + u_n \geqslant -1 + 2 + 1 \geqslant 2 \geqslant 1$.
$(-1)^n + 2u_{n-1} + u_n \leqslant 1 + 2\,2^n - 2 + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 2 \leqslant 2^{n+2} - 1$.
L'inégalité est donc démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$|u_n z^n| \leqslant 2|2z|^n$. Le rayon de convergence, R, de la série entière $\sum a_n z^n$ est bien au moins égal à $\dfrac{1}{2}$.

(b) Notons $S(z)$ la somme de la série entière $\sum a_n z^n$. Pour $|z| < \min(R,\ 1)$ nous avons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}z^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^{n+2}$.
Nous obtenons la relation $S(z) - 1 - z = \dfrac{z^2}{1+z} + 2z^2 S(z) + z(S(z) - 1)$
c'est-à-dire $S(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z+1)(1-z-2z^2)} = \dfrac{z^2+z+1}{(1+z)^2(1-2z)}$.
$\dfrac{z^2+z+1}{(1+z)^2(1-2z)} = -\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{1+z} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(1+z)^2} + \dfrac{7}{9}\dfrac{1}{1-2z}$.
Le rayon de convergence est donc gal à $\dfrac{1}{2}$ et

$$S(z) = -\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)z^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}2^n z^n.$$

Nous en déduisons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n(3n+2)}{9} + \dfrac{7}{9}2^n$.

$|z| > R \Rightarrow (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0 \Rightarrow |z| \leqslant R$.
$\sum a_n z^n$ convergente $\Rightarrow |z| \leqslant R$. Nous aurions pu définir E comme l'ensemble des modules des nombres complexes z tels que la suite de terme général $a_n r^n$ tend vers 0 et prouver que la borne supérieure de cet ensemble est encore R.

36. Nous recherchons l'existence d'une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $b_n x^n$ ait un rayon de convergence, R, strictement positif et telle que la somme $f(x)$ de la série vérifie $f(x) = (1-ax)f(ax)$. Cette relation est bien définissable car pour $|x| < R$, $|ax| < R$.

$$f(ax) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n x^n.$$

$$(1-ax)f(ax) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^{n+1} x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} a^n x^n.$$

$$(1-ax)f(ax) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n-1}) a^n x^n.$$

La condition recherchée est donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = (b_n - b_{n-1})a^n$ c'est-à-dire $b_n = \dfrac{a^n}{a^n - 1} b_{n-1}$. Finalement il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = b_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a^k}{a^k - 1}$.

En utilisant le critère de d'Alembert nous obtenons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|b_n|}{|b_{n-1}|} = 0$ donc la série entière de terme général $b_n x^n$ a un rayon de convergence infini et f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

D'après l'hypothèse faite sur f, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - a^k x)\right) f(a^n x)$.

Soit x réel fixé. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n x = 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $n \geqslant N \Rightarrow |a^n x| < 1$.

$\ln(1 - a^n x) \underset{n\to+\infty}{\sim} -a^n x$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant N} \ln(1 - a^n x)$ est donc convergente c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=N}^{n} \ln(1 - a^k x) = l \in \mathbb{R}$.

Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=N}^{n} (1 - a^k x) = \exp(l)$. La suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - a^k x)$ est donc convergente. Nous la notons $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - a^k x)$.

Nous obtenons, puisque f est continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - a^k x)$.

Nous retrouvons le fait que l'ensemble des solutions f est un espace vectoriel de dimension 1 et nous avons la relation $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - a^k x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{a^k}{a^k - 1}\right) x^n$.

37. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} x^n\right| \leqslant \dfrac{|x^n|}{\sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$ donc d'après le critère de d'Alembert et la caractérisation du rayon de convergence d'une série nous obtenons $R\geqslant 1$.
$\cos\left(\sqrt{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{2} \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\sqrt{n}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+2k\pi.$
À quelle condition existe-t-il pour $k\in\mathbb{N}$ un entier naturel n vérifiant
$\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)^2\leqslant n\leqslant\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)^2.$
Il suffit pour cela que $\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)^2-\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)^2>1$ c'est-à-dire $\dfrac{8k\pi^2}{3}>1$.
Cette condition est réalisée pour $k\in\mathbb{N}^*$. Supposons $|x|>1$. Nous avons donc

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \exists n\in\mathbb{N},\ \cos(\sqrt{n})\geqslant\dfrac{1}{2}$ soit encore $\left|\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right|\geqslant\dfrac{1}{2}\dfrac{|x|^{(2k\pi-\frac{\pi}{3})2}}{2k\pi+\frac{\pi}{3}}$.

$\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{|x|^{(2k\pi-\frac{\pi}{3})2}}{2k\pi+\frac{\pi}{3}}=+\infty$ donc la suite de terme général $\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}x^n$ n'est pas bornée et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ diverge pour $|x|>1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est donc égal à 1.

Étudions le cas $x=1$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $N_1=1+E\left(\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$ et $N_2=E\left(\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$.

$$\sum_{k=N_1}^{N_2}\frac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=N_1}^{1+N_2}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{2}\int_{N_1}^{1+N_2}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{1+N_2}-\sqrt{N_1}$$
$$\geqslant 2n\pi+\frac{\pi}{3}-\sqrt{1+\left(2n\pi-\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)^2-1-\left(2n\pi-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2n\pi+\frac{\pi}{3}-\sqrt{1+\left(2n\pi-\frac{\pi}{3}\right)^2}}$$
$$=\frac{8n\frac{\pi^2}{3}-1}{2n\pi+\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\left(2n\pi-\frac{\pi}{3}\right)^2}}.$$

Le dernier terme est équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, à $\dfrac{2\pi}{3}$.
Le critère de Cauchy permet donc de conclure à la divergence de la série.

38. Supposons $f(1)=0$. f est continue donc pour $\varepsilon>0$ il existe $\alpha\in]0,\ 1[$ vérifiant $\forall t\in[\alpha,\ 1],\ |f(t)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\left|\displaystyle\int_0^1 t^nf(t)dt\right|\leqslant\displaystyle\int_0^\alpha t^n|f(t)|dt+\dfrac{\varepsilon}{2}\displaystyle\int_\alpha^1 t^ndt.$
Nous en déduisons $\left|\displaystyle\int_0^1 t^nf(t)dt\right|\leqslant\dfrac{1}{n+1}\left(\|f\|_\infty\alpha^{n+1}+\dfrac{\varepsilon}{2}\right).$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^{n+1}=0$ donc il existe $N\in\mathbb{N}$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Rightarrow\|f\|_\infty\alpha^{n+1}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Nous en déduisons pour $n \geqslant N$ $(n+1)|a_n| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)a_n = 0$.

Revenons au cas général.

$$\begin{aligned}(n+1)a_n &= (-1)^n(n+1)\left(\int_0^1 t^n(f(t)-f(1))dt + \frac{1}{n+1}f(1)\right)\\ &= (-1)^n(n+1)\int_0^1 t^n(f(t)-f(1))dt + (-1)^n f(1).\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent nous en déduisons $(n+1)a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n f(1)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc le même que celui de la série entière $\sum \frac{1}{n}x^n$ c'est-à-dire 1.

Soit $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 (-1)^n t^n x^n f(t)dt\right)$.

$|(-1)^n t^n x^n f(t)| \leqslant \|f\|_\infty |x|^n$. La série de terme général $\|f\|_\infty|x|^n$ est convergente donc la série de fonctions $t \in [0,\ 1] \longmapsto (-1)^n t^n x^n f(t) \in \mathbb{R}$ converge uniformément ; nous en déduisons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 (-1)^n t^n x^n f(t)dt\right)\\ &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n x^n f(t)\right)dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+tx}dt.\end{aligned}$$

Supposons $x = \exp(i\theta)$. $a_n x^n = \displaystyle\int_0^1 (t^n \exp(i(\pi+\theta)n)f(t))\,dt$. $|t^n f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} t^n f(t) = 0$ pour $t \in [0,\ 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$.

Supposons $\pi + \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ c'est-à-dire $x \neq -1$. En utilisant la transformation d'Abel, vue au début de ce livre, étant donné que la suite de terme général

$\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$ est décroissante et converge vers 0 et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(in(\theta+\pi))$ est bornée alors la série $\sum a_n x^n$ converge.

Pour $x = -1$, $a_n x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$. La série $\sum a_n x^n$ diverge.

39. $f(t)$ est défini si et seulement si $t < 1$.
Notons $u_n(x) = t^n(\cos(x))^{2n}$. $\|u_n\|_\infty = |t|^n$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement pour $|t| < 1$.

Nous obtenons naturellement, pour $|t(\cos(x))^2| < 1$, $F(x) = \dfrac{1}{1 - t\cos(x)^2}$.

Pour $|t| < 1$ nous avons donc $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x))^{2n}dx\right)t^n\right)$.

f est donc développable en série entière de rayon $R \geqslant 1$.
Si le rayon est strictement plus grand que 1 alors la série définit une fonction

continue en 1 et f possède une limite réelle à gauche en 1.
En utilisant le changement de variable $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto u = \tan(x) \in \mathbb{R}_+$ puis $u \in \mathbb{R}_+ \longmapsto v = \frac{u}{\sqrt{1-t}} \in \mathbb{R}_+$ nous obtenons

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-t(\cos(x))^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)\left(1-t\frac{1}{1+u^2}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1-t+u^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-t}}.$$

$\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = +\infty$. Le rayon de convergence de la série est donc égal à 1. Par ailleurs nous avons pour $|t| < 1$

$$f(t) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{n!}(-t)^n\right).$$

Finalement il vient $f(t) = \frac{\pi}{2}\left(\sum\limits_{n=}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n\right)$. L'unicité du développement en série entière conduit donc à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n}dx = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
Nous retrouvons facilement alors que le rayon de convergence de la série définissant f est égal à 1.

40. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{2n+2}z^{2n+2}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = l_1 l_2 |z|^2$ et de même $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{2n+3}z^{2n+3}}{a_{2n+1}z^{2n+1}}\right| = l_1 l_2 |z|^2$.
Les rayons de convergence des séries entières $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ sont donc égaux à $R = \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2}}$. Le rayon de convergence de la série entière somme des deux séries entières est donc au moins égal à R. Pour $|z| > R$, la suite de terme général $a_{2n}z^{2n}$ ne tend pas vers 0 donc la suite de terme général $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 et la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\sqrt{l_1 l_2}}$.

41. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - 2(u_n + v_n) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1} - u_n = 2u_{n+1} - 3u_n$.
L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 3 = 0$ a pour racines $1 + i\sqrt{2}$ et $1 - i\sqrt{2}$. Nous en déduisons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\sqrt{3})^n(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta))$ avec $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
$u_0 = a$, $u_1 = a + b\sqrt{2}$. Il vient donc $a = u_0$ et $b = -v_0\sqrt{2}$.
Nous obtenons de la même manière
$v_{n+2} = u_n - 2v_n + v_{n+1} = v_{n+1} - v_n - 2v_n + v_{n+1} = 2v_{n+1} - 3v_n$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (\sqrt{3})^n(v_0\cos(n\theta) + \frac{u_0}{\sqrt{2}}\sin(n\theta))$.

$|u_n| \leqslant K(\sqrt{3})^n)$, $|v_n| \leqslant K(\sqrt{3})^n)$ les rayons de convergence des deux séries entières sont infinis.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$.

$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n - 2v_n}{n!} x^n = f(x) - 2g(x)$.

De même $g'(x) = f(x) + g(x)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La résolution de l'équation différentielle $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ conduit à $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \end{pmatrix}$ avec $f(0) = u_0$ et $g(0) = v_0$.

Les valeurs propres de A sont $1 \pm i\sqrt{2}$. Nous obtenons donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp((1 - i\sqrt{2})t) & 0 \\ 0 & \exp((1 + i\sqrt{2})t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc $\exp(t) \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{2}) & -\sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t\sqrt{2}) & \cos(t\sqrt{2}) \end{pmatrix}$.

Finalement $f(t) = \exp(t)\left(u_0 \cos(t\sqrt{2}) - \sqrt{2} v_0 \sin(t\sqrt{2})\right)$ et

$$g(t) = \exp(t)\left(u_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t\sqrt{2}) + v_0 \cos(t\sqrt{2})\right).$$

Nous pouvions employer une autre méthode de résolution.
$f''(x) = f'(x) - 2(f(x) + g(x)) = f'(x) - 2f(x) + f'(x) - g(x) = 2f'(x) - 3f(x)$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 3 = 0$. Il vient alors
$f(x) = \exp(x)(a\cos(x\sqrt{2}) + b\sin(x\sqrt{2}))$.
$f(0) = a = u_0$, $f'(0) = a + b\sqrt{2} = f(0) - 2g(0) = u_0 - 2v_0$.
Nous obtenons le même résultat qu'au dessus.

42. Pour $x \neq 1$, $f(x) = \exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+1}$.

Pour $|x| < 1$, $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+n)!}{p!n!} x^p$ car $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est la valeur de la dérivée $n^{ième}$ en x de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$.

La série de terme général $\frac{(p+n)!}{p!n!(n+1)!} |x|^{n+p+1}$ converge et a pour somme

$\dfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\left(\dfrac{1}{1-|x|}\right)^{n+1}$. La série de terme général ce dernier terme est convergente.
En utilisant le résultat vu au début de ce chapitre, concernant la composition de deux fonctions développables en séries entières, nous avons :
Soit la suite double $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
Supposons que la série $\displaystyle\sum_q |a_{p,q}|$ converge de somme S_p ; supposons que la série $\displaystyle\sum_p S_p$ converge alors la série $\displaystyle\sum_p |a_{p,q}|$ converge de somme S'_q, la série $\displaystyle\sum_q S'_q$ converge et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=p+q} a_{p,q}\right)$.
Nous obtenons $\exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=1+\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{k!}{(k-p)!p!(k-p+1)!}x^{k+1}\right)$.
f est développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. Si le rayon est strictement supérieur à 1 alors la série définit une fonction continue en 1 et f possède alors une limite finie à gauche en 1 ce qui est faux. Le rayon de convergence de la série est donc égal à 1.
Posons, pour $k\geqslant 1$, $a_k=\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{(k-p)!p!(k-p-1)!}=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{(k-p+1)!}C_{k-1}^{p-1}$ et $a_0=1$.
Nous obtenons $\exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.
Remarque f vérifie $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}f(x)$ et $f(0)=1$. f restreinte à $]-\infty,\ 1[$ est l'unique solution définie sur $]-\infty,\ 1[$ valant 1 en 0 et solution de l'équation différentielle $(1-x)^2y'=y$.
Recherchons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence strictement positif et dont la somme vérifie la relation vérifiée par f.
Nous devons avoir $a_0=1$ et
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}2na_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$. Nous en déduisons $a_1=a_0=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1}-(2n+1)a_n+(n-1)a_{n-1}=0$.

43. $$\forall t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],\ 1+x(\sin(t))^2>0 \iff \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \text{ou} \\ x<0 \text{ et } \forall t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],\ (\sin(t))^2<-\dfrac{1}{x}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \text{ou} \\ x<0 \text{ et } x>-1\end{cases}$$

Pour $x \in]-1,\ +\infty[$, $t \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \longmapsto \ln(1+x(\sin(t))^2) \in \mathbb{R}$ est continue.
Que se passe-t-il pour $x = -1$?
Lorsque t tend vers $\dfrac{\pi}{2}^-$, $\ln(\cos(t)) = \ln\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) - \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} + o\left(\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3\right)$.
$t \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \ln(\cos(t)) \in \mathbb{R}$ est intégrable. f est donc définie sur $[-1,\ +\infty[$.
Pour $(x,\ t) \in [-1,\ 1] \times \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $2\ln(\cos(t)) \leqslant \ln(1+x(\sin(t))^2) \leqslant \ln(1+(\sin(t))^2)$
donc $|\ln(1+x(\sin(t))^2)| \leqslant -2\ln(\cos(t))$.
L'application $g\ :\ (t,\ x) \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[\times [-1,\ 1] \longmapsto \ln(1+x(\sin(t))^2) \in \mathbb{R}$ est continue donc l'application f est continue sur $[-1,\ 1]$.
Pour $|x| < 1$ nous avons $\ln(1+x(\sin(t))^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x(\sin(t))^2)^{n+1}}{n+1}$.
$\left|(-1)^n \dfrac{(x(\sin(t))^2)^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$; La série de fonctions précédente (de la variable t) converge donc uniformément et nous en déduisons :
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{2n+2} dt\right)$.
Nous avons de nombreuses fois calculé l'intégrale proposée ; nous obtenons
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi (2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} x^{n+1}$. Notons $a_n = \dfrac{(-1)^n \pi (2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}$; $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{2n+1}{2n+4}$.
La série entière $\sum a_n x^{n+1}$ a pour rayon de convergence 1.
Nous avons déjà vu que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.
La série précédente converge donc pour $x = 1$ et pour $x = -1$. Comme nous l'avons déjà vu nous en déduisons que l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ est donc vraie pour $x \in [-1,\ 1]$.
g est de classe $\mathcal{C}^1$; $\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,\ x) = \dfrac{(\sin(t))^2}{1+x(\sin(t))^2}$.
Soit a fixé. Pour $x \geqslant -a > -1$, $0 \leqslant \dfrac{\partial g}{\partial x}(t,\ x) \leqslant \dfrac{(\sin(t))^2}{1-a(\sin(t))^2}$.
f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,\ 1]$ et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(t))^2}{1+x(\sin(t))^2} dt$. Le changement de variable $t \longmapsto u = \tan(t)$ conduit à $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)} du$.
$\dfrac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+u^2} - \dfrac{1}{1+(x+1)u^2}\right)$.

Nous obtenons donc $f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x\sqrt{1+x}}$ puis $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t\sqrt{1+t}}dt$.
En utilisant le changement de variable $t \longmapsto v = \sqrt{1+t}$ nous obtenons
$f(x) = \pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{1+x}} \dfrac{1}{1+v}dv = \pi\Big(\ln(1+\sqrt{1+x}) - \ln(2)\Big)$.
La relation précédente définit $f(x)$ pour $x \in [-1,\ 1]$ car f est continue sur $[-1,\ 1]$.
Il vient $\forall x \in [-1,\ 1],\ \ln(1+\sqrt{1+x}) - \ln(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}x^{n+1}$.

En particulier $f(-1) = -\pi\ln(2) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\pi(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}$ et

$f(1) = \pi(\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(2)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\pi(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}$.
En retranchant ces deux relations nous obtenons
$\ln(1+\sqrt{2}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(4n)!}{(2n+1)(4^n(2n)!)^2}$.

44. $\forall x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2} \in \mathbb{R}$ est continue ;
$\forall (x,\ t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \left|\dfrac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2}\right| \leqslant \exp(-t)$.
La fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall (x,\ t) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}x^{2n+1}\exp(-t)}{(1+t^2)(2n+1)!}$.
Notons $u_n(t) = (-1)^n\dfrac{t^{2n+1}x^{2n+1}\exp(-t)}{(1+t^2)(2n+1)!}$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt = \left(\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{2n+1}\exp(-t)}{(1+t^2)}\right)\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{2n+1}\exp(-t)}{(1+t^2)}dt \leqslant \int_0^{+\infty}t^{2n+1}\exp(-t)dt = (2n+1)!$ donc
$\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt \leqslant |x|^{2n+1}$.
Pour $|x| < 1$ la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt]$ converge. Nous en déduisons que $\forall x \in]-1,\ 1[$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u_n(t)dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{2n+1}\exp(-t)}{1+t^2}dt\right)\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$.
f est donc développable en série entière à l'origine ; le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1.

Notons $g(x,\ t) = \dfrac{\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2}$.

g est continue ; $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t\cos(xt)\exp(-t)}{1+t^2}$; $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\exp(-t)$.

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{-t^2\sin(xt)\exp(-t)}{1+t^2}$; $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant t^2\exp(-t)$.

f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$f(x) - f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(tx)\exp(-t)dt = \Im m\left(\int_0^{+\infty}\exp((ix-1)t)dt\right) = \frac{x}{1+x^2}$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière à l'origine définie plus haut. La somme des deux séries (de f et $-f''$) a un rayon de convergence $R' \geqslant R \geqslant 1$. Il est égal au rayon de convergence de la série entière définissant $\dfrac{x}{1+x^2}$. Nous en déduisons $R' = 1$ puis $R = 1$.

45. f définie par $f(x) = \exp(x^2)\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)dt$ est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ produit de deux fonctions développables en séries entières de rayons de convergence infinis. f est donc développable en série entière de rayon de convergence infini. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xf(x) + 1$.

   Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$. Nous obtenons la relation

   $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^{2n}$. Par unicité du développement en série entière nous obtenons $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n+1)a_n = 2a_{n-1}$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{4^n n!}{(2n+1)!}$.

   Remarque $f(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right)$. Nous en déduisons, avec la notation précédente, $a_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!)(n-j)!(2j+1)}$.

   Nous obtenons donc la relation $\dfrac{4^n n!}{(2n+1)!} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!)(n-j)!(2j+1)}$.

   $\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{(2j+1)}C_n^j X^{2j+1}\right)' = (1-X^2)^n$ donc

   $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2n+1}dt$.

46. Pour $|x| < 1$, $\left|\dfrac{\sin((2n+1)a)}{2n+1}x^{2n+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n+1}|x|^{2n+1}$. Le rayon de convergence

de la série entière est donc au moins égal à 1.
La série dérivée a le même rayon de convergence que la série initiale. Redémontrons un résultat déjà vu concernant les limites éventuelles des suites de termes généraux $\sin((2n+1)a),\ a \in \mathbb{R}$.
Supposons $\cos(2a) = 1$. La suite de terme général $\sin((2n+1)a)$ est la suite nulle qui converge vers 0.
Supposons $\cos(2a) = -1$. $2a = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et $\sin((2n+1)a) = (-1)^k$. La suite $(\sin((2n+1)a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dons vers 1 ou vers -1.
Plaçons nous dans le cas où $|\cos(2a)| \neq 1$ donc $\sin(2a) \neq 0$.
Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin((2n+1)a) = l \in \mathbb{R}$.
Dans ces conditions $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin((2n-1)a) = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin((2n+3)a) = l$.
$\sin((2n+3)a) = \sin((2n+1)a)\cos(2a) + \sin(2a)\cos((2n+1)a)$,
$\sin((2n-1)a) = \sin((2n+1)a)\cos(2a) - \sin(2a)\cos((2n+1)a)$. En additionnant il vient $l = l\cos(2a)$ donc $l = 0$. Dans ces conditions $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos((2n+1)a) = 0$, car $\sin(2a) \neq 0$, ce qui est faux car $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
Donc sauf pour le cas $a = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$ ou $a = \dfrac{\pi}{2} + p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$ la suite de terme général $\sin((2n+1)a)$ ne converge pas et en particulier ne converge pas vers 0. Le seul cas où elle converge vers 0 est le cas $a = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$.
La série entière $\sum \sin((2n+1)a)x^{2n+1}$ a donc un rayon de convergence égal à 1 sauf dans le cas $a = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$, où la série est nulle.
$\sum \dfrac{\sin((2n+1)a)}{2n+1} x^{2n+1}$ a donc aussi un rayon de convergence égal à 1 sauf dans le cas $a = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$, où la série est nulle.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin((2k+1)a)$ avec $a \not\equiv 0 \mod(\pi)$.

$$A_n = \Im m\left(\sum_{k=0}^{n} \exp((2k+1)ia)\right) = \exp(ia)\frac{\exp(2i(n+1)a) - 1}{\exp(2ia) - 1}$$
$$= \exp((n+1)a)\frac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)}.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |A_n| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(a)|}$. Utilisons à nouveau la transformation d'Abel

$\sum\limits_{k=p}^{q} \dfrac{\sin((2k+1)a)}{2k+1} = \sum\limits_{k=p}^{q} \dfrac{A_k - A_{k-1}}{2k+1}$. Nous en déduisons, pour $1 \leqslant p < q$,

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{\sin((2k+1)a)}{2k+1} = \frac{A_q}{2q+1} - \frac{A_{p-1}}{2p+1} + \sum_{k=p}^{q-1}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)A_k.$$

Finalement $\left|\sum\limits_{k=p}^{q} \dfrac{\sin((2k+1)a)}{2k+1}\right| \leqslant \dfrac{2}{|\sin(a)|(2p+1)}$. Le critère de Cauchy permet donc de conclure à la convergence de la série $\sum \dfrac{\sin((2n+1)a)}{2n+1}$.
Comme nous l'avons déjà vu plus haut, nous en déduisons que la série entière

$\sum \frac{\sin((2n+1)a)}{2n+1} x^{2n+1}$ converge uniformément sur $[-1,\ 1]$ et définit donc une fonction continue sur cet intervalle. Supposons $a \neq p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$. Pour $|x| < 1$, notons $f(x)$ la somme de la série entière. L'application $z \in \mathbb{C} \longmapsto \Im m(z) \in \mathbb{R}$ est continue donc

$f'(x) = \Im m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(i(2n+1)a)x^{2n} \right) = \Im m \left(\frac{\exp(ia)}{1 - x^2 \exp(i2a)} \right)$

$f'(x) = \frac{(1+x^2)\sin(a)}{1 - 2x^2\cos(2a) + x^4}$.

$1 - 2x^2\cos(2a) + x^4 = (x^2 - 2x\cos(a) + 1)(x^2 + 2x\cos(a) + 1)$.

$\frac{(1+x^2)\sin(a)}{1 - 2x^2\cos(2a) + x^4} = \frac{1}{2}\sin(a)\left(\frac{1}{x^2 - 2x\cos(a) + 1} + \frac{1}{x^2 + 2x\cos(a) + 1} \right)$.

$x^2 - 2x\cos(a) + 1 = (\sin(a))^2 \left(1 + \left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right)^2 \right)$.

Nous en déduisons qu'une primitive, sur $\mathbb{R}$, de $x \longmapsto \frac{(1+x^2)\sin(a)}{1 - 2x^2\cos(2a) + x^4}$ est

$x \longmapsto \frac{1}{2} \left(\operatorname{atan}\left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right) + \operatorname{atan}\left(\frac{x + \cos(a)}{\sin(a)} \right) \right)$.

Rappel. Soient u et v deux réels.

$\operatorname{atan}(u) + \operatorname{atan}(v) = \frac{\pi}{2} \iff uv = 1$ et $u > 0$,

$\operatorname{atan}(u) + \operatorname{atan}(v) = -\frac{\pi}{2} \iff uv = 1$ et $u < 0$.

$\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \cdot \frac{x + \cos(a)}{\sin(a)} = 1 \iff |x| = 1$.

$\varphi\ :\ x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{atan}\left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right) + \operatorname{atan}\left(\frac{x + \cos(a)}{\sin(a)} \right) \in \mathbb{R}$ est strictement monotone car sa dérivée est strictement positive. Supposons $a \in]0,\ \pi[$.

$\varphi(-1) = -\operatorname{atan}\left(\operatorname{cotan}\left(\frac{a}{2} \right) \right) - \operatorname{atan}\left(\tan\left(\frac{a}{2} \right) \right) = \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{a}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

φ est impaire donc $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$. Nous en déduisons $\varphi(]-1,\ 1[) = \left] -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right[$.

En changeant a en $-a$, nous obtenons le même résultat. Pour $|x| \neq 1$ nous avons $\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right) + \operatorname{atan}\left(\frac{x + \cos(a)}{\sin(a)} \right) \right) = \frac{2x\sin(a)}{1 - x^2}$.

donc finalement pour $|x| < 1$ nous avons

$\operatorname{atan}\left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right) + \operatorname{atan}\left(\frac{x + \cos(a)}{\sin(a)} \right) = \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sin(a)}{1 - x^2} \right)$ et

$\forall x \in]-1,\ 1[,\ f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sin(a)}{1 - x^2} \right)$.

Autre démonstration.
$\tan\left(\operatorname{atan}\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right)+\operatorname{atan}\left(\dfrac{x+\cos(a)}{\sin(a)}\right)\right)=\dfrac{2x\sin(a)}{1-x^2}$ donc
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}$, $\exists k(x)\in\{-1,\ 0,\ 1\}$ tel que
$2f(x)=\operatorname{atan}\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right)+\operatorname{atan}\left(\dfrac{x+\cos(a)}{\sin(a)}\right)=\operatorname{atan}\left(\dfrac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right)+k(x)\pi.$
Sur $]-1,\ 1[$, nous obtenons la continuité de k donc k est constante et $f(0)$ étant nul nous avons[18] $\forall x\in]-1,\ 1[,\ f(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\dfrac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right)$.

Compte tenu de ce que nous avons vu précédemment, nous en déduisons

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)a}{2n+1}=\operatorname{sgn}(\sin(a))\frac{\pi}{4}.$$

47. Sur $]-1,\ 1[$ f définie par[19] $f(x)=\operatorname{atan}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ est dérivable de dérivée f' définie pas $f'(x)=\sqrt{2}\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$.
f' est développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.
$\forall x\in]-1,\ 1[,\ f'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{2}(-1)^nx^{4n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{2}(-1)^nx^{4n+2}$ c'est-à-dire
$f'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}$ avec[20] $a_n=2\cos\left((2n-1)\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\Re e((1-i)i^n)$.

18. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}$, $\operatorname{atan}\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right)+\operatorname{atan}\left(\dfrac{x+\cos(a)}{\sin(a)}\right)-\operatorname{atan}\left(\dfrac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right)=k(x)\pi$.
Par continuité, nous end déduisons que k est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,\ -1[$, $]-1,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$.
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}k(x)=-\operatorname{sgn}(a)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}k(x)=\operatorname{sgn}(a)$.

Nous obtenons finalement $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right)-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a) & \text{pour}\quad x\in]-\infty,\ -1[\\ -\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(a) & \text{pour}\quad x=-1\\ \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right) & \text{pour}\quad x\in]-1,\ 1[\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(a) & \text{pour}\quad x=1\\ \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{2x\sin(a)}{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a) & \text{pour}\quad x\in]1,\ +\infty[\end{cases}$.

19. Il s'agit d'un cas particulier de l'exercice précédent pour $a=\dfrac{\pi}{4}$.

20. Nous aurions pu écrire $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\dfrac{1+i}{2(1+ix^2)}+\dfrac{1-i}{2(1-ix^2)}$ puis
$\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)i^n+(1+i)(-i)^n}{2}x^{2n}$.
$\dfrac{(1-i)i^n+(1+i)(-i)^n}{2}=\Re e((1-i)i^n)=\Re e\left(\sqrt{2}\exp\left(in\dfrac{\pi}{2}\right)\exp\left(-i\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. Nous obtenons alors le résultat.

$|a_n| = \sqrt{2}$ donc la série entière définissant f' a pour rayon de convergence 1 et celle définissant f aussi.

Nous obtenons alors $\forall x \in]-1,\ 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2n+1} x^{2n+1}$.

La série de terme général $\dfrac{a_n}{2n+1}$ est convergente. En effet

$A_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n = \sqrt{2}\ \Re e\left(\sum_{n=0}^{N}(1-i)i^n\right) = \sqrt{2}\ \Re e(1 - i^{N+1})\ ;\ \left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leqslant 2\sqrt{2}$.

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{2n+1} = \frac{A_q}{2q+1} - \frac{A_{p-1}}{2p+1} + \sum_{n=p}^{q-1} A_n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{2n+1}\right| \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2q+1} + \frac{1}{2p+1} + \sum_{n=p}^{q-1}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)\right) = \frac{4\sqrt{2}}{2p+1}.$$

La série vérifie le critère de Cauchy et est donc convergente.
Nous avons déjà vu lors des exercices précédents que la série converge alors uniformément sur $[0,\ 1]$; de même, étant impaire, sur $[-1,\ 0]$. La somme définit une fonction continue sur $[-1,\ 1]$.

$\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Nous en déduisons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

48. En utilisant le critère de d'Alembert nous en déduisons que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{np+1}$ est égal à 1. $\displaystyle\frac{1}{np+1} = \int_0^1 t^{np} dt$.

Soit $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$. La série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |zt^p|^n dt = \frac{|z|^n}{np+1}$ est convergente.

La série de terme général zt^p est convergente donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$,

$\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(zt^p)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{np+1} z^n$. Finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{np+1} z^n = \int_0^1 \frac{dt}{1 - zt^p}$.

Supposons $z \in \mathbb{R}$.

• Supposons $0 < z < 1$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*,\ a^4 = z$.

$$\frac{1}{1-(at)^4} = \frac{1}{4(1-at)} + \frac{1}{4(1+at)} + \frac{1}{2(1+a^2t^2)}.$$

Une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{1-(at)^4}$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{4a} \ln\left(\dfrac{1+at}{1-at}\right) + \dfrac{1}{2a}\,\mathrm{atan}(at)$.

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-zt^4} = \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right) + \frac{1}{2a}\,\mathrm{atan}(a).$$

• Supposons $-1 < z < 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a^4 = -z$.

$$\frac{1}{1+(at)^4} = \frac{2 + a\sqrt{2}t}{4(a^2t^2 + a\sqrt{2}t + 1)} + \frac{2 - a\sqrt{2}t}{4(a^2t^2 - a\sqrt{2}t + 1)}.$$

$$\frac{2+a\sqrt{2}t}{4(a^2t^2+a\sqrt{2}t+1)}=\frac{2a^2t+a\sqrt{2}}{4a\sqrt{2}(a^2t^2+a\sqrt{2}t+1)}+\frac{1}{4(a^2t^2+a\sqrt{2}t+1)}$$ de même
$$\frac{2-a\sqrt{2}t}{4(a^2t^2-a\sqrt{2}t+1)}=-\frac{2a^2t-a\sqrt{2}}{4a\sqrt{2}(a^2t^2-a\sqrt{2}t+1)}+\frac{1}{4(a^2t^2-a\sqrt{2}t+1)}$$
Une primitive de $t\longmapsto\dfrac{1}{1+(at)^4}$ est donc
$$t\longmapsto\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{a^2t^2+a\sqrt{2}t+1}{a^2t^2-a\sqrt{2}t+1}\right)+\frac{1}{2a\sqrt{2}}\operatorname{atan}\left(\frac{a\sqrt{2}t}{1-a^2t^2}\right).$$
$$\int_0^1\frac{dt}{1-zt^4}=\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{a^2+a\sqrt{2}+1}{a^2-a\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{2a\sqrt{2}}\operatorname{atan}\left(\frac{a\sqrt{2}}{1-a^2}\right).$$
Pour $z=0$, $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1-zt^4}=1$.

Remarque pour $(z,\ t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, $1-zt^4$ ne s'annule que dans le cas où $z\in\mathbb{R}_+^*$.
Soit $u\in\mathbb{C}$. $u^4\in\mathbb{R}_+^*\iff u\in\mathbb{R}^*\cup i\mathbb{R}^*$.

Soit f l'application définie par $f(t)=\dfrac{1}{1-(a+ib)t}$ où $(a,\ b)\in(\mathbb{R}^*)^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et possède donc une primitive sur $\mathbb{R}$.
$$f(t)=-\frac{1}{2(a+ib)}\frac{2(a^2+b^2)t-2a}{(a^2+b^2)t^2-2at+1}+\frac{i}{a+ib}\frac{\frac{a^2+b^2}{b}}{1+\left(\frac{(a^2+b^2)t-a}{b}\right)^2}.$$
Une primitive, F, de f est définie par
$$t\longmapsto-\frac{1}{2(a+ib)}\ln((a^2+b^2)t^2-2at+1)+\frac{i}{a+ib}\operatorname{atan}\left(\frac{(a^2+b^2)t-a}{b}\right).$$
Soit $u=(a+ib)\in\mathbb{C}$ avec a et b non nuls. Soit $z=u^4$.
$$\frac{1}{1-zt^4}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-ut}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+ut}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-iut}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+iut}.$$
Nous en déduisons qu'une primitive, sur $\mathbb{R}$, de $t\longmapsto\dfrac{1}{1-zt^4}$ est
$$t\longmapsto\frac{1}{8u}\ln\left(\frac{|u|^2t^2+2\,\Re e(u)t+1}{|u|^2t^2-2\,\Re e(u)t+1}\right)+\frac{i}{8u}\ln\left(\frac{|u|^2t^2+2\Im m(u)t+1}{|u|^2t^2-2\Im m(u)t+1}\right)$$
$$+\frac{i}{4u}\operatorname{atan}\left(\frac{|u|^2t-\ \Re e(u)}{\Im m(u)}\right)+\frac{i}{4u}\operatorname{atan}\left(\frac{|u|^2t+\ \Re e(u)}{\Im m(u)}\right)$$
$$+\frac{1}{4u}\operatorname{atan}\left(\frac{|u|^2t+\Im m(u)}{\Re e(u)}\right)+\frac{1}{4u}\operatorname{atan}\left(\frac{|u|^2t-\Im m(u)}{\Re e(u)}\right).$$
Si $z\in\mathbb{R}_+^*$, nous pouvons choisir $u\in\mathbb{R}_+^*$ racine quatrième de z. Dans ce cas une primitive est définie sur l'un des trois intervalles ouverts ne contenant pas $\dfrac{1}{u}$ et $-\dfrac{1}{u}$. Nous avons vu ce résultat plus haut.

Si $z\in\mathbb{R}_-^*$, nous pouvons choisir $u=\sqrt[4]{-z}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas nous pouvons appliquer ce que nous venons d'obtenir et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \dfrac{1}{1-zt^4}$ est $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{2}}{8|u|}\ln\left(\dfrac{|u|^2t^2+2\ \Re e(u)t+1}{|u|^2t^2-2\ \Re e(u)t+1}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{4|u|}\operatorname{atan}\left(\dfrac{|u|^2t+\ \Re e(u)}{\Re e(u)}\right)$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4|u|}\operatorname{atan}\left(\frac{|u|^2t-\ \Re e(u)}{\Re e(u)}\right).$$

Nous retrouvons les résultats vus précédemment.

49. $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ est bien défini car la série alternée $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Les deux séries entières $\sum x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ ont pour rayon de convergence 1. La série entière produit a pour terme général b_n défini par $b_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

Nous savons que pour $x \in]-1,\ 1]$ $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

En particulier $-\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Nous avons donc $b_n = a_n + \ln(2)$.

Pour $|x| < 1$ nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n}x^n\right) = -\frac{1}{1-x}\ln(1+x).$$

Nous obtenons donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{1-x}(\ln(1+x)+\ln(2))$.

La série ne peut converger pour $x = 1$ car sinon [21] la somme serait continue en 1.

De même elle ne peut converger en -1. Le rayon de convergence de la série est égal à 1.

50. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g\ :\ u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \exp(-u)\dfrac{\sin(xu)}{u} \in \mathbb{R}$ est continue, prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en une fonction g_1, dominée sur $[1,\ +\infty[$ par $u \longmapsto \exp(-u)$ qui est intégrable. f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-u)\frac{\sin(xu)}{u}du$ est définie sur $\mathbb{R}$. $\forall u \in \mathbb{R},\ g_1(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(\exp(-u)u^{2n})$.

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(\exp(-u)u^{2n})\right|du = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

La série de terme général $\dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$ converge pour $|x| < 1$ donc pour $|x| < 1$

21. Voir par exemple l'exercice numéro 5.

nous avons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{atan}(x)$. Montrons qu'en fait $f = \operatorname{atan}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \exp(-u)\dfrac{\sin(xu)}{u} \in \mathbb{R}$ est continue, intégrable.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\ u) = \exp(-u)\cos(xu)$ est continue dominée par $u \longmapsto \exp(-u)$ intégrable. Nous en déduisons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u)\cos(xu)du = \Re e\left(\int_0^{+\infty} \exp((ix-1)u)du\right)$.

Une primitive de $u \longmapsto \exp((ix-1)u)$ est $u \longmapsto \dfrac{1}{ix-1}\exp(-u)\exp((ix-1)u)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \Re e\left(\dfrac{1}{1-ix}\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$ puis $f(x) = f(0) + \operatorname{atan}(x)$.

$f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u)\frac{\sin(xu)}{u}du = \operatorname{atan}(x)$.

51. $f(x,\ 1) = -\dfrac{1}{2x}$ n'est pas développable en série entière à l'origine.

Pour $y \neq 1$, $f(x,\ y) = \dfrac{1}{1-y}\dfrac{1}{1-x\frac{1+y}{1-y}}$. L'application $x \longmapsto f(x,\ y)$ est développable en série entière à l'origine pour $\left|x\dfrac{1+y}{1-y}\right| < 1$. Il s'agit bien d'un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$ donc d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$, image réciproque de $]-1,\ 1[$ par la fonction continue $(x,\ y) \longmapsto x\dfrac{1+y}{1-y}$.

Pour $(x,\ y)$ dans cet ouvert nous avons $f(x,\ y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+y)^n}{(1-y)^{n+1}} x^n$.

La dérivée $n^{ième}$ de l'application $y \in]-1,\ 1[\longmapsto \dfrac{1}{(1-y)^{n+1}} \in \mathbb{R}$ est l'application $y \in]-1,\ 1[\longmapsto \dfrac{1}{n!(1-y)} \in \mathbb{R}$. Elle est développable en série entière à l'origine.

Nous avons $\forall y \in]-1,\ 1[$, $\dfrac{1}{(1-y)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n}^n y^p$.

Nous avons donc [22], dans les mêmes conditions, en notant $a_n(y) = \dfrac{(1+y)^n}{(1-y)^{n+1}}$,

---

22. Pour $y \in \mathbb{C}$ avec $|y| < 1$ nous avons encore la relation $\dfrac{1}{(1-y)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n}^n y^p$.

En effet, celle-ci est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie jusqu'au rang n.

$\dfrac{1}{(1-y)^{n+2}} = \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} y^p\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+n}^n y^p\right)$.

$\dfrac{(1+y)^n}{(1-y)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{a_n^{(p)}(0)}{p!} y^p$ où $\dfrac{a_n^{(p)}(0)}{p!} = \alpha_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_{n+k}^{n} C_n^{p-k}$ avec la convention $C_j^i = 0$ pour $i > j$.

Nous obtenons donc pour $(x,\ y) \in \mathbb{C}^2$, $\left| x \dfrac{1+y}{1-y} \right| < 1$ et $|y| < 1$,

$$f(x,\ y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} y^p x^n \right).$$

Supposons $(x,\ y) \in \mathbb{C}^2$ avec $x = r\exp(i\theta)$ et $y = r\exp(-i\theta)$ avec $(r,\ \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $|y| < 1$ et $|x| \dfrac{1+|y|}{1-|y|} < 1$, la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} |y|^p |x|^n$ converge donc, avec les hypothèses faites, la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} |r|^{p+n}$ converge pour $|r| < 1$ et $|r| < \dfrac{1-|r|}{1+|r|}$ c'est-à-dire pour $|r| < \sqrt{2} - 1$.

Pour $|r| < \sqrt{2} - 1$ fixé, la série de terme général $\alpha_{n,p} r^{p+n} \exp(i(n-p)\theta)$ converge normalement, donc uniformément, par rapport à θ. En particulier,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_n^{(p)}(0)}{p!} r^{p+n} \exp(i(n-p)\theta) \right) d\theta &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{a_n^{(p)}(0)}{p!} r^{p+n} \exp(i(n-p)\theta) d\theta \right) \\ &= 2\pi \frac{a_n^{(n)}(0)}{n!} r^{2n}.\end{aligned}$$

$$\left| \frac{(1+r\exp(-i\theta))^n}{(1-r\exp(-i\theta))^{n+1}} r^n \exp(in\theta) \right| \leqslant \frac{(1+|r|)^n}{(1-|r|)^{n+1}} |r|^n.$$

Pour $|r| < \sqrt{2} - 1$ nous avons $\dfrac{1+|r|}{1-|r|} |r| < 1$ donc la série de terme général

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} r^{n+1} \exp(i(n-p)\theta)$ est normalement convergente de la variable θ.

Nous en déduisons

$$\int_0^{2\pi} f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} r^{n+1} \exp(i(n-p)\theta) \right) d\theta \right).$$

Finalement $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\pi \frac{a_n^{(n)}(0)}{n!} r^{2n}$.

La série entière produit a pour terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_{k+n}^n$.

C_{k+n}^n est le coefficient de X^n dans le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (1+X)^{k+n}$ c'est-à-dire le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^n \dfrac{(1+X)^{p+1} - 1}{X}$ soit encore le coefficient de X^{n+1} dans le polynôme $(1+X)^{n+p+1}$; il s'agit bien de C_{n+1+p}^{n+1}. Le résultat est vrai au rang $n+1$; il est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons “directement”, pour $|r| < \sqrt{2}-1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta))d\theta$.

$f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta)) = \dfrac{1}{-r^2-2r\cos(\theta)+1} > 0$.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta))d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{-r^2-2r\cos(\theta)+1}$.

Le changement de variable $\theta\in[0,\ \pi[\longmapsto t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\in\mathbb{R}^+$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme donc nous obtenons

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta))d\theta = 4\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(-r^2+2r+1)t^2+(-r^2-2r+1)}$.

$-r^2+2r+1$ et $-r^2-2r+1$ sont strictement positifs donc

$$\int_0^{2\pi} f(r\exp(i\theta),\ r\exp(-i\theta))d\theta = \frac{4}{\sqrt{r^4-6r^2+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac{-r^2+2r+1}{-r^2-2r+1}}}{1+\left(t\sqrt{\frac{-r^2+2r+1}{-r^2-2r+1}}\right)^2}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{r^4-6r^2+1}}.$$

Finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n^{(n)}(0)}{n!}r^{2n} = \frac{1}{\sqrt{r^4-6r^2+1}}$ et pour $|r|<(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n^{(n)}(0)}{n!}r^{n} = \frac{1}{\sqrt{r^2-6r+1}}$.

Nous pouvons remarquer que $\dfrac{1}{\sqrt{r^2-6r+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{3-2\sqrt{2}}}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{3+2\sqrt{2}}}}$.

52. Pour [23] $x\in[0,1]$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

En utilisant ce qui précède nous en déduisons pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\right)\leqslant n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{3n^3}\right)$ c'est-à-dire

$n-\dfrac{1}{2}\leqslant n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3n}$ puis pour $x\in\mathbb{R}_+$,

$\dfrac{1}{\sqrt{e}}\exp(n)\dfrac{x^n}{n!}\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{x^n}{n!}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{e}}\exp(n)\exp\left(\dfrac{1}{3n}\right)\dfrac{x^n}{n!}$.

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{e}}\exp(n)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum\dfrac{(ex)^n}{n!}$ est égal à $+\infty$ donc la

23. On peut étudier les variations de $x\longmapsto\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$ et $x\longmapsto\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ ou considérer la série alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ définissant $\ln(1+x)$ pour $x\in]-1,\ 1]$.

série entière $\sum \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{x^n}{n!}\right]$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in [0,\ 1]$ nous avons $\exp(x) \leqslant 1+2x$ donc $\exp\left(\dfrac{1}{3n}\right) \leqslant 1+\dfrac{2}{3n}$.

Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}\dfrac{x^n}{n!}$. g est dérivable et $g'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!}$.

$g'(0)=0$ et pour $x\neq 0$, $g'(x)=\dfrac{\exp(x)-1}{x}$.

Nous avons donc $g(x)=\displaystyle\int_0^x \dfrac{\exp(t)-1}{t}dt$.

Soit $\varepsilon>0$.

$$\int_0^{\frac{2}{\varepsilon}} \frac{\exp(t)-1}{t}dt+\int_{\frac{2}{\varepsilon}}^x \frac{\exp(t)-1}{t}dt \leqslant \int_0^{\frac{1}{2\varepsilon}} \frac{\exp(t)-1}{t}dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^x \exp(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2\varepsilon}} \frac{\exp(t)-1}{t}dt+\frac{\varepsilon}{2}(\exp(x)-1).$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(-x)\left(\int_0^{\frac{1}{2\varepsilon}} \frac{\exp(t)-1}{t}dt+\frac{\varepsilon}{2}(\exp(x)-1)\right)=\frac{\varepsilon}{2}$ donc il existe $A>0$ tel que pour $x \geqslant A$ on ait $\exp(-x)\left(\displaystyle\int_0^x \frac{\exp(t)-1}{t}dt\right) \leqslant \varepsilon$ c'est-à dire

$g(x)=o(\exp(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.

pour $x\in\mathbb{R}$ nous avons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(ex)^n}{\sqrt{e}n!}=\frac{1}{\sqrt{e}}(\exp(ex)-1)$.

Nous en déduisons que pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$\dfrac{1}{\sqrt{e}}(\exp(ex)-1) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}(\exp(ex)-1)+\dfrac{2}{3\sqrt{e}}g(ex)$.

$-\dfrac{1}{\sqrt{e}} \leqslant f(x)-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\exp(ex) \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{e}}+\dfrac{2}{3\sqrt{e}}g(ex)$. En utilisant ce que nous venons de démontrer nous en déduisons $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e}}\exp(ex)$.

53. Pour obtenir n il faut p jetons marqués 2 et q jetons marqués 3 avec $2p+3q=n$. Il faut déterminer le nombre $N(n)$ d'entiers p tels qu'il existe q vérifiant $2p+3q=n$.
Considérons les deux séries entières $\sum x^{2n}$ et $\sum x^{3n}$.
La première série a pour terme général $a_n x^n$ avec $a_{2n}=1$ et $a_{2n+1}=0$, la seconde série a pour terme général $b_n x^n$ avec $b_{3n}=1$ et $b_{3n+1}=b_{3n+2}=0$.
La série produit de Cauchy de ces deux séries a pour terme général $\sum c_n x^n$ avec $c_n=\displaystyle\sum_{i+j=n} a_i b_j=\sum_{2p+3q=n} 1=N(n)$.

Pour $|x| < 1$ nous avons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$.
En décomposant en éléments simples nous obtenons
$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{6(1-x)^2} + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{i\sqrt{3}}{9(x-j)} + \frac{i\sqrt{3}}{9(x-\overline{j})}.$$
Pour $|x| < 1$ nous avons donc
$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}(n+1) + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)x^n.$$
Nous en déduisons $N(n) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}(n+1) + \dfrac{1}{4}(-1)^n + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)$.
Pour $n = 3p$, $N(n) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}(3p+1) + \dfrac{1}{4}(-1)^p + \dfrac{1}{3}$.
Pour $n = 3p+1$, $N(n) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}(3p+2) - \dfrac{1}{4}(-1)^p - \dfrac{1}{3}$.
Pour $n = 3p+2$, $N(n) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}(3p+3) + \dfrac{1}{4}(-1)^p$.
En examinant la parité de p nous obtenons
$N(6q) = q+1$, $N(6q+1) = q$, $N(6q+2) = q+1$, $N(6q+3) = q+1$, $N(6q+4) = q+1$, $N(6q+5) = q+1$.

54. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{ch}(t\sqrt{t}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3n}}{(2n)!}$.
Pour $t \in \mathbb{R}_-^*$, $t^{3n} = (-1)^n(-t)^{3n} = (-1)^n(-t\sqrt{-t})^{2n}$.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-t\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \cos(-t\sqrt{-t}) = \cos(t\sqrt{-t}).$$
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} \operatorname{ch}(t\sqrt{t})) & \text{lorsque} t \in \mathbb{R}_+ \\ \cos(t\sqrt{-t})) & \text{lorsque} t \in \mathbb{R}_- \end{cases}$ est développable en série entière à l'origine ; le rayon de convergence de la série entière étant égal à $+\infty$.

55. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^4}}$. Posons $u = x^2 = \sin(t)$ avec $t \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Notons $g(u) = \sqrt{1-\sqrt{1-u^2}}$ et $h(t) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
h est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $h(0) = 0$, $h'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $u \in]0,\ 1[$, $g'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-\sqrt{1-u^2}}}$.
$\displaystyle\lim_{u\to 0^+} g'(u) = \sqrt{2}$ donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ 1[$.
La dérivée de l'application $\varphi\ :\ u \longmapsto \dfrac{u}{\sqrt{1-\sqrt{1-u^2}}}$ est l'application

$u \longmapsto \dfrac{2\sqrt{1-u^2}-2+u^2}{2\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-\sqrt{1-u^2}}(1-\sqrt{1-u^2})}$.

Lorsque u tend vers 0 nous avons $\varphi'(u) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}u + o(u^2)$. φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ 1[$ et donc aussi g'.

$h'(t) = \cos(t)g'(u)$, $h"(t) = \cos(t)^2 g"(u) - \sin(t)g'(u) = -\dfrac{1}{4}h(t) = -\dfrac{1}{4}g(u)$.

Nous avons donc

$\forall u \in [0,\ 1[$, $4(1-u^2)g"(u) - 4ug'(u) + g(u) = 0$, $g'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $g(0) = 0$.

Existe-t-il une série entière $\sum a_n u^n$ de rayon strictement positif, R, dont la somme est au voisinage de 0 égale à $g(u)$?

Nous devons avoir pour $u \in [0,\ R[\cap[0,\ 1[$,

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1)a_n u^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 4n(n-1)a_n u^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 4na_n u^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n = 0$ soit encore $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(4(n+1)(n+2)a_{n+2} + (1-4n^2)a_n)u^n = 0$.

Nous obtenons donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0$ et $a_{2n+3} = \dfrac{(4n+1)(4n+3)}{4(2n+2)(2n+3)}a_{2n+1}$.

Notons $b_n = a_{2n+1}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{(4n+1)(4n+3)}{4(2n+2)(2n+3)}b_n$.

Les coefficients b_n sont tous non nuls donc $b_{n+1} = b_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{(4k+1)(4k+3)}{4(2k+2)(2k+3)}$.

$\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(4k+1)(4k+3) = \frac{(4n+4)!}{4^{n+1}(2n+2)!}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 4(2n+2)(2n+3) = 4^{n+1}(2n+3)!$.

Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{(4n)!}{16^n(2n+1)!(2n)!}$; relation vraie aussi pour $n = 0$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, en utilisant la formule de Stirling, nous avons $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \dfrac{e}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}$.

$\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \exp\left(-2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \frac{1}{e}$.

Finalement $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$.

$R = 1$ et comme nous l'avons déjà vu la série converge uniformément sur $[-1,\ 1]$.

g étant continue sur $[0,\ 1]$, l'unicité de la solution de l'équation différentielle conduit à $\forall u \in [0,\ 1],\ g(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^{2n+1}$ puis $\forall x \in [-1,\ 1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{4n+2}$.

Chapitre 6

Séries de Fourier

1. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$.
   On suppose que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de même limite σ, que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, montrer

   (b) i. Pour $1\leqslant n < m$,
   $$(m-n)S_m - (m-n)\sigma = m\sigma_m - n\sigma_n - (m-n)\sigma + \sum_{k=n+1}^{m}(k-n-1)u_k.$$
   ii. En déduire $\forall \eta > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n\geqslant N_\eta \Rightarrow \|\sigma_n - \sigma\|\leqslant\eta$ et
   $\forall m > n\geqslant N_\eta,\ \|S_m - \sigma\|\leqslant\eta + \dfrac{2\eta n}{m-n} + A\left(\dfrac{m}{n} - 1\right)$, où A est un majorant des $n|u_n|$.

   (c) Soit f une fonction 2π-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux. On note $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$.
   Vérifier la relation $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\left(\dfrac{\sin\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)^2 dt.$
   Notons, pour $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n(f) = \sigma_n(f) - \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.
   Montrer la relation
   $$\Delta_n(f) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(f(x+2u) - f(x+0)) + (f(x-2u) - f(x-0))]\left(\frac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du.$$
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n(f) = 0$.

   (d) Montrer que si f est continue alors la suite $(\Delta_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0.

(e) En déduire que si $(nc_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée alors la série de Fourier de f converge vers f.
En déduire que si f est continue et si $(nc_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

2. Soit f une fonction impaire, 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$. $\forall t \in]0,\pi[,\ f(t) = 1$.
Montrer que f est développable en série de Fourier, quel est ce développement ?
3. Soient les fonctions 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in]-\pi,\pi[,\ f(x) =$
$$\operatorname{ch}(\alpha x)\ (\alpha \in \mathbb{R}^*),\ x^2,\ x^4,\ |x|^3,\ x\exp(x),\ \exp(x).$$
Montrer que les fonctions f sont développables en séries de Fourier, quel sont ces développements ?
En déduire les sommes des séries :
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+\alpha^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n+1)^4},$$
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+1},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n^2+1)^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^8}.$$
4. Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$:
$x \in [-\pi,0],\ f(x) = 0;\ x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ f(x) = x; x \in]\frac{\pi}{2},\pi],\ f(x) = 0.$
Montrer que f est développable en série de Fourier, quel est ce développement ?
Écrire la formule de Parseval.
5. Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$, telle que :
pour $x \in [-\pi,0],\ f(x) = 0$; pour $x \in]0,\pi],\ f(x) = x(\pi - x)$.
Montrer que f est développable en série de Fourier, quel est ce développement ?
Écrire la formule de Parseval.
6. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ est définie par $t \longmapsto \cos(\alpha t)$ où $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
Montrer que f est développable en série de Fourier, quel est ce développement ?
Déterminer $\operatorname{cotan}(\alpha\pi)$, puis un développement en produit infini de $\sin(t)$.
Refaire le même exercice avec $\operatorname{ch}\alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$. Trouver un développement en produit infini de $\operatorname{sh}(t)$.
7. Soit f une fonction 2π-périodique, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^p,\ p\geqslant 1$.
On note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e_n$ où $\forall (t,\ n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ e_n(t) = \exp(int)$.
Montrer : $\|f - S_n(f)\|_\infty$ est négligeable devant : $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique définie pour $t \in [-\pi,\pi]$ par $f(t)= 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$.
Développer f en série de Fourier. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.
9. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, convergente vers 0. Montrer :
$$\sum_{n\geqslant 1}(t \in \mathbb{R} \longmapsto b_n\sin(nt) \in \mathbb{R}) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow\ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On pourra étudier $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right)$. Pour la réciproque on pourra choisir $t \in]0,\pi]$, $p = E\left(\dfrac{\pi}{t}\right)$ et étudier $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=n+p+1}^{+\infty} b_k \sin(kt)$; la dernière étant majorée grâce à une transformation d'Abel.

10. Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \notin [-1,1]$. Soit b la racine de plus petit module de $z^2 - 2az + 1 = 0$.
    (a) Soit $g(z) = \dfrac{1-z^2}{1-2z\cos(t)+z^2}$, soit $f(t) = \dfrac{1}{a-\cos(t)}$.
    Vérifier que $f(t) = \dfrac{2b}{1-b^2} g(b)$. Développer g en série entière à l'origine.
    (b) Développer f en série de Fourier.
    (c) En déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a-\cos(t)}dt,\ n \in \mathbb{N}$.
    Exemple : calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\mathrm{ch}(\theta)+\cos(t)}dt,\ n \in \mathbb{N},\ \theta > 0$.
11. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Développer l'application $\lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \dfrac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2}$ en série entière, à l'origine.
    (b) En déduire pour $|\lambda| < 1$
    $$\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} = \frac{\lambda\cos(t)}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(nt).$$
    (c) Soit $f(t) = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(t)+1}$ avec $|\lambda| < 1$. Développer f en série de Fourier.
    En déduire pour $|\lambda| \neq 1$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2}dt$.
12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux. Soient $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier de la fonction f. Montrer que les séries $\displaystyle\sum \frac{a_n(f)}{n}$ et $\displaystyle\sum \frac{b_n(f)}{n}$ sont absolument convergentes. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
13. Soient f et g deux applications continues par morceaux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques.
    On pose $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)c_n(g)\exp(inx) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n}(f)c_{-n}(g)\exp(-inx)$.
    Justifier que $h(x)$ est la somme de deux séries absolument convergentes.
    Montrer que h est continue.
14. Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Soit f_x une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue, nulle sur $[2x,\pi]$, paire, valant 1 en 0, affine sur $[0,2x]$.

Développer f_x en série de Fourier.

En déduire les valeurs de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(kx)}{k^2}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^4(kx)}{k^4}$.

15. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$ et $\displaystyle\int_0^\pi |f'(t)|^2\,dt=1$.
    Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ telle que :
    $\forall t\in[0,\pi],\ f(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\frac{\sin(nt)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|^2=\frac{2}{\pi}$.
16. Soit $r\in[0,1[$. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies sur $\mathbb{R}$, continues par morceaux, 2π-périodiques.
    Montrer qu'il existe une fonction P_r telle que $\forall f\in E,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$,
    $$\sum_{n=0}^{+\infty}r^n c_n(f)\exp(in\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n c_{-n}(f)\exp(-in\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P_r(\theta-t)dt.$$
    Calculer $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_r(t)dt$ et montrer la relation :
    $$\lim_{\substack{r\to1\\<}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}c_n(f)\exp(in\theta)=\frac{1}{2}\left(f(\theta+0)+f(\theta-0)\right).$$
17. (a) Soient f et g deux applications 2π-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux. On pose $(f*g)(x)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)g(t)dt$.
    On suppose que l'une des deux fonctions, g ou g, est continue ; montrer que $f*g$ est une application continue, 2π-périodique.
    (b) Comparer $c_n(f*g)$ et $c_n(f)c_n(g)$.
    (c) Soit $f(t)=t$ sur $]-\pi,\pi[$, f 2π-périodique ; calculer $c_n(f*f)$ et $f*f$.
18. Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$.
    Montrer que f n'est pas dérivable en 0. On pourra calculer $f(x)-f(0)$ et comparer à la somme calculée jusqu'à $N=E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.
19. Soit f une application développable en série entière de rayon $R>0$. Soit $g(t)=f(r\exp(it))$ $0\leqslant r<R$. Calculer $c_n(g)$.
20. Soit f une application définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$, développable en série entière à l'origine de rayon de convergence $R>0$. Pour $z=r\exp(i\theta)$, $r\in]0,\ R[$, on pose $g\left(r\cos(\theta),r\sin(\theta)\right)$ la partie réelle de $f(z)$.
    Calculer les coefficients de Fourier de $\theta\longmapsto g(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$; en déduire :
    $$\Re e(f(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}\right)d\theta \text{ pour } |z|<r$$
21. **Phénomène de Gibbs** On considère la fonction 2π-périodique, impaire définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour $x\in]0,\pi[$, $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}$.

(a) Calculer la somme partielle d'ordre n, $S_n(f)$, de la série de Fourier de f. Étudier les variations de la fonction : $x \in \mathbb{R} \longmapsto S_n(f)(x) = g_n(x)$.

(b) Soit $a_k = \dfrac{2k+1}{n+1}\pi$, soit $p = E\left(\dfrac{n}{2}\right)$.
Pour $k \in \mathbb{N}_p$, montrer que $g_n(a_k) - g_n(a_{k-1}) \leqslant 0$. En déduire la relation $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, puis
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi],\ |g_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}dt = A.$

(c) Soit x fixé dans $]0,\pi[$, étudier la limite de la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de la suite $\left(g_n\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$; conclure.

22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On suppose connue la série de Fourier de f ; quelle est celle de la fonction g définie par $g(x) = f(x)\cos(x)$?

23. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$.
Montrer que f est continue sur $]-\pi,\pi[$.
Calculer $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{\sin(px)}{p}\right)$. En déduire f. On utilisera une transformation d'Abel.

24. Soit f une fonction continue de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, $f(-\pi) = f(\pi)$.
Soit g une application affine par morceaux et continue, 2π périodique, vérifiant $g(-\pi) = g(\pi) = f(\pi)$.
Calculer $c_n(g)$. En déduire qu'il existe une constante $A \geqslant 0$ dépendant de g telle que : $|n^2 c_n(g)| \leqslant A$ et que les séries $\sum c_n(g)$ et $\sum c_{-n}(g)$ sont absolument convergentes.
Montrer, en utilisant le théorème de Dirichlet, que la série de Fourier de g converge vers g et que cette convergence est normale.
Montrer, en "approchant" f par g et sans faire de cercle vicieux, que f est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

25. Soient f et g deux fonctions continues, 2π-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont les coefficients de Fourier sont égaux. Montrer que l'on a : $f = g$.
Soit f une fonction continue, 2π-périodique. On suppose que les coefficients de Fourier trigonométriques d'ordre impair sont tous nuls. montrer que f est π-périodique.

26. (a) Soit $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f définie sur $]-1,\ 1[$ par : $f(x) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\tan(\theta)\right)$.

(b) Soit $x \in]-1,1[$. Développer en série de Fourier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique vérifiant $g(-\pi) = -g(\pi) = -\dfrac{\pi}{2}$ et dont la restriction à

$]-\pi,\ \pi[$ est définie par $g(\theta) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$.

27. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(i\frac{(t+2k\pi)^2}{2m\pi}\right)$.

    On note f la fonction périodique de période 2π dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est f. Vérifier que f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

    (b) i. Soit $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(-int)f(t)dt$ le coefficient de Fourier d'indice n de la fonction f.

    En utilisant le changement de variable défini par $t = 2\pi(u-k)+mn\pi$, démontrer l'égalité $c_n = \exp\left(-i\dfrac{\pi}{2}mn^2\right)\displaystyle\int_{-\frac{mn}{2}}^{m-\frac{mn}{2}} \exp\left(2i\frac{\pi}{m}u^2\right)du.$

    ii. Pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$ on pose $u_q = \displaystyle\int_{mq}^{mq+m} \exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du$ et $v_q = \displaystyle\int_{m\left(q-\frac{1}{2}\right)}^{m\left(q+\frac{1}{2}\right)} \exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du.$

    Démontrer les égalités : $c_{2q} = u_{-q},\ c_{2q+1} = \exp\left(-i\dfrac{\pi}{2}m\right)v_{-q}$.

    iii. Démontrer que les séries $\displaystyle\sum_{q\geqslant 1}(u_q + u_{-q})$ et $\displaystyle\sum_{q\geqslant 1}(v_q + v_{1-q})$ sont absolument convergentes et que l'on a :

    $f(0) = u_0 + \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}(u_q + u_{-q}) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}m\right)\sum_{q=1}^{+\infty}(v_q + v_{1-q}).$

    (c) i. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(2i\pi y)}{\sqrt{y}}dy.$

    ii. Démontrer que l'intégrale impropre $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi x^2)$ est convergente.

    iii. Démontrer que l'on a $f(0) = J\sqrt{m}\left(1 + \exp\left(-i\dfrac{\pi m}{2}\right)\right)$.

    iv. En écrivant la relation précédente dans le cas particulier $m = 1$, calculer la valeur de J.

    v. En déduire, pour $m \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $G(m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(2i\frac{\pi k^2}{m}\right)$.

28. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\ln(n)}$.

    Quel est l'ensemble de définition de f ? Montrer que f est intégrable sur $]0,\ 2\pi[$. Montrer que f est développable en série de Fourier.

Chapitre 7

Corrigé séries de Fourier

1. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$.
La suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la moyenne de Césaro de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons déjà vu dans le livre concernant les suites que si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite l alors la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge[1] de limite l. Nous envisageons ici une réciproque.
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$ donc pour $1\leqslant n<m$, $m\sigma_m-n\sigma_n=\sum_{k=n+1}^{m}S_k$.
Pour $m=n+1$ la relation $(m-n)S_m=m\sigma_m-n\sigma_n+\sum_{k=n+1}^{m}(k-n-1)u_k$ est vérifiée. Supposons cette relation vraie jusqu'au rang m.

$$(m+1)\sigma_{m+1}-n\sigma_n+\sum_{k=n+1}^{m+1}(k-n-1)u_k$$
$$=m\sigma_m-n\sigma_n+\sum_{k=n+1}^{m}(k-n-1)u_k+(m+1)\sigma_{m+1}-m\sigma_m+(m-n)u_{m+1}$$
$$=(m-n)S_m+(m-n)u_{m+1}+(m+1)\sigma_{m+1}-m\sigma_m$$
$$=(m-n)S_{m+1}+S_{m+1}=(m-n+1)S_{m+1}.$$

La relation est vérifiée au rang $m+1$. Celle-ci est donc vraie pour tout $m>n\geqslant 1$.

(b) $\sum_{k=n+1}^{m}\frac{k-n-1}{k}\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-n-1}k=\frac{(m-n)(m-n-1)}{2(n+1)}\leqslant\frac{(m-n)^2}{n}$.
Pour $m>n\geqslant 1$ nous avons donc
$(m-n)\|S_m-\sigma\|\leqslant m\|\sigma_m-\sigma\|+n\|\sigma_n-\sigma\|+\frac{(m-n)^2}{n}A$.
Soit $\eta>0$. Il existe $N_\eta\in\mathbb{N}$ tel que pour $m>n\geqslant N_\eta$ on ait

1. Si la suite est réelle et a pour limite $l=+\infty$ ou $-\infty$ alors $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a aussi pour limite l.

$(m-n)\|S_m-\sigma\|\leqslant(m+n)\eta+\dfrac{(m-n)^2}{n}A\leqslant(m-n)\eta+2n\eta+\dfrac{(m-n)^2}{n}A.$

Nous avons bien $\forall m > n\geqslant N_\eta$, $\|S_m - \sigma\|\leqslant\eta + \dfrac{2\eta n}{m-n} + A\left(\dfrac{m}{n} - 1\right)$, où A est un majorant des $n|u_n|$.

Cherchons à rendre $\dfrac{\eta n}{m-n}\leqslant\varepsilon_1$, $\dfrac{m}{n} - 1\leqslant\varepsilon_2$ en gardant $n\geqslant N_\eta$.

Nous devons donc obtenir $\dfrac{m}{1+\varepsilon_2}\leqslant n\leqslant\dfrac{m\varepsilon_1}{\eta+\varepsilon_1}$. Pour que n existe et vérifie $n\geqslant N_\eta$ il suffit d'avoir $m > (1+\varepsilon_2)N_\eta$ et $\dfrac{m\varepsilon_1}{\eta+\varepsilon_1} - \dfrac{m}{1+\varepsilon_2} > 1$.

Finalement il suffit d'avoir
$m > (1+\varepsilon_2)N_\eta$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta > 0$ et $m > \dfrac{(1+\varepsilon_2)(\varepsilon'+\eta)}{\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta}$.

Choisissons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = K\sqrt{\eta}$. Il vient $K^2 > 1$, $m > \dfrac{(1+K\sqrt{\eta})(K+\sqrt{\eta})}{(K^2-1)\sqrt{\eta}}$.

Choisissons $K = \sqrt{2}$ et $\eta < 1$.

Il nous suffit d'avoir $m > (1+\sqrt{2\eta})N_\eta$ et en majorant le numérateur de $\dfrac{(1+K\sqrt{\eta})(K+\sqrt{\eta})}{(K^2-1)\sqrt{\eta}}$ par $(\sqrt{2}+1)^2 < 6$, il suffit d'avoir $m > \dfrac{6}{\sqrt{\eta}}$.

Finalement, pour $m > 3N_\eta > (1+\sqrt{2\eta})N_\eta$, $m > \dfrac{6}{\sqrt{\eta}}$ nous obtenons $\|S_m - \sigma\|\leqslant\eta + \sqrt{2\eta} + A\sqrt{2\eta}$; η étant strictement inférieur à 1 il vient $\|S_m - \sigma\|\leqslant\sqrt{\eta}(1+\sqrt{2}+A\sqrt{2})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta \in]0,\ 1[$ vérifiant $\sqrt{\eta}(1+\sqrt{2}+A\sqrt{2})\leqslant\varepsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N > 3N_\eta$ et $N > \dfrac{6}{\sqrt{\eta}}$. Pour tout entier naturel $m\geqslant N$ nous avons $\|S_m - \sigma\|\leqslant\varepsilon$. La suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers σ.

Remarque Remplaçons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite de fonctions. Supposons que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers σ. Dans la démonstration que nous venons de faire, N_η ne dépend que de η et pas de la variable associée à la fonction S_n. S'il existe un majorant A de $n\|u_n\|_\infty$ alors la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme vers σ.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\exp(ik(x-t))dt\right).$$

Pour $\exp(i(x-t)) \neq 1$,

$$\sum_{k=-n}^{n}\exp(ik(x-t)) = \exp(-in(x-t))\frac{\exp(i(2n+1)(x-t))-1}{\exp(i(x-t))-1}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}.$$

Nous avons alors

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}dt.$$

Pour $\exp(iu) \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{(2k+1)u}{2}\right) &= \Im m\left(\exp\left(i\frac{u}{2}\right)\frac{\exp(inu)-1}{\exp(iu)-1}\right)\\ &= \frac{\left(\sin\left(\frac{nu}{2}\right)\right)^2}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\left(\frac{\sin\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)^2 dt.$

En choisissant $f = 1$ nous avons

$$\sigma_n(f) = 1 \text{ donc } 1 = \frac{1}{2n\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)^2 dt.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\Delta_n(f) &= \sigma_n(f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\left(f(t)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)^2 dt.\end{aligned}$$

Choisissons $\alpha = x - \pi$. Découpons l'intégrale en deux intégrales ; l'une entre $c - \pi$ et x et l'autre entre x et $x + \pi$. dans la première intégrale utilisons le changement de variable $u \longmapsto t = x - 2u$ et dans la seconde $u \longmapsto t = x + 2u$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta_n(f) = &\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x-2u)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\left(\frac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du\\ &+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x+2u)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\left(\frac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du\end{aligned}$$

soit encore

$$\Delta_n(f) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x-2u)+f(x+2u)-f(x+0)-f(x-0))\left(\frac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du.$$

Notons, pour $u \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $g(u) = f(x-2u)+f(x+2u)-f(x+0)-f(x-0)$.

$\lim\limits_{u\to 0^+} g(t) = 0$. g est continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tel que pour $u \in [0,\ \eta]$ on ait $|g(u)| \leqslant \varepsilon$. f étant continue par morceaux est bornée. Nous obtenons donc

$$|\Delta_n(f)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du + \frac{4\|f\|_\infty}{n\pi}\int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du.$$

En reprenant la relation $1 = \dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)^2 dt$ nous obtenons $1 = \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_{\frac{x-\alpha-2\pi}{2}}^{\frac{x-\alpha}{2}}\left(\dfrac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin(nu)}{\sin(u)}\right)^2 du.$

Nous obtenons alors $|\Delta_n(f)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{4\|f\|_\infty}{n\pi}\left(\dfrac{1}{\sin(\eta)}\right)^2.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{4\|f\|_\infty}{n\pi}\left(\dfrac{1}{\sin(\eta)}\right)^2\right) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ donc Il existe un entier N tel que $n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N \Rightarrow \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{4\|f\|_\infty}{n\pi}\left(\dfrac{1}{\sin(\eta)}\right)^2 \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Delta_n(f) = 0.$

(d) Si f est continue, elle est uniformément continue. Reprenons la démonstration précédente.
L'élément $\eta > 0$ introduit dans cette démonstration ne dépend plus de x car f est uniformément continue. La convergence de la suite $(\Delta_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien uniforme.

(e) En utilisant le résultat vu plus haut, nous en déduisons que si $(nc_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée alors La série de Fourier de f converge vers f.
Si nous supposons f continue et $(nc_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ bornée alors la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément. $(t \longmapsto nc_n(f)\exp(int))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée uniformément donc en utilisant tous les résultats précédents nous en déduisons que la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

2. f 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$, impaire et vérifiant pour $t\in]0,\pi[,\ f(t)=1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; elle est donc développable en série de Fourier et vérifie $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nt)$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(nt)dt.$

$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \dfrac{2}{n\pi}(1+(-1)^{n+1}).$

Nous en déduisons $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)t).$

En particulier, pour $t\in]0,\ \pi[,\ \dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sin((2n+1)t)$ et par exemple [2]

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

3. Les applications f 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ dont les restrictions à $]-\pi,\ \pi[$ vérifient $f(t) = \mathrm{ch}(\alpha t)$ ou t^2 ou t^4 ou $|t|^3$ sont continues et de classes $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; celles définies par $f(t) = t\exp(t)$ ou $\exp(t)$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ par

2. Nous savions déjà que $\mathrm{atan}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$ donc $\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{atan}(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$

morceaux. Toutes ces fonctions sont développables en séries de Fourier.

• La restriction de f à $[-\pi,\ \pi]$ est définie par $f(t) = \mathrm{ch}(\alpha t)$.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(\alpha t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\ \Re e\left(\int_0^{\pi}(\exp((\alpha+in)t)+\exp((-\alpha+in)t))dt\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\ \Re e\left(\left[\frac{\exp((in+\alpha)t)}{in+\alpha}+\frac{\exp((in-\alpha)t)}{in-\alpha}\right]_0^{\pi}\right).$$

Nous obtenons donc $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch}(\alpha t)\cos(nt)dt = \frac{2(-1)^n\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}$.

Nous avons donc pour $t\in\mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}\cos(nt) \text{ puis}$$

$$\forall t\in[-\pi,\ \pi],\ \mathrm{ch}(\alpha t) = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cos(nt).$$

• La restriction de f à $[-\pi,\ \pi]$ est définie par $f(t) = t^2$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, en intégrant deux fois par parties nous obtenons $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\cos(nt)dt = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ et nous avons $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\cos(0t)dt = \frac{2\pi^2}{3}$. Nous en déduisons $\displaystyle\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.

En particulier pour $t\in[-\pi,\ \pi]$ nous avons $\displaystyle t^2 = \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.

• La restriction de f à $[-\pi,\ \pi]$ est définie par $f(t) = t^4$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, en intégrant quatre fois par parties nous obtenons $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^4\cos(nt)dt = \frac{8(-1)^n(\pi^2n^2-6)}{n^4}$ et nous avons $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^4\cos(0t)dt = \frac{2\pi^4}{5}$.

Nous en déduisons $\displaystyle\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \frac{\pi^4}{5}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8(-1)^n(\pi^2n^2-6)}{n^4}\cos(nt)$.

En particulier pour $t\in[-\pi,\ \pi]$ nous avons

$$t^4 = \frac{\pi^4}{5}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8(-1)^n(\pi^2n^2-6)}{n^4}\cos(nt).$$

• La restriction de f à $[-\pi,\ \pi]$ est définie par $f(t) = |t|^3$.

$\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^3\cos(0t)dt = \frac{\pi^3}{2}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, en intégrant par parties nous obtenons $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^3\cos(nt)dt = \frac{6n^2(-1)^n\pi^2+12(1-(-1)^n)}{\pi n^4}$.

Nous en déduisons $\displaystyle\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n^2(-1)^n\pi^2+12(1-(-1)^n)}{\pi n^4}\cos(nt)$

$$= \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) + \frac{24}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \cos((2n+1)t).$$

En particulier pour $t \in [-\pi,\ \pi]$ nous avons

$$|t|^3 = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) + \frac{24}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cos((2n+1)t).$$

• La restriction de f à $]-\pi,\ \pi[$ est définie par $f(t) = t\exp(t)$ et nous posons $f(\pi) = \pi\,\mathrm{sh}(\pi)$.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-int)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\exp((1-in)t)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{}{1-in} t - \frac{}{(1-in)^2} \right) \exp((1-in)t) \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{(-1)^n\,\mathrm{ch}(\pi)(1+in)}{1+n^2} - \frac{(-1)^n\,\mathrm{sh}(\pi)(1+in)^2}{\pi(1+n^2)^2}.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n})$. Nous en déduisons

$$a_n = \frac{2(-1)^n\,\mathrm{ch}(\pi)}{1+n^2} - \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\pi)(1-n^2)}{\pi(1+n^2)^2} \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\frac{2(-1)^n n\,\mathrm{ch}(\pi)}{1+n^2} + \frac{4(-1)^n n\,\mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)^2}.$$

Nous obtenons donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \mathrm{ch}(\pi) - \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{2(-1)^n\,\mathrm{ch}(\pi)}{1+n^2} - \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\pi)(1-n^2)}{\pi(1+n^2)^2} \right) \cos(nt) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{2(-1)^n n\,\mathrm{ch}(\pi)}{1+n^2} - \frac{4(-1)^n n\,\mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)^2} \right) \sin(nt) \right).$$

• La restriction de f à $]-\pi,\ \pi[$ est définie par $f(t) = \exp(t)$ et nous posons $f(\pi) = \mathrm{ch}(\pi)$.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-int)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp((1-in)t)dt$$
$$= \frac{(-1)^n(1+in)\,\mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{(-1)^n 2\,\mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{(-1)^n(-2n)\,\mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}.$$

Nous obtenons donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\,\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nt) - \frac{(-1)^n n}{1+n^2} \sin(nt) \right).$$

• Dans le premier développement en choisissant $t = 0$ puis $t = \pi$ nous obtenons

$$1 = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2} \text{ puis}$$

$\operatorname{ch}(\alpha\pi) = \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+\alpha^2}.$

Nous en déduisons :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha^2} = \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)-\alpha\pi}{2\alpha^2 sh(\alpha\pi)}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+\alpha^2} = \dfrac{\alpha\pi \operatorname{ch}(\alpha\pi) - \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{2\alpha^2 sh(\alpha\pi)}.$

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{n^2+\alpha^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2} \in \mathbb{R}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{n^2+\alpha^2} \in \mathbb{R}\right)$ sont normalement convergentes donc

$\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+\alpha^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}.$

En utilisant les relations précédentes nous avons

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)-\alpha\pi}{2\alpha^2 sh(\alpha\pi)} = \dfrac{\pi^2}{12}.$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha\pi \operatorname{ch}(\alpha\pi) - \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{2\alpha^2 sh(\alpha\pi)} = \dfrac{\pi^2}{6}.$

En choisissant $\alpha = 1$ nous obtenons :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} = \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)-\pi}{2sh(\pi)}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{\pi \operatorname{ch}(\pi) - \operatorname{sh}(\pi)}{2sh(\pi)}.$

• Nous avons pour $t \in]-\pi,\ \pi[$,

$$t\exp(t) = \operatorname{ch}(\pi) - \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\dfrac{2(-1)^n \operatorname{ch}(\pi)}{1+n^2} - \dfrac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\pi)(1-n^2)}{\pi(1+n^2)^2}\right)\cos(nt) - \left(\dfrac{2(-1)^n n \operatorname{ch}(\pi)}{1+n^2} - \dfrac{4(-1)^n n \operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)^2}\right)\sin(nt)\right) \text{ et}$$

$$\pi \operatorname{sh}(\pi) = \operatorname{ch}(\pi) - \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2(-1)^n \operatorname{ch}(\pi)}{1+n^2} - \dfrac{2\operatorname{sh}(\pi)(1-n^2)}{\pi(1+n^2)^2}\right).$$

Pour $t = 0$ nous avons

$$0 = \operatorname{ch}(\pi) - \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2(-1)^n \operatorname{ch}(\pi)}{1+n^2} - \dfrac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\pi)(1-n^2)}{\pi(1+n^2)^2}\right)$$

$$= \operatorname{ch}(\pi) - \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2(-1)^n \operatorname{ch}(\pi)}{1+n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)} - \dfrac{4(-1)^n \operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)^2}.$$

$$0 = \operatorname{ch}(\pi) - \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} - \operatorname{ch}(\pi)\dfrac{\operatorname{sh}(\pi)-\pi}{sh(\pi)} - \dfrac{\operatorname{sh}(\pi)-\pi}{\pi} - \dfrac{4(-1)^n \operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)^2}.$$

• En utilisant la relation définissant t^4 nous ne déduisons pour $t = 0$,

$$0 = \dfrac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^4}.$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$ nous en déduisons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$.

Pour $t=\pi$ nous avons $\displaystyle\pi^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Nous en déduisons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

• En utilisant la relation définissant $|t|^3$ nous ne déduisons pour $t=0$,

$$0=\frac{\pi^3}{4}+6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\frac{24}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Pour $t=\pi$ nous avons

$$\pi^3=\frac{\pi^3}{4}+6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{24}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ nous en déduisons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

En écrivant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ et

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ nous en déduisons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$.

En appliquant les résultats vus plus haut nous en déduisons que la fonction g, 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $[-\pi,\ \pi]$ est définie par $g(t)=2\pi^2t^2-t^4$ est développable en série de Fourier et vérifie :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\frac{2\pi^4}{3}-\frac{\pi^4}{5}+48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt).$$

En particulier $\displaystyle 0=\frac{7\pi^4}{15}+48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$.

Nous retrouvons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$.

En utilisant la formule de Parseval nous obtenons

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\pi^2t^2-t^4)^2dt=\left(\frac{7\pi^4}{15}\right)^2+\frac{48^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$ c'est-à-dire :

$\displaystyle\frac{107\pi^8}{315}=\frac{49\pi^8}{225}+24\frac{48^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$. Il vient donc $\displaystyle\frac{48^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}$.

• En utilisant la formule de Parseval appliquée à la fonction dont la restriction à $[-\pi,\ \pi]$ et $t\longmapsto t^2$, nous avons $\displaystyle\frac{1}{2\pi}t^4=\frac{\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n^4}$ soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ et

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$

Nous en déduisons

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}.$

Nous obtenons alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$

4. La fonction f 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x\in[-\pi,0] \\ x & \text{pour } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{pour } x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$

est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc elle est développable en série de Fourier.

$a_0=\frac{\pi}{8}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(nt)dt=\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}+\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1}{\pi n^2}$,

$\displaystyle b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(nt)dt=\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}$. Il vient pour $t\in[-\pi,\ \pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$,

$$f(t)=\frac{\pi}{16}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}+\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1}{\pi n^2}\right)\cos(nt)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n}\right)\sin(nt)\right].$$

Pour $t=\frac{\pi}{2}$ la somme de la série est égale à $\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right)$;

nous obtenons $\displaystyle\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{\pi 4n^2}\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\pi(2n+1)^2}.$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{\pi^2n^4}-\frac{1}{2\pi n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi^2n^4}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$

La formule de Parseval nous donne donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2dt=\frac{\pi^2}{16^2}+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}-\frac{1}{16\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}.$$

En utilisant les résultats déjà vus nous en déduisons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=2\pi^3\left(\frac{1}{90}+\frac{7}{8\cdot 90\cdot 16}+\frac{1}{16^2}\right)=\frac{\pi^3}{32}.$$

5. f 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x\in[-\pi,\ 0] \\ x(\pi-x) & \text{pour } x\in]0,\ \pi]\end{cases}$ est

continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; elle est donc développable en série de Fourier. Cette série converge normalement.
$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x(\pi - x)dx = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x(\pi - x)\cos(nx)dx = \dfrac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2}$ et
$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)dx = \dfrac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}$.
Nous avons donc pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2}\cos(nx) + \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}\sin(nx)\right).$$
$\dfrac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1 + (-1)^n}{n^4} + 4\dfrac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^6}$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 dx = \dfrac{\pi^4}{60}$.
Nous avons donc la relation de Parseval :
$$\frac{8\pi^4}{15} = \frac{\pi^4}{144} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1 + (-1)^n}{n^4} + 4\frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^6}\right).$$
Nous obtenons alors $\dfrac{7\pi^4}{720} = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$. Nous en déduisons, en utilisant les résultats déjà vus plus haut, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

6. La fonction f 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est définie par $t \longmapsto \cos(\alpha t)$ avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. f est donc développable en série de Fourier ; la série de Fourier de f est normalement convergente.
$\cos(\alpha t)\cos(nt) = \dfrac{1}{2}\left(cos((\alpha + n)t) + \cos((\alpha - n)t)\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha + n}\sin((\alpha + n)t) + \frac{1}{\alpha - n}\sin((\alpha - n)t)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{2(-1)^n\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$
Nous obtenons donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nt)$.
En particulier, pour $t \in [-\pi,\ \pi]$ nous avons
$\cos(\alpha t) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nt)$ puis
$\cos(\alpha\pi) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2 - n^2}$ soit encore

$\text{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\alpha^2 - n^2}$ que l'on peut écrire[3] pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$\text{cotan}(t) - \dfrac{1}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$.

Soit $t \in]0,\ \pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2 \Rightarrow |t^2 - n^2\pi^2 \geqslant (n^2 - 1)\pi^2$ donc la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(t \in]0,\ \pi[\longmapsto \dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \in \mathbb{R}\right)$ converge normalement.

Nous avons donc $\displaystyle\int_0^x \left(\text{cotan}(t) - \dfrac{1}{t} - \dfrac{2t}{t^2 - \pi^2}\right) dt = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_0^x \dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} dt\right)$ c'est-à-dire :

$\displaystyle\int_0^x \left(\text{cotan}(t) - \dfrac{1}{t} - \dfrac{2t}{t^2 - \pi^2}\right) dt = \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Soit $a \in]0,\ \pi[$. $\displaystyle\int_a^x \left(\text{cotan}(t) - \dfrac{1}{t}\right) dt = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) - \ln\left(\dfrac{\sin(a)}{a}\right)$ nous en déduisons $\displaystyle\int_0^x \left(\text{cotan}(t) - \dfrac{1}{t}\right) dt = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ puis

$\forall x \in]0,\ \pi[,\ \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

La continuité de la fonction logarithme conduit à

$\forall x \in]0,\ \pi[,\ \sin(x) = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Soit alors $x \in]k\pi,\ (k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{N}^*$.Posons $y = x - k\pi$.

$(-1)^k\sin(x) = y\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{y^2}{n^2\pi^2}\right)$

3. Soit $t \in]-\pi,\ \pi[$. $\dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{-2t^{2p+1}}{(n\pi)^{2p+2}}$. $\dfrac{2|t|}{(n\pi)^2 - t^2} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2|t|^{2p+1}}{(n\pi)^{2p+2}}$.

Nous pouvons appliquer les résultats concernant les séries doubles et nous en déduisons :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\dfrac{-2t^{2p+1}}{\pi^{2p+2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{2p+2}}\right)$ puis $\dfrac{1}{t} - \text{cotan}(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}2\dfrac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}}x^{2p-1}$.

Les coefficients du développement de $\dfrac{1}{t} - \text{cotan}(t)$ sont rationnels donc pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2p) = r_p\pi^{2p}$ où $r_p \in \mathbb{Q}_+^*$.

Par exemple le développement limité à l'ordre 14 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{t} - \text{cotan}(t)$ est $\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{45}t^3 + \dfrac{2}{945}t^5 + \dfrac{1}{4725}t^7 + \dfrac{2}{93555}t^9 + \dfrac{1382}{638512875}t^{11} + \dfrac{4}{18243225}t^{13} + o(t^{14})$.

Nous en déduisons $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \dfrac{\pi^8}{9450}$, $\zeta(10) = \dfrac{\pi^{10}}{93555}$,

$\zeta(12) = \dfrac{691\pi^{12}}{638512875}$, $\zeta(14) = \dfrac{2\pi^{14}}{18243225}$.

$$= (x - k\pi) \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{((n+k)\pi - x)((n-k)\pi + x)}{n^2\pi^2} \right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $N > 1 + 2k$.

$$(x - k\pi) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{((n+k)\pi - x)((n-k)\pi + x)}{n^2\pi^2} \right)$$

$$= (-1)^k x \prod_{n=1}^{N+k} (n\pi - x) \prod_{n=1}^{N-k} (n\pi + x) \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$= (-1)^k x \prod_{n=1}^{N-k} \left(n^2\pi^2 - x^2\right) \prod_{n=N-k+1}^{N+k} (n\pi - x) \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$= (-1)^k x \prod_{n=1}^{N-k} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \prod_{n=N-k+1}^{N} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \prod_{n=N+1}^{N+k} (n\pi - x) \prod_{n=N-k+1}^{N} \frac{1}{n\pi}$$

$$= (-1)^k x \prod_{n=1}^{N-k} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \prod_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{x}{(n+N-k)\pi}\right) \prod_{n=1}^{k} \frac{(n+N)\pi - x}{(n+N-k)\pi}$$

$\lim\limits_{N \to +\infty} \prod\limits_{n=1}^{k} \left(1 - \dfrac{x}{(n+N-k)\pi}\right) = 1$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \prod\limits_{n=1}^{k} \dfrac{(n+N)\pi - x}{(n+N-k)\pi} = 1$ donc

$$\lim_{N \to +\infty} (x - k\pi) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{((n+k)\pi - x)((n-k)\pi + x)}{n^2\pi^2} \right) = (-1)^k x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Nous obtenons le même résultat pour $k < 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\sin(x) = x \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

L'égalité est alors vraie, compte tenu de la définition de la convergence d'un produit infini, pour tout réel x.

Reprenons, avec ch, tout ce que nous venons de faire avec cos.

La fonction f 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}^*$ dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est définie par $t \longmapsto \operatorname{ch}(\alpha t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. f est donc développable en série de Fourier ; la série de Fourier de f est normalement convergente.

$\operatorname{ch}(\alpha t)\cos(nt) = \dfrac{1}{2}\, \Re e \left(\exp((\alpha + in)t) + \exp((-\alpha + in)t)\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\, \Re e \left(\int_0^\pi (\exp((\alpha + in)t) + \exp((-\alpha + in)t))dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \Re e \left(\left[\frac{1}{\alpha + in} \exp((\alpha + in)t) + \frac{1}{-\alpha + in} \exp((-\alpha + in)t) \right]_0^\pi \right)$$

$$= \frac{2(-1)^n \alpha \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 + n^2)}.$$

Nous obtenons donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cos(nt)$.

En particulier, pour $t \in [-\pi,\ \pi]$ nous avons

$\operatorname{ch}(\alpha t) = \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cos(nt)$ puis

$\operatorname{ch}(\alpha \pi) = \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}$ soit encore

$\coth(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}$ que l'on peut écrire pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$\coth(t) - \dfrac{1}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2t}{t^2+n^2\pi^2}$.

Soit $A > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $|t| \leqslant A,\ n \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{|2t|}{t^2+n^2\pi^2} \leqslant \dfrac{2A}{n^2\pi^2}$ donc la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{2t}{t^2+n^2\pi^2} \in \mathbb{R}\right)$ converge normalement sur $[-A,\ A]$.

Nous avons donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \left(\coth(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^x \frac{2t}{t^2+n^2\pi^2}dt\right)$

c'est-à-dire : $\displaystyle\int_0^x \left(\coth(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Soit $(a,\ x) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $ax > 0$ et $|a| \in]0,\ |x|[$.

$\displaystyle\int_a^x \left(\coth(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right) - \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(a)}{a}\right)$ nous en déduisons

$\displaystyle\int_0^x \left(\coth(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)$ puis

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ln\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. La continuité de la fonction logarithme conduit à $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{sh}(x) = x \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

L'égalité est vraie aussi [4] pour $x = 0$.

7. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

   Nous avons la relation $\displaystyle\int_0^{2\pi} g'(t)\exp(-int)dt = in \int_0^{2\pi} g(t)\exp(-int)dt$.

   Nous avons immédiatement pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$,

   $\displaystyle\int_0^{2\pi} g^{(p)}(t)\exp(-int)dt = (in)^p \int_0^{2\pi} g(t)\exp(-int)dt$.

4. Cette relation s'obtient aussi (mais il faudrait le prouver) en utilisant la relation $\sin(x) = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ et en remplaçant dans celle-ci x par ix et en utilisant le fait que $\sin(ix) = i\operatorname{sh}(x)$.

Il vient donc $c_n\left(f^{(p)}\right) = (in)^p c_n(f)$.
Soit g une fonction continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Soit $\sigma = (a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_p)$ une subdivision de $[0,\ 2\pi]$ admissible pour f. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
$2\pi c_n(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\exp(-int)dt$. Sur l'intervalle $[a_k,\ a_{k+1}]$ nous pouvons prolonger la restriction de f à $]a_k,\ a_{k+1}[$ en une fonction continue. Soit alors h une application continue sur un intervalle $[a,\ b]$.

Étudions $\displaystyle\int_a^b h(t)\exp(-int)dt$.

Commençons par le cas où h est constante, égale à 1, sur $[c,\ d] \subset [a,\ b]$ et nulle sur $[a,\ b]\setminus[c,\ d]$.

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\int_a^b h(t)\exp(-int)dt = \frac{i}{n}(\exp(-ind) - \exp(-inc))$.

Si h est en escalier il existe une subdivision $(a_0,\ \cdots,\ a_p)$ de $[a,\ b]$ admissible pour h. Notons, pour $k \in \{0,\ \cdots,\ p-1\}$, λ_k la valeur prise par h sur $]a_k,\ a_{k+1}[$. $\displaystyle\int_a^b h(t)\exp(-int)dt = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{i\lambda_k}{n}(\exp(-ina_{k+1}) - \exp(-ina_k))$. Nous en déduisons $\displaystyle\lim_{|n|\to+\infty}\int_a^b h(t)\exp(-int)dt = 0$.

Supposons maintenant f continue sur $[a,\ b]$. f est limite uniforme d'une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\exp(-int)dt = \int_a^b (f(t) - f_p(t))\exp(-int)dt + \int_a^b f_p(t)\exp(-int)dt$ donc

$\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\exp(-int)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t) - f_p(t)|dt + \left|\int_a^b f_p(t)\exp(-int)dt\right|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_p - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Nous avons donc $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\exp(-int)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b f_p(t)\exp(-int)dt\right|$.

D'après le résultat précédent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b f_p(t)\exp(-int)dt\right| = \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n on ait $n \geqslant N \Rightarrow \displaystyle\left|\int_a^b f(t)\exp(-int)dt\right| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\exp(-int)dt = 0$.

En regroupant ces résultats nous obtenons [5] que pour une fonction g continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique nous avons $\displaystyle\lim_{|n|\to+\infty} c_n(g) = 0$.

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^p$, définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique nous avons

5. La preuve de ce résultat est évidemment plus simple dans le cas où g est continue et encore plus simple (en intégrant par parties) lorsque g est de classe $\mathcal{C}^1$.

lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$, $c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ puis lorsque n tend vers $+\infty$, $a_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ et $b_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

$f(t) - R_n(f)(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(kt) + b_n(f)\sin(kt))$.

La convergence de la série de Fourier de f est normale pour une fonction f de classe au moins $\mathcal{C}^1$. Donc pour $p = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - R_n(f)\|_\infty = 0$ c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$, $f - R_n(f) = o(1)$.

Supposons $p \geqslant 2$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $|a_n(f)| \leqslant \varepsilon\dfrac{1}{n^p}$ et $|b_n(f)| \leqslant \varepsilon\dfrac{1}{2n^p}$.

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}$.

Nous obtenons donc $\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |f(t) - R_n(f)(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n^{p-1}}$

c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$ $\|f - R_n(f)\|_\infty = o\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)$.

8. L'application f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que pour $t \in [-\pi, \pi]$ nous ayons $f(t) = 1 - \dfrac{t^2}{\pi^2}$ est paire, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

   La série de Fourier de f converge normalement. En intégrant par parties, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

   $$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)\cos(nt)dt = \frac{4}{n\pi^3}\int_0^\pi t\sin(nt)dt \\ &= \frac{4}{n\pi^3}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi^3}\int_0^\pi \cos(nt)dt = -\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

   $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right) dt = \frac{4}{3}$.

   Nous obtenons donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.

   En utilisant la formule de Parseval nous obtenons

   $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)^2 dt = \frac{4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^4\pi^4}$ c'est-à-dire

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(-\frac{4}{9} + \frac{8}{15}\right) = \frac{\pi^4}{90}$.

   Pour $t \in [-\pi,\ \pi]$, $1 - \dfrac{t^2}{\pi^2} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.

   En particulier pour $t = 0$ et pour $t = \pi$ nous avons

   $1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $0 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nous obtenons donc $-\dfrac{\pi^2}{12}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\dfrac{\pi^2}{6}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

9. Soit $\varepsilon>0$. La convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(t\in\mathbb{R}\longmapsto b_n\sin(nt)\in\mathbb{R})$ étant uniforme, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout couples d'entiers $(p,\ q)$ on ait : $q\geqslant p\geqslant N\Rightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \left|\displaystyle\sum_{k=p}^{q}b_k\sin(kt)\right|\leqslant\varepsilon$. En particulier pour $n\in\mathbb{N}^*$ au moins égal à N nous avons $\forall t\in\mathbb{R},\ \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}b_k\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right|\leqslant\varepsilon$.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc pour k compris entre $n+1$ et $2n$ nous avons $b_k\sin\left(\dfrac{k\pi}{4n}\right)\geqslant b_{2n}\sin\left(\dfrac{(n+1)\pi}{4n}\right)\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}b_{2n}$.

Nous obtenons donc $\dfrac{n\sqrt{2}}{2}b_{2n}\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}b_k\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\leqslant\varepsilon$. Il vient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2n)b_{2n}=0$.

$0\leqslant(2n+1)b_{2n+1}\leqslant(2n)b_{2n}\dfrac{2n+1}{2n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2n+1)b_{2n+1}=0$ et $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Supposons que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et négligeable, lorsque n tend vers $+\infty$, devant la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(t\in\mathbb{R}\longmapsto b_n\sin(nt)\in\mathbb{R})$ converge uniformément.

La fonction étant impaire et 2π-périodique nous pouvons nous limiter à $[0,\ \pi]$.

Supposons $t\in]0,\ \pi]$ et posons $p=E\left(\dfrac{\pi}{t}\right)$. Notons $S_n(t)$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$.

$$S_n(t)=\Im m\left(\sum_{k=0}^{n}\exp(ikt)=\frac{1-\exp(i(n+1)t)}{1-\exp(it)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

$$|S_n(t)|\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

$$\sum_{k=n+1}^{N}b_k\sin(kt)=\sum_{k=n+1+p}^{N}b_k(S_k(t)-S_{k-1}(t))=\sum_{k=n+1+p}^{N}b_kS_k(t)-\sum_{k=n+p}^{N-1}b_{k+1}S_k(t)$$

$$=b_NS_N(t)-b_{n+p+1}S_{n+p}(t)+\sum_{k=n+1+p}^{N-1}(b_k-b_{k+1})S_k(t).$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante positive, il vient
$\left|\sum_{k=n+1}^{N} b_k \sin(kt)\right| \leqslant b_N + b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{N-1}(b_k - b_{k+1}) = 2b_{n+1}\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc en utilisant le critère de Cauchy nous en déduisons la convergence de $\sum b_n \sin(nt)$ et $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kt)\right| \leqslant 2b_{n+1}\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
La fonction sinus est concave sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ donc sur cet intervalle $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi}t$. Il vient alors $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kt)\right| \leqslant 2b_{n+1}\frac{\pi}{t}$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $n \geqslant N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kt)\right| \leqslant \varepsilon\frac{\pi}{2t(n+1)}$. En particulier $\left|\sum_{k=n+1+p}^{+\infty} b_k \sin(kt)\right| \leqslant \varepsilon\frac{\pi}{2t(n+p+1)} \leqslant \varepsilon\frac{\pi}{2t(p+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geqslant N$, $0 \leqslant b_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2n\pi}$ donc pour $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant N$, nous avons
$0 \leqslant b_k \sin(kt) \leqslant \frac{\varepsilon t}{2\pi}$. $\sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k \sin(kt)| \leqslant \frac{\varepsilon pt}{2\pi} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Finalement $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kt)\right| \leqslant \varepsilon$. La convergence est bien uniforme d'où l'équivalence demandée.

10. (a) $\frac{2b}{1-b^2}g(b) = \frac{2b}{1-b^2}\frac{1-b^2}{1-2b\cos(t)+b^2} = \frac{2b}{2b(a-\cos(t))} = f(t)$.
$\frac{1-z^2}{1-2z\cos(t)+z^2} = -1 + \frac{1}{1-z\exp(it)} + \frac{1}{1-z\exp(-it)}$.
Pour $|z| < 1$ nous avons
$$g(z) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(\exp(int) + \exp(-int))z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos(nt)z^n.$$
(b) $f(t) = \frac{1}{a-\cos(t)}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ 2π-périodique. f est développable en série de Fourier ; celle-ci est normalement convergente.
Les deux racines de l'équation $z^2 - 2az + 1$ ont un produit égal à 1 donc elles sont toutes deux de module égal à 1 ou l'une des deux, b, a un module strictement inférieur à 1.
Supposons que les deux racines ont pour module 1. Elles sont respectivement égales à $\exp(i\alpha)$ et $\exp(-i\alpha)$ avec α réel. Nous avons alors $2a = 2\cos(\alpha)$ donc $a \in [-1,\ 1]$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Nous avons donc $|b| < 1$. En utilisant les résultats précédents nous avons

$$f(t) = \frac{2b}{1-b^2} g(b) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2b^n \cos(nt)\right).$$

Le développement en série de Fourier est unique donc

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{4b^{n+1}}{1-b^2}.$$

Nous en déduisons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos(t)}dt = \frac{2\pi b^{n+1}}{1-b^2}$.

(c) Soit $\theta > 0$. Pour $a = -\operatorname{ch}(\theta)$, nous choisissons $b = -\exp(-\theta)$. En utilisant ce qui précède nous obtenons

$$I_n = \frac{2\pi(-1)^n \exp(-(n+1)\theta)}{1-\exp(-2\theta)} = \frac{\pi(-1)^n \exp(-n\theta)}{\operatorname{sh}(\theta)}.$$

11. (a) Supposons $\sin(t) \neq 0$.

$$\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} = \frac{i}{2\sin(t)}\left(\frac{\exp(-it)}{1-\lambda\exp(-it)} - \frac{\exp(it)}{1-\lambda\exp(it)}\right).$$

Pour $|\lambda| < 1$ nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} &= \frac{i}{2\sin(t)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\exp(-i(n+1)t) - \exp(i(n+1)t))\lambda^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}\right)\lambda^n.\end{aligned}$$

Si $\sin(t) = 0$, $\displaystyle\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon\lambda)^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\lambda}\right)$ où $\varepsilon = \pm 1$.

Nous en déduisons $\displaystyle\frac{1}{(1-\varepsilon\lambda)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varepsilon^n\lambda^n$.

Cette relation s'obtient à partir du développement précédent en remplaçant $\displaystyle\frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$ par la limite en $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(b) Plaçons-nous encore dans le cas où $\sin(t)$ est non nul. En utilisant le résultat précédent nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} - \frac{\lambda\cos(t)}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}\right)\lambda^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sin((n+1)t)\cos(t)}{\sin(t)}\right)\lambda^{n+1}\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin((n+1)t) - \sin(nt)\cos(t)}{\sin(t)}\right)\lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)\lambda^n.\end{aligned}$$

Dans le cas où $\sin(t) = 0$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} - \frac{\lambda\cos(t)}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2}\\ &= \frac{1}{1-\varepsilon\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^n\lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)\lambda^n.\end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai pour tout réel t et pour tout nombre complexe λ de module strictement inférieur à 1.

(c) Soit, pour $t \in \mathbb{R}$ et pour $|\lambda| < 1$, $f(t) = \dfrac{1}{1 - 2\lambda\cos(t) + \lambda^2}$. Le dénominateur s'annule pour $\lambda = \exp(it)$ ou $\lambda = \exp(-it)$ ce qui est donc exclus car $|\lambda| < 1$. f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire et 2π-périodique. f est développable en série de Fourier ; cette série converge normalement. Nous avons donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.

Il vient alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)\lambda^n &= f(t) - \lambda\cos(t)f(t)\\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) - \frac{a_0}{2}\lambda\cos(t) - \sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda a_n \cos(nt)\cos(t)).\end{aligned}$$

En écrivant $2\cos(nt)\cos(t) = \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)$ et en utilisant le fait que la série $\sum a_n$ est absolument convergente nous obtenons :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)\lambda^n &= \Big(\frac{a_0}{2} - \lambda\frac{a_1}{2}\Big) + \Big(a_1 - \lambda\frac{a_0}{2} - \lambda\frac{a_2}{2}\Big)\\ &\quad + \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(a_n - \lambda\frac{a_{n-1}}{2} - \lambda\frac{a_{n+1}}{2}\cos(nt)\Big).\end{aligned}$$

L'unicité du développement en série de Fourier conduit à

$a_0 - \lambda a_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2a_n - \lambda(a_{n+1} + a_{n+1}) = 2\lambda^n$.

Montrons un résultat préliminaire.

Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + (a+ib)^2u^2} &= \frac{1}{2(1 + (ai - b)u))} + \frac{1}{2(1 + (-ai + b)u)}\\ &= \frac{1 - (ai+b)u}{2((1 - bu)^2 + a^2u^2)} + \frac{1 + (ai+b)u}{2((1+bu)^2 + a^2u^2)}.\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}(1 - (ai+b)u) = \dfrac{1}{4((ai - b))}(-2b + 2(a^2 + b^2)u) + \dfrac{ai}{2(ai - b)}$; nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1 + (ai - b)u))} &= \frac{1}{4(ai - b)}\frac{-2b + 2(a^2+b^2)u}{(a^2+b^2)u^2 - 2bu + 1}\\ &\quad + \frac{ai}{2(ai - b)((a^2+b^2)u^2 - 2bu + 1)}.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1 + (b - ai)u))} &= \frac{1}{4(b - ai)}\frac{2b + 2(a^2+b^2)u}{(a^2+b^2)u^2 + 2bu + 1}\\ &\quad + \frac{ai}{2(ai - b)((a^2+b^2)u^2 + 2bu + 1)}.\end{aligned}$$

Une primitive de $u \longmapsto \dfrac{1}{2(1 + (ai - b)u))}$ est :

$$u \longmapsto \frac{1}{4(ai-b)} \ln\big((a^2+b^2)u^2-2bu+1\big)+\frac{1}{2(a+ib)} \operatorname{atan}\left(\frac{a^2+b^2}{a}u-\frac{b}{a}\right).$$

De même une primitive de $u \longmapsto \dfrac{1}{2(1+(b-ai)u))}$ est :

$$u \longmapsto \frac{1}{4(b-ai)} \ln\big((a^2+b^2)u^2+2bu+1\big)+\frac{1}{2(a+ib)} \operatorname{atan}\left(\frac{a^2+b^2}{a}u+\frac{b}{a}\right).$$

Nous en déduisons

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(a+ib)^2u^2} = \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{1}{4(-ai+b)}\ln\left(\frac{(a^2+b^2)u^2+2bu+1}{(a^2+b^2)u^2-2bu+1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2(a+ib)}\operatorname{atan}\left(\frac{a^2+b^2}{a}u-\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2(a+ib)}\operatorname{atan}\left(\frac{a^2+b^2}{a}u+\frac{b}{a}\right)\right]_0^X$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(a+ib)^2u^2} = \frac{\pi}{2(a+ib)}.$$

Lorsque $b=0$ le calcul est évidemment plus simple.

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\lambda^2-2\lambda\cos(t)}$.

En utilisant le changement de variable $t\in[0,\ \pi[\longmapsto u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\in\mathbb{R}_+$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme nous obtenons

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\lambda^2-2\lambda\cos(t)} = \int_0^{+\infty}\frac{2du}{(1+u^2)\left(1+\lambda^2-2\lambda\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$$
$$= \frac{2}{(\lambda-1)^2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2u^2}.$$

Si $\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}=ib$ avec b réel alors $|\lambda|=1$ ce qui est exclus.

$\Re e\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)=\dfrac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2}>0$ car $|\lambda|<1$.

Nous avons donc $\forall\lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda|<1,\ \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\lambda^2-2\lambda\cos(t)}=\frac{\pi}{1-\lambda^2}$.

En utilisant ce résultat nous obtenons $a_0=\dfrac{2}{1-\lambda^2}$.

Supposons $\lambda\neq 0$. $a_1=\dfrac{a_0-2}{\lambda}=\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}$.

Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N},\ a_n=\dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

Le résultat est vrai pour $n=0$ et $n=1$. Supposons-le vrai jusqu'au rang $n\geqslant 1$. En utilisant la relation $2a_n-\lambda(a_{n+1}+a_{n-1})=2\lambda^n$ nous obtenons

$$\frac{4\lambda^n}{1-\lambda^2}-\frac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}-2\lambda^n=a_{n+1}\lambda \text{ c'est-à-dire } a_{n+1}=\frac{2\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2}.$$

Nous avons donc bien pour tout entier naturel n $a_n=\dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

Si $\lambda = 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1+\lambda^2-2\lambda\cos(t)}dt = \int_0^\pi \cos(nt)dt = \left\{\begin{array}{lll} \pi & \text{pour} & n=0 \\ 0 & \text{pour} & n\in\mathbb{N}^* \end{array}\right.$
Le résultat précédent est donc vrai aussi pour $\lambda = 0$.

Nous obtenons donc $\displaystyle\frac{1}{1-2\lambda\cos(t)+\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}(2\lambda^n\cos(nt))\right)$.

Finalement pour $(\lambda,\ n)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N},\ |\lambda|<1$ nous avons
$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\lambda^2-2\lambda\cos(t)+1}dt = \frac{\pi\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

Remarque Nous pouvions utiliser le résultat de l'exercice précédent pour obtenir la réponse à cette question.

12. Soit, pour $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt$.

f étant une fonction 2π-périodique, continue par morceaux définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ la formule de Parseval s'applique et nous avons
$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2)$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons pour tout couple de n-uplet $(x,\ y)$ avec $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbb{C}^n$ et $y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbb{C}^n$
$\displaystyle\left|\sum_{k=1}^n x_ky_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\right)$.

Nous avons donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n |c_k(f)|\frac{1}{k}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |c_k(f)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$.

De même $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n |c_{-k}(f)|\frac{1}{k}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |c_{-k}(f)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$.

Nous en déduisons que les séries de termes généraux (pour $n\in\mathbb{N}^*$) $|c_n(f)|\displaystyle\frac{1}{n}$ et $|c_{-n}(f)|\displaystyle\frac{1}{n}$ sont convergentes et de plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|)\frac{1}{n} \leqslant \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n(f)|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}|c_{-n}(f)|^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$, $ib_n(f)=c_n(f)-c_{-n}(f)$ donc
$|a_n(f)|\leqslant|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|$ et $|b_n(f)|\leqslant|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|$

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n(f)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{b_n(f)}{n}$ sont donc absolument convergentes.

13. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons pour $(n,\ p)\in\mathbb{N}^2$,
$\displaystyle\left(\sum_{k=-p}^n |c_k(f)c_k(g)|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=-p}^n |c_k(f)|^2\right)\left(\sum_{k=-p}^n |c_k(g)|^2\right)$.

f et g sont deux fonctions continues par morceaux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-

périodiques donc on peut appliquer la formule de Parseval à l'une et l'autre fonction. Nous en déduisons que pour tout réel x $h(x)$ est la somme de deux séries absolument convergentes.
Chaque application $x \in \mathbb{R} \longmapsto c_n(f)c_n(g)\exp(inx) \in \mathbb{C}$ est continue donc h est continue.

14. La fonction f_x définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue, nulle sur $[2x, \pi]$, paire, valant 1 en 0, affine sur $[0, 2x]$ est continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. $a_0(f_x) = \dfrac{2x}{\pi}$.

$$\begin{aligned}\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f_x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2x}\left(1-\frac{t}{2x}\right)\cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(1-\frac{t}{2x}\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{2x} + \frac{2}{\pi}\int_0^{2x}\frac{1}{2nx}\sin(nt)dt \\ &= \frac{1-\cos(2nx)}{\pi n^2 x}.\end{aligned}$$

f_x est développable en série de Fourier ; la série de Fourier de f_x converge normalement.

Nous avons $\forall t \in \mathbb{R},\ f_x(t) = \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{2}{\pi x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2}\cos(nt)$.

Pour $t = 0$ nous obtenons $1 = \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{2}{\pi x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2}$.

Pour $t = 2x$ nous obtenons $0 = \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{2}{\pi x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2}\cos(2nx)$.

Pour $t = \pi$ nous obtenons $0 = \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{2}{\pi x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin^2(nx)}{n^2}$.

En utilisant ces trois expressions nous en déduisons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^4(nx)}{n^2} = \frac{\pi x}{4},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin^2(nx)}{n^2} = -\frac{x^2}{2}.$$

À partir de la dernière relation et en utilisant la relation $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, vue dans des exercices précédents, nous obtenons

pour $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(2nx)}{n^2} = x^2 - \frac{\pi^2}{12}$.

15. Soit g la fonction définie sur $[-\pi,\ \pi]$ par $g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour} \quad t \in [0,\ \pi] \\ -f(-t) & \text{pour} \quad t \in [-\pi,\ 0[\end{cases}$.
Soit alors h la fonction 2π-périodique dont la restriction à $-\pi,\ \pi[$ est la restriction de g à ce même intervalle.
h est continue car $f(0) = f(\pi) = 0$. Pour $t \in]0,\ \pi[$, $h'(t) = f'(t)$, pour $t \in]-\pi,\ 0[$, $h'(t) = f'(-t)$.
$\lim\limits_{t\to 0^-} h'(t) = f'(0)$, $\lim\limits_{t\to 0^+} h'(t) = f'(0)$. h est dérivable en 0 et la dérivée est continue en 0.

$\lim_{t\to\pi^-} h'(t) = f'(\pi)$, $\lim_{t\to(-\pi)^+} h'(t) = f'(\pi)$ donc $\lim_{t\to\pi} h'(t) = f'(\pi)$. h est dérivable en π et la dérivée est continue en π. h est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. h est développable en série de Fourier ; la série de Fourier de h est normalement convergente. $c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\exp(-int)dt$, $c_n(h') = inc_n(h)$.

$$\begin{aligned} c_n(h) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(t)\exp(-int)dt - \int_0^{\pi} f(t)\exp(int)dt\right) \\ &= -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = -\frac{i}{2}b_n(h). \end{aligned}$$

En utilisant les formules de Parseval appliquées à h et h' nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(h)|^2.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h'(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2|b_n(h)|^2.$$

$$b_n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(t)dt.$$

h est développable en série de Fourier donc $\forall t \in [0,\ \pi],\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(h)\sin(nt)$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_n = nb_n(h)$. Nous obtenons alors

$$\forall t \in [0,\ \pi],\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n}\sin(nt),\ \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2.$$

16. Pour $|r| < 1$ nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n f(t)\exp(i(n(\theta - t))) = \frac{f(t)}{1 - r\exp(i(\theta - t))}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n f(t)\exp(i(n(-\theta + t))) &= f(t)\left(-1 + \frac{1}{1 - r\exp(i(-\theta + t))}\right) \\ &= f(t)\frac{r\exp(i(-\theta + t))}{1 - r\exp(i(-\theta + t))}. \end{aligned}$$

$|r^n f(t)\exp(i(n(\theta - t)))| \leqslant \|f\|_\infty |r|^n$ et $|r^n f(t)\exp(i(n(-\theta + t)))| \leqslant \|f\|_\infty |r|^n$ donc les séries sont normalement convergentes de la variable t. Nous avons donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n f(t)\exp(i(n(\theta - t)))\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{1 - r\exp(i(\theta - t))}dt \text{ et}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n f(t)\exp(i(n(-\theta + t)))\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r\exp(i(-\theta + t))f(t)}{1 - r\exp(i(-\theta + t))} \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n c_n(f)\exp(in\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n c_{-n}(f)\exp(-in\theta)\right)dt \\ &\qquad = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}. \end{aligned}$$

Notons $P_r(t)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$. Nous avons bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n c_n(f)\exp(in\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n c_{-n}(f)\exp(-in\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta-t)dt.$$

f est 2π-périodique donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta-t)dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)P_r(t)dt$.

En choisissant $f=1$ nous obtenons $1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P_r(t)dt$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)P_r(t)dt&=\int_0^{\pi} f(\theta-t)P_r(t)dt+\int_0^{\pi} f(\theta+t)P_r(-t)dt\\&=\int_0^{\pi}(f(\theta-t)+f(\theta+t))P_r(t)dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}(f(\theta-t)+f(\theta+t))P_r(t)dt\\&\qquad=\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta-0)+f(\theta+t)-f(\theta+0))P_r(t)dt\\&\qquad\qquad+(f(\theta-0)+f(\theta+0))\int_0^{\pi}P_r(t)dt\\&=\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta-0)+f(\theta+t)-f(\theta+0))P_r(t)dt\\&\qquad\qquad+\pi(f(\theta-0)+f(\theta+0)).\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\alpha\in]0,\ \pi[$ tel que pour $t\in[0,\ \alpha]$ on ait
$||f(\theta-t)-f(\theta-0)+f(\theta+t)-f(\theta+0)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $t\in[\alpha,\ \pi]$ nous avons
$r^2-2r\cos(t)+1\geqslant r^2-2r\cos(\alpha)+1=(r-\cos(\alpha))^2+\sin^2(\alpha)\geqslant\sin^2(\alpha)$.

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta-0)+f(\theta+t)-f(\theta+0))P_r(t)dt\right|\\&\qquad\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\alpha}P_r(t)dt+4\|f\|_\infty\int_\alpha^{\pi}P_r(t)dt\\&\qquad\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\pi}P_r(t)dt+\frac{(1-r^2)}{\sin^2(\alpha)}\|f\|_\infty=\frac{\varepsilon\pi}{2}+\frac{(1-r^2)}{\sin^2(\alpha)}\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{r\to1^-}\frac{\varepsilon\pi}{2}+\frac{(1-r^2)}{\sin^2(\alpha)}\|f\|_\infty=\frac{\varepsilon\pi}{2}$ donc

$\displaystyle\lim_{r\to1^-}\int_0^{\pi}(f(\theta-t)-f(\theta-0)+f(\theta+t)-f(\theta+0))P_r(t)dt=0.$

Nous obtenons bien $\displaystyle\lim_{\substack{r\to1\\<}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\exp(in\theta)=\frac{1}{2}\left(f(\theta+0)+f(\theta-0)\right)$.

17. (a) **Rappel :** *soit F une application définie de $A\times I$ dans $\mathbb{C}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.*
S'il existe φ continue par morceaux définie de I dans $\mathbb{R}_+$ intégrable vérifiant $\forall(x,\ t)\in A\times I\ |F(x,\ t)|\leqslant\varphi(t)$, si pour chaque $t\in I$ l'application

$F(.,\ t) = (x \in I \longmapsto F(x,t) \in \mathbb{C})$ est continue et si pour chaque $x \in A$ l'application $F(x,\ .) = (t \in I \longmapsto F(x,t) \in \mathbb{C})$ est continue par morceaux alors l'application G définie par $G(x) = \displaystyle\int_I F(x,\ .)$ est définie sur A et est continue.
Par ailleurs si une fonction g est une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux nous avons pour tout réel a
$$\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt.$$
Si f et g sont deux applications 2π-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux nous avons pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt = \int_{x-2\pi}^{x} f(t)g(x-t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$
Nous en déduisons $f * g = g * f$.
$\forall (x,\ t) \in \mathbb{R}\times[0,\ 2\pi]$, $|f(x-t)g(t)| \leqslant \|g\|_\infty$. De même $|g(x-t)f(t)| \leqslant \|g\|_\infty$.
Supposons par exemple f continue. En appliquant le rappel nous en déduisons que $f * g$ est continue.

(b) Soient f et g deux applications continues par morceaux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques.
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\exp(-inx)dx\right)dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} g(x-t)\exp(-in(x-t))dx\right) f(t)\exp(-int)dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-t}^{2\pi-t} g(x)\exp(-in(x-t))dx\right) f(t)\exp(-int)dt.$$
g étant périodique nous en déduisons
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\exp(-inx)dx\right)dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} g(x)\exp(-inx)dx\right) f(t)\exp(-int)dt$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} g(x)\exp(-inx)dx\right)\left(\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt\right) = 4\pi^2 c_n(f)c_n(g).$$
Montrons que si φ et ψ sont deux applications continues par morceaux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques alors
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(x-t)dx\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(x-t)dt\right)dx.$$
Commençons par le cas où la restriction de φ à l'intervalle d'extrémités a et b avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2\pi$ est égale à 1 et nulle sur le complémentaire dans $[0,\ 2\pi]$ de cet intervalle ; de même la restriction de ψ à l'intervalle d'extrémités c et d avec $0 \leqslant c \leqslant d \leqslant 2\pi$ est égale à 1 et nulle sur le complémentaire dans $[0,\ 2\pi]$ de cet intervalle.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(x-t)dt\right)dx &= \int_0^{2\pi}\left(\int_a^{b}\psi(x-t)dt\right)dx\\ &= \int_0^{2\pi}(\Psi(x-a)-\Psi(x-b))dx\end{aligned}$$

avec $\Psi(x)=\displaystyle\int_{-2\pi}^{x}\psi(t)dt$.

$$\Psi \text{ est définie par } \Psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour } -2\pi\leqslant x\leqslant c-2\pi\\ x-c+2\pi & \text{pour } c-2\pi\leqslant x\leqslant d-2\pi\\ d-c & \text{pour } d-2\pi\leqslant x\leqslant c\\ x+d-2c & \text{pour } c\leqslant x\leqslant d\\ 2(d-c) & \text{pour } d\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}.$$

Examinons trois cas

• $a+c\geqslant 2\pi$.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\Psi(x-a)dx &= \int_0^{a+c-2\pi}0dx+\int_{a+c-2\pi}^{a+d-2\pi}(x-a-c+2\pi)dx+\int_{a+d-2\pi}^{2\pi}(d-c)dx\\ &=(d-c)\left(4\pi-a-\frac{c}{2}-\frac{d}{2}\right).\end{aligned}$$

• $a+c\leqslant 2\pi$ et $a+d\geqslant 2\pi$.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\Psi(x-a)dx &= \int_0^{a+d-2\pi}(x-a-c+2\pi)dx+\int_{a+d-2\pi}^{a+c}(d-c)dx\\ &\quad+\int_{a+c}^{2\pi}(x-a+d-2c)dx\\ &=(d-c)\left(4\pi-a-\frac{c}{2}-\frac{d}{2}\right).\end{aligned}$$

• $a+c\leqslant 2\pi$ et $a+d\leqslant 2\pi$.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\Psi(x-a)dx &= \int_0^{a+c}(d-c)dx+\int_{a+c}^{a+d}(x-a+d-2c)dx\\ &\quad+\int_{a+d}^{2\pi}2(d-c)dx\\ &=(d-c)\left(4\pi-a-\frac{c}{2}-\frac{d}{2}\right).\end{aligned}$$

En faisant de même avec b nous obtenons finalement

$$\int_0^{2\pi}(\Psi(x-a)-\Psi(x-b))dx=(d-c)(b-a).$$

Nous obtenons donc l'égalité

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(x-t)dt\right)dx=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(x-t)dx\right)dt.$$

Par combinaison linéaire, le résultat est encore vrai pour le cas où φ et ψ sont en escalier.

Supposons que φ soit continue par morceaux. φ est limite uniforme d'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$en escalier sur $[0,\ 2\pi]$.

Pour $n\geqslant N, \forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\leqslant 1$ donc $|\varphi_n(t)|\leqslant 1 + \varphi(t)|$. Nous en déduisons $\|\varphi_n\|_\infty\leqslant \max(\max(\|\varphi_k\|_\infty,\ k\leqslant n), 1 + \|\varphi\|_\infty)$. Il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout couple $(n,\ t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ on ait $\|\varphi_n\|_\infty\leqslant M$.

Posons $u_n(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(x-t)\varphi_n(t)dt$.

$|\psi(x-t)\varphi_n(t)|\leqslant M\|\psi\|_\infty$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \psi(x-t)\varphi_n(t) = \psi(x-t)\varphi(t)$ donc

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \int_0^{2\pi} \psi(x-t)\varphi(t)dt = u(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $(n,\ t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ on ait

$n\geqslant N \Rightarrow |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\pi\|\psi\|_\infty + 1}$.

$|u_n(x) - u(x)| = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\psi(x-t)(\varphi_n(t) - \varphi(t))|dt\leqslant 2\pi\|\psi\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\pi\|\psi\|_\infty + 1}\leqslant\varepsilon$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers u. Nous en déduisons

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(x)dx = \int_0^{2\pi} u(x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\psi(x-t)dx\right)dt &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\psi(x-t)dx\right)\varphi_n(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\psi(x)dx\right)\varphi_n(t)dt = \left(\int_0^{2\pi}\psi(x)dx\right)\left(\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)dt\right).\end{aligned}$$

Il vient immédiatement

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\psi(x-t)dx\right)dt = \left(\int_0^{2\pi}\psi(x)dx\right)\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt\right).$$

Nous en déduisons

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(x-t)dt\right)dx = \left(\int_0^{2\pi}\psi(x)dx\right)\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt\right).$$

En supposant maintenant ψ continue par morceaux et en refaisant le même raisonnement nous obtenons finalement que pour φ et ψ 2π-périodiques continues par morceaux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nous avons la relation

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(x-t)dt\right)dx = \left(\int_0^{2\pi}\psi(x)dx\right)\left(\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt\right).$$

En choisissant $\varphi(t) = f(t)\exp(-int)$ et $\psi(t) = g(t)\exp(-int)$ nous obtenons $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

(c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et dont la restriction à $[-\pi,\ \pi]$ est définie par $f(t) = t$. En intégrant par parties nous obtenons $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \dfrac{(-1)^n i}{n}$ et $c_0(f) = 0$. Il vient alors $c_n(f * f) = -\dfrac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}(f*f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tf(x-t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}(x-t)f(t)dt = \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} tf(t)dt\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} tf(t)dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f*f)(-x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x+t)f(-t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)f(t)dt.\end{aligned}$$

$f*f$ est paire 2π-périodique. Supposons $x \in [0,\ \pi]$.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} tf(t)dt &= -\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{\pi} t^2dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{x+\pi} t(t-2\pi)dt\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} vt^2dt + \frac{1}{2\pi}2\pi\int_{\pi}^{x+\pi} tdt = -\frac{x^2}{2} + \pi x - \frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

Finalement $f*f$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et pour $x \in [0,\ 2\pi]$ nous avons $(f*f)(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{2}(x-\pi)^2$.

Le développement en série de Fourier conduit alors à

$$\forall x \in [0,\ 2\pi],\ \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}(x-\pi)^2 = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

Par exemple pour $x = \pi$ nous avons $\dfrac{\pi^2}{6} = -2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, pour $x = 0$ nous avons $\dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{2} = -2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Nous retrouvons des résultats déjà vus de nombreuses fois ; à savoir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

18. $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\cos(nx) &= \Re e\left(\sum_{n=1}^{N}\exp(inx)\right) = \Re e\left(\exp\left(i\frac{(N+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{\cos\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}} \in \mathbb{R}\right)$ est normalement convergente.

Soient $x \in]0,\ \pi]$ et $N = E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

$$\frac{f(0)-f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}} \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous avons donc $\dfrac{f(0)-f(x)}{x} \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{x}}{\pi^{\frac{3}{2}}}(1-\cos(nx))$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(nx)) = \frac{3N}{2} - \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{x}-1\right) - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Finalement $\dfrac{f(0)-f(x)}{x} \geqslant \dfrac{3\sqrt{x}}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\dfrac{\pi}{x}-1\right) - \dfrac{\sqrt{x}}{2\sin\left(\frac{x}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

Lorsque x tend vers 0 nous avons $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{12} + o(x^2)$. Nous en déduisons que $\sqrt{x}\left(\dfrac{\pi}{x} - 1 - \dfrac{1}{3\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{3\pi-2}{3\sqrt{x}}$.

En conclusion $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. f étant paire $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$.

19. Nous savons que lorsqu'une série trigonométrique converge uniformément alors cette série est la série de Fourier de la somme de cette série.

    Posons pour $z \in \mathbb{C},\ |z| < R,\ f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n z^n$.

    f étant développable en série entière à l'origine, pour $r \in]0,\ R[$, la série de fonctions $\sum (t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda_n r^n \exp(int) \in \mathbb{C})$ converge normalement. Nous en déduisons, en posant $g(t) = f(r\exp(it))$, $c_n(g) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque} \quad n \in \mathbb{Z}_-^* \\ \lambda_n r^n & \text{lorsque} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

20. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r < R$.

    $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n \exp(-in\theta) = \left(\frac{z}{r}\right)\exp(-i\theta)\frac{1}{1-\left(\frac{z}{r}\right)\exp(-i\theta)} = \frac{z}{r\exp(i\theta)-z}.$$

    $$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n \exp(-in\theta) = \frac{r\exp(i\theta)+z}{r\exp(i\theta)-z}.$$

    $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n\exp(-in\theta)\right)d\theta\right)$$
    $$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\exp(i\theta)+z}{r\exp(i\theta)-z}g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))d\theta.$$

    Pour r fixé, notons $G(\theta) = g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))$.

    Notons $z = \rho\exp(it)$. Nous obtenons alors en prenant la partie réelle des deux membres :

    $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos(n(t-\theta))\right)d\theta\right)$$
    $$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))d\theta.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\theta\in\mathbb{R}\longmapsto\left(\frac{\rho}{r}\right)^n G(\theta)\cos(n(t-\theta))\in\mathbb{R}\right)$ est normalement convergente donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos(n(t-\theta))\right)d\theta\right)$

$$= \frac{a_0(G)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n(a_n(G)\cos(nt)+b_n(G)\sin(t)).$$

Finalement

$$\frac{a_0(G)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n(a_n(G)\cos(nt)+b_n(G)\sin(t)))$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}G(\theta)d\theta.$$

$G(\theta)=g(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))=\sum_{n=0}^{+\infty}\Re e\,(\alpha_n r^n\exp(in\theta))$.

Notons $\alpha_n=u_n+iv_n$; $(u_n,\ v_n)\in\mathbb{R}^2$. $G(\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}r^n(u_n\cos(n\theta)-v_n\sin(n\theta))$.

Nous obtenons $a_0(G)=2u_0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(G)=r^nu_n,\ b_n(G)=-r^nv_n$.

En remplaçant dans la relation vue plus haut nous obtenons :

$\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n(u_n\cos(nt)-v_n\sin(t))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}G(\theta)d\theta$ c'est-à-dire pour $|z|<r<R,\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}G(\theta)d\theta$.

Posons $H(\theta)=\ \Re e(-if(r\exp(i\theta)))=\Im m(f(r\exp(i\theta))$.

En appliquant ce qui vient d'être fait nous obtenons pour $|z|<r$,

$\Im m(f(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}H(\theta)d\theta$ donc finalement

pour $|z|<r<R$, $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}f(r\exp(i\theta))d\theta$.

Remarque Nous pouvions utiliser un résultat déjà vu plus haut à l'exercice numéro 11.

Pour $|\lambda|<1$ nous avons la relation $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(n\theta)}{\lambda^2-2\lambda\cos(\theta)+1}d\theta=\frac{\lambda^n}{1-\lambda^2}$ donc

sin étant impaire, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(in\theta)}{\lambda^2-2\lambda\cos(\theta)+1}d\theta=\frac{\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

Pour $|\zeta|<R$, $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\zeta^n$.

Notons $z=\rho\exp(it)$ avec $0\leqslant\rho<r<R$.

Nous obtenons $\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}=\frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-r\rho\cos(\theta-t)}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}\alpha_n r^n\exp(in\theta)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\rho^2}{r^2}\alpha_n r^n\exp(int)\frac{\exp(in(\theta-t))}{1-2\frac{\rho}{r}\cos(\theta-t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}d\theta\\ &= \frac{r^2-\rho^2}{r^2}\alpha_n r^n\frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n}{1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}\exp(int)=\alpha_n\rho^n\exp(int).\end{aligned}$$

$$\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}|\alpha_n r^n\exp(in\theta)|\leqslant\frac{r+\rho}{r-\rho}|\alpha_n|r^n.$$

La série $\sum\left(\theta\longmapsto\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}\alpha_n\rho^n\exp(in\theta)\in\mathbb{C}\right)$ converge normalement donc pour $|z|<r$, $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|r\exp(i\theta)-z|^2}f(r\exp(i\theta))d\theta$.

Nous retrouvons le résultat précédent.

21. (a) f est impaire, 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La série de Fourier de f converge et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(f)\sin(nx)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin(t)dt=\frac{1}{n}$.

$g_n(x)=S_n(f)(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin(kx)$.

Pour x non congru à 0 modulo 2π,

$g_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\Re e\left(\exp(ix)\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Pour x congru à 0 modulo 2π, $g_n'(x)=n$.

S_n est impaire. Soit $x\in[0,\ \pi]$. g_n est alors strictement croissante sur $\left[\frac{4k\pi}{n},\ \frac{(4k+1)\pi}{n+1}\right]$ et $\left[\frac{4k+2\pi}{n},\ \frac{(4k+3)\pi}{n+1}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\frac{4k+1\pi}{n+1},\ \frac{(4k+2)\pi}{n}\right]$ et $\left[\frac{4k+3\pi}{n+1},\ \frac{(4k+4)\pi}{n}\right]$ avec k entiers tels que les intervalles soient inclus dans $[0,\ \pi]$. Finalement, g_n décroit strictement sur l'intervalle $\left[\frac{(2j+1)\pi}{n+1},\ \frac{(2j+2)\pi}{n}\right]$ et croit strictement sur $\left[\frac{2j\pi}{n},\ \frac{(2j+1)\pi}{n+1}\right]$.

Les minima locaux stricts sont donc obtenus en les points $\frac{2j}{n}\pi$ pour $1\leqslant j\leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)$ et les maxima locaux stricts sont obtenus en les points $\frac{2j+1}{n+1}\pi$ pour $0\leqslant j\leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)$.

(b) Soit $a_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{n+1}$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant E\left(\dfrac{n}{2}\right)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant E\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

$$g_n(a_k) - g_n(a_{k-1}) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} g'(t)dt,\, g_n'(t) = \sum_{j=1}^{n} \cos(jt) = \Re e\left(\sum_{j=1}^{n} \exp(ijt)\right).$$

Comme nous l'avons vu précédemment, nous avons donc, pour $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$,

$$g_n'(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos((n+1)t) + \frac{1}{2}\sin((n+1)t)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&g_n(a_k) - g_n(a_{k-1})\\ &\quad= \frac{1}{2}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left(-1 - \cos((n+1)t) + \sin((n+1)t)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt\\ &\quad= -\frac{\pi}{n+1} + \frac{1}{2}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left(\sin((n+1)t)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt.\end{aligned}$$

Avec le changement de variable défini par $t = \dfrac{x+(2k-1)\pi}{n+1}$ nous obtenons $\displaystyle\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left(\sin((n+1)t)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt$

$$= -\frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+(2l-1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx.$$

$$\begin{aligned}&g_n(a_k) - g_n(a_{k-1})\\ &\quad= -\frac{\pi}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)}\int_0^{2\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx\\ &\quad= \int_0^{\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx\\ &\qquad - \int_0^{\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+2k\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx.\end{aligned}$$

Pour $2k \leqslant n$, $x+(2k-1)\pi \leqslant n\pi$ et $x+2k\pi \leqslant (n+1)\pi$. cotan est décroissante strictement sur $]0,\ \pi]$ donc

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx\\ &\qquad - \int_0^{\pi}\left(\sin(x)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x+2k\pi}{2(n+1)}\right)\right)dx > 0.\end{aligned}$$

Nous obtenons alors $g_n(a_k) - g_n(a_{k-1}) < -\dfrac{\pi}{n+1}$. Les maxima relatifs, sur $[0,\ \pi]$, décroissent. $\dfrac{(2k-1)\pi}{n+1} < \dfrac{2k\pi}{n+1} < \dfrac{2k\pi}{n}$. Nous en déduisons $g_n\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) < g_n\left(\dfrac{2k\pi}{n+1}\right) = g_{n+1}\left(\dfrac{2k\pi}{n+1}\right)$.

Il vient immédiatement pour $j \in \mathbb{N}^*,\ j \leqslant n,\ 2k \leqslant j,\ g_n\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \geqslant g_j\left(\dfrac{2k\pi}{j}\right)$.

En particulier pour $j = 2k+1 \leqslant n$ nous avons $g_n\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \geqslant g_{2k+1}\left(\dfrac{2k\pi}{2k+1}\right)$ c'est-à-dire $g_{2k+1}\left(\pi - \dfrac{\pi}{2k+1}\right) \leqslant g_n\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$.

$$\begin{aligned} g_{2k+1}\left(\pi - \frac{\pi}{2k+1}\right) &= \sum_{j=1}^{2k+1}\left(\frac{(-1)^{j-1}}{j}\sin\left(\frac{j\pi}{2k+1}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\left((-1)^{j-1}\frac{\sin\left(\frac{j\pi}{2k+1}\right)}{\frac{j\pi}{2k+1}}\right). \end{aligned}$$

La dérivée de $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est égale à $t \longmapsto \dfrac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$; elle est négative[6] pour $t \in]0,\ \pi[$ donc $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est décroissante sur $]0,\ \pi[$.

Posons $h(t) = t\cos(t) - \sin(t)$. $h'(t) = -t\sin(t)$. $h'(t) \leqslant 0$ sur $[0,\ \pi]$ donc $h(t) \leqslant 0$ sur $[0,\ \pi]$ d'où la décroissance de $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$.

En séparant les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs et en remarquant que le terme d'indice $2k+1$ est nul nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{2k+1}\left((-1)^{j-1}\frac{\sin\left(\frac{j\pi}{2k+1}\right)}{\frac{j\pi}{2k+1}}\right) = \sum_{p=1}^{k}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{2k+1}\right)}{\frac{(2p-1)\pi}{2k+1}} - \frac{\sin\left(\frac{2p\pi}{2k+1}\right)}{\frac{2p\pi}{2k+1}}\right) \geqslant 0.$$

Nous obtenons donc $g_n\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \geqslant g_{2k+1}\left(\dfrac{2k\pi}{2k+1}\right) \geqslant 0$.

Les minima locaux de g_n sur $[0,\ \pi]$ sont positifs donc g_n est positive sur $[0,\ \pi]$. Nous avons alors $\forall x \in [0,\ \pi],\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

Notons $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0 \\ \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{pour } t \in]0,\ \pi] \end{cases}$. φ est continue décroissante donc $g_n\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) = \dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\varphi\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right) \leqslant \int_0^{\pi}\varphi(t)dt$.

6. La dérivée de $t \longmapsto t\cos(t) - \sin(t)$ est $t \longmapsto -t\sin(t)$ qui est négative sur $]0,\ \pi[$ donc $t \longmapsto t\cos(t) - \sin(t)$ décroit sur $]0,\ \pi[$ et est négative sur $]0,\ \pi[$.
On peut aussi remarquer que sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan(t) \geqslant t$ et sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$, $t\cos(t) - \sin(t) < 0$.

g_n est impaire et 2π-périodique donc $\forall x \in \mathbb{R},\ |g_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Une valeur approchée de cette intégrale est 1,851936.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ car il s'agit d'une somme de Riemann.

Nous avons vu plus haut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ donc pour $t \in]0,\ \pi]$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \frac{\pi - t}{2}$.

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\pi - t}{2} = \frac{\pi}{2}$ qui est "très éloigné" de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

22. Si f est une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x)f(x)$ vérifie les mêmes conditions donc est développable en série de Fourier. Les séries de Fourier de f et g convergent normalement ; les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Nous obtenons donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{a_0 \cos(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx)\cos(x) + b_n \sin(nx)\cos(x)).$$

$$2a_n \cos(nx)\cos(x) + 2b_n \sin(nx)\cos(x)$$
$$= a_n \cos((n+1)x) + a_n \cos((n-1)x) + b_n \sin((n+1)x) + b_n \sin((n-1)x).$$

Compte tenu des convergences absolues des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ nous en déduisons, en posant $b_0 = 0$,

$$g(x) = \frac{a_1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})\cos(nx) + \frac{1}{2}(b_{n+1} + b_{n-1})\sin(nx)\right).$$

La série ainsi définie converge normalement donc il s'agit de la série de Fourier de la fonction dont elle est la somme.

Nous pouvons effectuer une autre démonstration. $a_0(g) = a_1(f)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)dt$$
$$= \frac{1}{2}(a_{n+1}(f) + a_{n-1}(f)).$$

De même, en posant $b_0(f) = 0$, nous avons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\sin((n+1)t) + \sin((n-1)t)dt$$
$$= \frac{1}{2}(b_{n+1}(f) + b_{n-1}(f)).$$

Nous avons donc $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) =$

$$\frac{a_1(f)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} ((a_{n+1}(f) + a_{n-1}(f))\cos(nt) + (b_{n+1}(f) + b_{n-1}(f))\sin(nt)).$$

23. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sin(kx)$ et $A_0 = 0$.

Soient p et q deux entiers ; $1 \leqslant p < q$.

$$\sum_{k=p}^{q} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{x} = \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k}(A_k - A_{k-1})$$
$$= \sum_{k=p}^{q} \frac{A_k}{k} - \sum_{k=p-1}^{q-1} \frac{A_k}{k+1} = \frac{A_q}{q} - \frac{A_{p-1}}{p} + \sum_{k=p}^{q-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) A_k.$$

Pour $x \in]-\pi,\ \pi[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sin(kx) = -\Im m \left(\sum_{k=1}^{n} (-\exp(ix))^k \right)$

$$= \Im m \left(\exp(ix) \frac{1 - (-1)^n \exp(inx)}{1 + \exp(ix)} \right).$$

Si n est pair nous obtenons

$$\Im m \left(\exp(ix) \frac{1 - (-1)^n \exp(inx)}{1 + \exp(ix)} \right) = -\frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Si n est impair nous obtenons

$$\Im m \left(\exp(ix) \frac{1 - (-1)^n \exp(inx)}{1 + \exp(ix)} \right) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Dans les deux cas nous avons $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$. Nous en déduisons

$$\left| \sum_{k=p}^{q} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{x} \right| \leqslant \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \sum_{k=p}^{-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{2}{p \cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

L'inégalité est vraie aussi pour $p = q$.

Soit $a \in [0,\ \pi[$. Pour $x \in [-a,\ a]$ nous avons $\left| \displaystyle\sum_{k=p}^{q} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{x} \right| \leqslant \dfrac{2}{p \cos\left(\frac{a}{2}\right)}$.

Pour $\varepsilon > 0$; soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon \cos\left(\frac{a}{2}\right)}$.

$$\forall (p,\ q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \forall x \in [-a,\ z],\ q \geqslant p \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=p}^{q} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{x} \right| \leqslant \varepsilon.$$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(x \in [-a,\ a] \longmapsto (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{x} \in \mathbb{R} \right)$ converge uniformément et a donc pour somme une fonction continue.

En posant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{x}$, d'après ce que nous venons de voir, $f(x)$ est donc défini sur $[-\pi,\ \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$. pour $x \in]-\pi,\ \pi[$ il existe $a \in]-\pi,\ \pi[$ tel que $[-a,\ a]$ soit un voisinage de x donc f est continue en x. f est donc une fonction impaire, 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ qui est, d'après ce que nous venons de voir, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kx)}{k}$. f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos(kx) = -\ \Re e \left(\sum_{k=1}^{n} (-\exp(ix)) \right)$.

Pour $x \in]-\pi,\ \pi[$ nous avons $f_n'(x) = \ \Re e \left(\exp(ix) \dfrac{1-(-1)^n \exp(inx)}{1+\exp(ix)} \right)$.

Pour n pair, $f_n'(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Pour n impair, $f_n'(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Finalement, $f_n'(x) = \dfrac{1}{2} + (-1)^{n-1} \dfrac{\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ et, pour $|x| < \pi$,

$f_n(x) = \dfrac{x}{2} + (-1)^{n-1} \displaystyle\int_0^x \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$

En intégrant par parties nous avons

$$\int_0^x \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \left[\frac{1}{2n+1} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right]_0^x - \frac{1}{2n+1} \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Il vient alors pour $x \in [0,\ \pi[$,

$$\begin{aligned}\left| \int_0^x \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt \right| &\leqslant \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2n+1} \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \left[\frac{1}{2n+1} \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right]_x^0 \\ &= \frac{1}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

f_n étant impair, l'inégalité est donc vraie pour tout $x \in]-\pi,\ \pi[$. Nous en déduisons immédiatement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{x}{2}$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, nulle en $-\pi$ et en π et pour $x \in]-\pi,\ \pi[$ est définie par $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

Nous pouvons vérifier a-posteriori que ce résultat est exact. Considérons f définie comme précédemment. f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est développable en série de Fourier.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \left[-\frac{x\cos(nx)}{n\pi}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx$$
$$= -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Nous obtenons bien le résultat attendu.

24. g est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En utilisant le théorème de Dirichlet qui se démontre [7] sans utiliser l'approximation des fonctions par des polynômes

7. Rappel de la démonstration.
Montrons tout d'abord le lemme suivant : Soit f une application définie de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\exp(i\lambda t)dt = 0$.
En utilisant le changement de variable $t \longmapsto -t$, le cas $-\infty$ se ramène au cas $+\infty$.
On suppose $a < b$ car sinon le résultat est immédiat.
Supposons que f soit constante, égale à K, sur l'intervalle d'extrémités c et d, avec $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$, nulle dans le complémentaire. $\displaystyle\int_a^b f(t)\exp(i\lambda t)dt = \frac{-iK}{\lambda}(\exp(i\lambda d)-\exp(i\lambda c))$.
$\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\exp(i\lambda t)dt\right| \leqslant \dfrac{2|K|}{\lambda}$. Si f est en escalier, elle est combinaison linéaire d'une famille finie de fonctions analogues à la précédente. Nous avons donc bien dans ce cas $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\exp(i\lambda t)dt = 0$.
Si f est continue par morceaux, f est limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications en escalier.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit f_N telle que $\forall t \in [a,\ b]$, $|f_N(t) - f(t)|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
N étant ainsi fixé, soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda \geqslant A$ on ait $\left|\displaystyle\int_a^b f_N(t)\varepsilon(i\lambda t)dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\left|\int_a^b f(t)\varepsilon(i\lambda t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^b (f(t)-f_N(t))\varepsilon(i\lambda t)dt\right| + \left|\int_a^b f_N(t)\varepsilon(i\lambda t)dt\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(t)-f_N(t)|dt + \left|\int_a^b f_N(t)\varepsilon(i\lambda t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Le résultat est donc démontré.
Supposons f continue par morceaux sur $]a,\ b]$, intégrable sur $]a,\ b]$. Soit $\varepsilon > 0$. f étant intégrable, il existe $\alpha > 0$, $\alpha < b - a$ tel que $\displaystyle\int_a^{a+\alpha} f|(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\int_a^b f(t)\exp(i\lambda t)dt = \int_(a+\alpha)^b f(t)\exp(i\lambda t)dt + \int_a^{a+\alpha} f(t)\exp(i\lambda t)dt.$$

D'après le résultat précédent il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $\lambda \geqslant A$ on ait $\left|\displaystyle\int_{a+\alpha}^b f(t)\exp(i\lambda t)dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\exp(i\lambda t)dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \displaystyle\int_a^{a+\alpha} |f(t)\exp(i\lambda t)|dt \leqslant \varepsilon$. Le résultat est donc encore vrai pour une application continue par morceaux sur un intervalle ouvert quelconque et intégrable sur celui-ci.
Soit f une application continue par morceaux, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique. On suppose,

trigonométriques nous en déduisons que g est développable en série de Fourier ; $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\exp(ikx)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\exp(-int)dt$.

Soit $\sigma = (a_0 = -\pi,\ a_1,\ \cdots,\ a_{p-1},\ a_p = \pi)$ une subdivision de $[-\pi,\ \pi]$ telle que la restriction de g à $[a_i,\ a_{i+1}]$ soit la restriction d'une fonction affine. Pour

---

pour tout x, qu'au voisinage de 0, à droite, $u \longmapsto \dfrac{f(x+u) - f(x+0)}{u}$ et $u \longmapsto \dfrac{f(x-u) - f(x-0)}{u}$ sont bornées. C'est le cas par exemple si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)\sum_{k=-n}^{n}\exp(ik(x-t))\right)dt$.

$\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\exp(ik(x-t))$ définit une fonction continue, 2π-périodique. Pour $x-t$ non congru à 0 modulo 2π nous avons $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\exp(ik(x-t)) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}$.

$$\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}dt.$$

Le changement de variable $t \longmapsto x - t$ conduit à

$$\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt.$$

Nous savons que l'intégrale est la même sur tout intervalle de longueur 2π donc

$$\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt.$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt &= \int_0^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt + \int_{-\pi}^{0} f(x-t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt\\ &= \int_0^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt + \int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt.\end{aligned}$$

Finalement $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi} int_0^{\pi}(f(x-t) + f(x+t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$.

Pour $f = 1$ nous avons $1 = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx) = \frac{1}{\pi} int_0^{\pi}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$.

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx)\\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left((f(x+(0) - f(x+t)) + (f(x-0) - f(x-t))\right)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse faite nous en déduisons que l'application $t \in]0,\ \pi] \longmapsto \dfrac{(f(x+(0) - f(x+t)) + (f(x-0) - f(x-t))}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in \mathbb{C}$ est intégrable donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\exp(ikx)\right) = 0.$$

Le théorème de Dirichlet est démontré.

$x \in [a_j,\ a_{j+1}]$, $j \in \mathbb{N}_{p-1}$,

$g(x) = \alpha_j x + \beta_j = \dfrac{1}{a_{j+1} - a_j}\left((g(a_{j+1}) - g(a_j))x + a_{j+1}g(a_j) - a_j g(a_{j+1})\right)$.

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}\int_{a_j}^{a_{j+1}} g(t)\exp(-int)dt &= \frac{i}{n}\left((\beta_j + \alpha_j a_{j+1})\exp(-ina_{j+1}) - (\beta_j + \alpha_j a_j)\exp(-ina_j)\right)\\ &\quad + \frac{\alpha_j}{n^2}(\exp(-ina_{j+1}) - \exp(-ina_j))\\ &= \frac{i}{n}(g(a_{j+1})\exp(-ina_{j+1}) - g(a_j)\exp(-ina_j)\\ &\quad + \frac{\alpha_j}{n^2}(\exp(-ina_{j+1}) - \exp(-ina_j)).\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\exp(-int)dt &= \frac{i}{n}\sum_{j=0}^{p-1}(g(a_{j+1})\exp(-ina_{j+1}) - g(a_j)\exp(-ina_j))\\ &\quad + \frac{\alpha_j}{n^2}\sum_{j=0}^{p-1}(\exp(-ina_{j+1}) - \exp(-ina_j))\\ &= g(\pi)\exp(-in\pi) - g(-\pi)\exp(i + n\pi)\\ &\quad + \frac{\alpha_j}{n^2}\sum_{j=0}^{p-1}(\exp(-ina_{j+1}) - \exp(-ina_j))\\ &= \frac{\alpha_j}{n^2}\sum_{j=0}^{p-1}(\exp(-ina_{j+1}) - \exp(-ina_j)).\end{aligned}$$

$n^2|c_n(g)|\leqslant 2p\sup_j|\alpha_j|$. La majoration est évidemment vérifiée aussi pour $n = 0$.

Nous en déduisons clairement que les séries $\sum c_n(g)$ et $\sum c_{-n}(g)$ sont absolument convergentes. La série de Fourier de g converge donc normalement vers g.

f définie sur un intervalle fermé borné I est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux. En effet f est uniformément continue donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(x,\ y)$ de points de $I = [a,\ b]$ on ait $|x - y|\leqslant\alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Considérons une subdivision $\sigma = (a_0 = a,\ a_1,\ \cdots,\ a_{p-1},\ a_p = b)$, de I de pas moindre que α. Construisons g continue et affine par morceaux telle que $f(a_j) = g(a_j)$.

Soit $x \in [a_j,\ a_{j+1}]$.

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| &\leqslant |f(x) - f(a_j)| + |f(a_j) - g(x)|\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x - a_j||f(a_{j+1}) - f(a_j)|}{a_{j+1} - a_j}\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que pour toute fonction continue sur l'intervalle fermé borné I, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction g continue, affine par morceaux prenant les mêmes valeurs que f aux extrémités de l'intervalle I de définition et vérifiant $\forall x \in I,\ |f(x) - g(x)|\leqslant\varepsilon$.

Soit f une fonction continue sur $I = [-\pi,\ \pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$

et soit g associée à f et à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ comme précédemment. $g(-\pi)=g(\pi)$ donc g est prolongeable en une application continue 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$. Notons $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g_n(x)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_n(g)\exp(ikx)$. g_n est un polynôme trigonométrique et converge uniformément vers g. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\in\mathbb{N}$ et pour $x\in\mathbb{R}$ on ait $n\geqslant N\Rightarrow |g_n(x)-g(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $x\in[-\pi,\ \pi]$. $|f(x)-g_n(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-g_n(x)|\leqslant\varepsilon$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, sur $[-\pi,\ \pi]$, vers f.

25. Soit f une fonction continue, 2π-périodique définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont les coefficients de Fourier sont nuls. D'après la formule de Parseval,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n(f)|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}|c_{-n}(f)|^2.$$
Avec l'hypothèse faite ici nous avons $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=0$. f étant continue nous en déduisons $f=0$. Finalement deux fonctions continues, 2π-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont les coefficients de Fourier sont égaux sont égales.

26. (a) La fonction f définie sur $]-1,\ 1[$ par $f(x)=\operatorname{atan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\tan(\theta)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. $f'(x)=-\dfrac{\sin(2\theta)}{x^2+2x\cos(2\theta)+1}$.
$$\begin{aligned}-\frac{\sin(2\theta)}{x^2+2x\cos(2\theta)+1}&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x+\exp(2i\theta)}-\frac{1}{x+\exp(-2i\theta)}\right)\\&=\frac{1}{2i}\left(\frac{\exp(-2i\theta)}{1+x\exp(-2i\theta)}-\frac{\exp(2i\theta)}{1+x\exp(2i\theta)}\right).\end{aligned}$$
Pour $|x|<1$ nous avons
$$\frac{\exp(-2i\theta)}{1+x\exp(-2i\theta)}-\frac{\exp(2i\theta)}{1+x\exp(2i\theta)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n(\exp(-2i(n+1)\theta)-\exp(2i(n+1)\theta))$$
Donc $-\dfrac{\sin(2\theta)}{x^2+2x\cos(2\theta)+1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin(2(n+1)\theta)x^n$.
f est donc développable en série entière de rayon de convergence égal à 1 ; $f(0)=\theta$ donc $\forall x\in]-1,\ 1[$ nous avons $f(x)=\theta+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(2n\theta)x^n$.

(b) La fonction g est continue, 2π-périodique. En utilisant le résultat précédent, nous obtenons pour $|\theta|\leqslant\pi$, $g(\theta)=\dfrac{\theta}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n}\sin(n\theta)$.

Notons $\varphi(\theta)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n}\sin(n\theta)$.

$\left|\dfrac{(-1)^nx^n}{n}\sin(n\theta)\right|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n}$. La convergence de la série définissant φ est donc uniforme relativement à θ. De même la convergence de la série des dérivée par rapport à θ est uniforme relativement à θ ; φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Nous en déduisons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\sin(p\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)^n x^n}{n}\sin(n\theta)\sin(p\theta)\right)d\theta.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta)\sin(p\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad p \neq n \\ \dfrac{(-1)^p \pi x^p}{p} & \text{pour} \quad p = n \end{cases}.$$

Nous obtenons donc $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\sin(p\theta) = frac(-1)^p x^p p.$

Nous retrouvons le fait que la série définissant $\varphi(\theta)$ est sa série de Fourier.

La fonction, h, 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $]-\pi,\ \pi[$ est définie par $\theta \longmapsto \dfrac{\theta}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont est développable en série de Fourier. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(h) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \theta\sin(\theta)d\theta$. En intégrant par parties nous obtenons $b_n(h) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Nous en déduisons $\forall \theta \in]-\pi,\ \pi[,\ \dfrac{\theta}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(n\theta)}{n}$ puis

$g(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x^n-1)}{n}\sin(n\theta)$. Cette série est la série de Fourier de g.

Nous déduisons de cela, que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{1-x}{1+x}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin(n\theta)d\theta = \frac{(-1)^n(x^n-1)}{n}.$$

27. (a) $$\begin{aligned} f_0(t+2\pi) - f_0(t) &= \exp\left(i\frac{(t+2\pi)^2}{2m\pi}\right) - \exp\left(i\frac{t^2}{2m\pi}\right) \\ &= \exp\left(i\frac{t^2}{2m}\right)(\exp(2it)-1) = 2i\sin(t)\exp\left(i\frac{t^2}{2m}\right). \end{aligned}$$

Il est immédiat que l'on a $f_0(2\pi) = f_0(0)$.

Par construction, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]2m\pi,\ 2(m+1)\pi[$ avec $m \in \mathbb{Z}$. La limite à droite en $2m\pi$ de f est la limite en 0 de f_0 ; la limite à gauche en $2m\pi$ de f est la limite en 2π de f_0. f_0 est continue et $f_0(0) = f_0(2\pi)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

f_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

f est développable en série de Fourier ; cette série converge normalement.

(b) i. $\dfrac{(2\pi u + mn\pi)^2}{2m\pi} - n(2\pi(u-k) + mn\pi) = \dfrac{2\pi u^2}{m} - \dfrac{mn^2\pi}{2} + 2nk\pi.$

En utilisant le changement de variable $u \longmapsto t = 2\pi(u - k\pi) + mn\pi$ nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-int)\exp\left(i\frac{(t+2k\pi)^2}{2m\pi}\right)dt$$
$$= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}mn^2\right)\int_{k-\frac{mn}{2}}^{k+1-\frac{mn}{2}}\exp\left(\frac{2i\pi}{m}u^2\right)du.$$

Nous en déduisons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-int)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-int)f_0(t)dt$$
$$= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}mn^2\right)\sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{k-\frac{mn}{2}}^{k+1-\frac{mn}{2}}\exp\left(\frac{2i\pi}{m}u^2\right)du\right)$$
$$= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}mn^2\right)\int_{-\frac{mn}{2}}^{m-\frac{mn}{2}}\exp\left(\frac{2i\pi}{m}u^2\right)du.$$

ii. En posant, pour $q \in \mathbb{Z}$,

$u_q = \displaystyle\int_{mq}^{mq+m}\exp\left(2i\frac{\pi}{m}u^2\right)du$, $v_q = \displaystyle\int_{m\left(q-\frac{1}{2}\right)}^{m\left(q+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(2i\frac{\pi}{m}u^2\right)du$ et en utilisant le résultat précédent, il est immédiat que nous avons

$c_{2q} = u_{-q}$, $c_{2q+1} = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}m\right)v_{-q}$.

iii. La convergence normale de la série de Fourier de f provient du fait que les séries $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ sont convergentes puisque[8] f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

$f(t) = c_0(f) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(c_k(f)\exp(ikt) + c_{-k}(f)\exp(-ikt)).$

En séparant, ce qui est faisable car les séries $\sum |c_n(f)|$ et $\sum |c_{-n}(f)|$ sont convergentes, les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs et en remarquant que $c_{-2k-1}(f) = \exp\left(-i\frac{\pi m}{2}\right)v_{1+k}$ nous obtenons

$$f(t) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{-k}(f)\exp(2ikt) + u_k(f)\exp(-2ikt))$$
$$+\exp\left(-i\frac{\pi m}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(v_{-k}(f)\exp(i(2k+1)t) + v_{1+k}(f)\exp(-i(2k+1)t)).$$

8. Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \left[\frac{i}{n}f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{n}\int_0^{2\pi}\exp(-int)f'(t)dt$ (f' désigne ici la fonction égale à la dérivée de f en les points où f est dérivable et n'importe quoi en les points, en nombre fini sur $[0,\ 2\pi]$, où f n'est pas dérivable) ; nous avons donc $nc_n(f) = ic_n(f')$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{k}c_k(f')\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sum_{k=1}^{n}|c_k(f')|^2} \text{ et } \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{-k}c_{-k}(f')\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sum_{k=1}^{n}|c_{-k}(f')|^2}.$$

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes donc les séries $\sum |c_n(f)|$ et $\sum |c_{-n}(f)|$ sont convergentes.

En posant $q = 1 + k$ dans la seconde somme il vient immédiatement

$$f(t) = u_0(f) + \sum_{q=1}^{+\infty}(u_{-q}(f)\exp(2iqt) + u_q(f)\exp(-2iqt))$$

$$+\exp\left(-i\frac{\pi m}{2}\right)\sum_{q=1}^{+\infty}(v_{1-q}(f)\exp(i(2q-1)t)+v_q(f)\exp(-i(2q-1)t)).$$

En particulier

$$f(0)=u_0(f)+\sum_{q=1}^{+\infty}(u_{-q}(f)+u_q(f))+\exp\left(-i\frac{\pi m}{2}\right)\sum_{q=1}^{+\infty}(v_{1-q}(f)+v_q(f)).$$

(c) i. $\varphi\,:\,t\in\mathbb{R}^*\longmapsto\dfrac{\exp(2i\pi y)}{\sqrt{y}}\in\mathbb{C}$ est continue. $\left|\dfrac{\exp(2i\pi y)}{\sqrt{y}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ donc φ est intégrable sur $]0,\ 1]$.

En intégrant par parties nous avons pour $1 < a \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^a \frac{\exp(2i\pi y}{\sqrt{y}}dy = \left[\frac{\exp(2i\pi y)}{2i\pi\sqrt{y}}\right]_1^a + \frac{1}{i\pi}\int_1^a\frac{\exp(2i\pi y)}{y\sqrt{y}}dy.$$

$y\in[1,\ +\infty[\longmapsto\dfrac{\exp(2i\pi y)}{y\sqrt{y}}\in\mathbb{C}$ est continue et a pour module $\dfrac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$ donc est intégrable ; $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{\exp(2i\pi y)}{2i\pi\sqrt{y}}\right]_1^a = \frac{\exp(2i\pi)}{2i\pi}$.

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\exp(2i\pi y}{\sqrt{y}}dy$ est bien convergente. En revanche, φ n'est pas intégrable.

ii. Soient a et b deux réels ; $-a < 0 < b$.

$$\int_{-a}^b \exp(2i\pi x^2)dx = \int_0^a \exp(2i\pi x^2)dx + \int_0^b \exp(2i\pi x^2)dx.$$

En utilisant le changement de variable $x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto y = x^2\in\mathbb{R}_+^*$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, nous obtenons

$$\int_{-a}^b \exp(2i\pi x^2)dx = \int_0^{a^2}\frac{\exp(2i\pi y)}{2\sqrt{y}}dy + \int_0^{b^2}\frac{\exp(2i\pi y)}{2\sqrt{y}}dy.$$

Compte tenu de ce qui a été vu à la question précédente nous en déduisons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(2i\pi x^2)dx$ est convergente et que l'on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(2i\pi x^2)dx = \int_0^{+\infty}\frac{\exp(2i\pi y)}{\sqrt{y}}dy.$

$$\sum_{q=1}^N u_q = \int_m^{m(N+1)}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du,\ \sum_{q=1}^N u_{-q} = \int_{-mN}^0\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du.$$

$$u_0 + \sum_{q=1}^N(u_q + u_{-q}) = \int_{-mN}^{m(N+1)}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du \text{ donc}$$

$$u_0+\sum_{q=1}^{+\infty}(u_q+u_{-q})=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du.$$

$$\sum_{q=1}^{N}v_q=\int_{\frac{m}{2}}^{\frac{m(2N+1)}{2}}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du,\ \sum_{q=1}^{N}v_{1-q}=\int_{\frac{m(1-2N)}{2}}^{\frac{m}{2}}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du.$$

$$\sum_{q=1}^{N}(v_q+v_{1-q}=\int_{\frac{m(1-2N)}{2}}^{\frac{m(2N+1)}{2}}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du \text{ donc}$$

$$\sum_{q=1}^{+\infty}(v_q+v_{1-q}=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du.$$

En utilisant le changement de variable définit par $u=x\sqrt{m}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}f(0)&=\left(1+\exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{2i\pi u^2}{m}\right)du\\&=\sqrt{m}\left(1+\exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(2i\pi x^2\right)dx\\&=\sqrt{m}\left(1+\exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)\right)J.\end{aligned}$$

iii. Pour $m=1$, $\exp\left(\frac{it^2}{2\pi}\right)=(1-i)J$ donc $J=\frac{1+i}{2}\exp\left(\frac{it^2}{2\pi}\right)$.

iv. En conclusion nous obtenons

$$G(m)=\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left(\frac{2i\pi k^2}{m}\right)=\frac{1+i}{2}\exp\left(\frac{it^2}{2\pi}\right)\sqrt{m}\left(1+\exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)\right).$$

28. Posons pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$. Pour $x\in]0,\ 2\pi[$ nous avons $C_n(x)=\Re e\left(\frac{1-\exp(i(n+1)x)}{1-\exp(ix)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et en particulier $|C_n(x)|\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Pour $(p,\ q)\in\mathbb{N}^2,\ 2\leqslant p<q$ nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}&=\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{k\ln(k)}(C_k(x)-C_{k-1}(x))\\&=\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{k\ln(k)}C_k(x)-\sum_{k=p-1}^{q-1}\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}C_k(x)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=p}^{q}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}=\frac{1}{q\ln(q)}C_q(x)-\frac{1}{p\ln(p)}C_{p-1}(x)$$
$$+\sum_{k=p}^{q-1}\left(\frac{1}{k\ln(k)}-\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\right)C_k(x).$$

Finalement nous obtenons $\left|\sum_{k=p}^{q}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}\right|\leqslant\frac{2}{p\ln(p)}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. L'inégalité est vraie aussi pour $p=q\geqslant 2$.

Pour $x\in[a,\ 2\pi-a]\subset]0,\ 2\pi[$ la convergence de la série est donc uniforme. f est donc définie sur $]0,\ 2\pi[$ et y est continue. La série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge[9] f est 2π-périodique donc f est définie sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, continue sur cet ensemble.

$f(2\pi-x)=f(x)$; nous pouvons nous limiter à l'étude de f sur $]0,\ \pi]$.

Soit alors $x\in\left]0,\ \frac{1}{2}\right[$. Soit $N\in\mathbb{N},\ Nx>1$.

Posons $n_0=E\left(\frac{1}{x}\right)$ et $S_N=\sum_{k=2}^{N}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}$.

$S_N=\sum_{k=2}^{n_0}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}+\sum_{k=n_0+1}^{N}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}$.

Notons $S'=\sum_{k=2}^{n_0}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}$ et $S"=\sum_{k=n_0+1}^{N}\frac{\cos(kx)}{k\ln(k)}$.

$|S'|\leqslant\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k\ln(k)}\leqslant\frac{1}{2\ln(2)}+\int_2^{n_0}\frac{dt}{t\ln(t)}=\frac{1}{2\ln(2)}+\ln(\ln(n_0))-\ln(\ln(2))$.

$\ln(n_0)\leqslant\ln\left(\frac{1}{x}\right)=|\ln(x)|$ donc $|S'|\leqslant\frac{1}{2\ln(2)}-\ln(\ln(2))+\ln(|\ln(x)|)$.

En utilisant la transformation d'Abel, qui nous a servi au-dessus, nous obtenons $|S"|\leqslant\frac{2}{(1+n_0)\ln(1+n_0)}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

$\frac{x}{2}\in\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ donc la concavité du sinus sur cet intervalle conduit à $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\frac{x}{\pi}$.

$t\geqslant\frac{1}{e}\longmapsto t\ln(t)\in\mathbb{R}$ est croissante donc puisque $\frac{1}{e}<\frac{1}{x}<n_0+1$ nous avons $(1+n_0)\ln(1+n_0)>\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{|\ln(x)|}{x}$.

Finalement $|S"|\leqslant\frac{2}{(1+n_0)\ln(1+n_0)}\frac{\pi}{x}\leqslant\frac{2}{(\frac{|\ln(x)|}{x})}\frac{\pi}{x}=\frac{2\pi}{|\ln(x)|}$.

$|S_N|\leqslant\frac{1}{2\ln(2)}-\ln(\ln(2))+\ln(|\ln(x)|)+\frac{2\pi}{|\ln(x)|}$ puis

$\forall x\in\left]0,\ \frac{1}{2}\right[,\ |f(x)|\leqslant\frac{1}{2\ln(2)}-\ln(\ln(2))+\ln(|\ln(x)|)+\frac{2\pi}{|\ln(x)|}$.

f est donc intégrable sur $\left]0,\ \frac{1}{2}\right[$ puis, par continuité, sur $]0,\ \pi]$ et enfin sur $]0,\ 2\pi[$.

9. Voir les résultats sur les séries de Bertrand.

Si nous reprenons les calculs précédents, nous avons $n_0x\leqslant 1$ donc pour $2\leqslant k\leqslant n_0$, $\cos(kx)\geqslant\cos(1)$. Nous avons alors

$$S'\geqslant\cos(1)\int_2^{n_0+1}\frac{dt}{t\ln(t)}=\cos(1)(\ln(\ln(n_0+1))-\ln(\ln(2)))$$
$$\geqslant\cos(1)(\ln(|\ln(x)|)-\ln(\ln(2))).$$

Nous obtenons donc

$$S_N\geqslant\cos(1)(\ln(|\ln(x)|)-\ln(\ln(2)))+S"$$
$$\geqslant\cos(1)(\ln(|\ln(x)|)-\ln(\ln(2)))-\frac{2\pi}{|\ln(x)|}.$$

Il vient alors $\forall x\in\left]0,\ \frac{1}{2}\right[,\ f(x)\geqslant\cos(1)(\ln(|\ln(x)|)-\ln(\ln(2)))-\frac{2\pi}{|\ln(x)|}$.

f n'est donc pas bornée.

$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^{2\pi-a}f(x)\cos(nx)dx$. Pour a fixé dans $]0,\ \pi[$ la série de fonctions définissant f converge uniformément sur $[a,\ 2\pi-a]$ donc

$$\int_a^{2\pi-a}f(x)\cos(nx)dx=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{\cos(px)\cos(nx)}{p\ln(p)}dx.$$

$2\cos(px)\cos(nx)=\cos((p+n)x)+\cos((p-n)x)$.

$$v_p(a)=\int_a^{2\pi-a}\cos(px)\cos(nx)dx$$
$$=\begin{cases}\pi-a-\dfrac{1}{4n} & \text{pour } p=n\\[2mm] -\dfrac{1}{n+p}\sin((n+p)a)-\dfrac{1}{n-p}\sin((n-p)a) & \text{pour } p\neq n\end{cases}.$$

Pour $p\geqslant n+1$,

$$v_p(a)\frac{1}{p\ln(p)}=\left(-\frac{1}{n+p}\sin((n+p)a)-\frac{1}{n-p}\sin((n-p)a)\right)\frac{1}{p\ln(p)}\ \text{donc}$$
$$\left|v_p(a)\frac{1}{p\ln(p)}\right|\leqslant\left(\frac{1}{n+p}+\frac{1}{p-n}\right)\frac{1}{p\ln(p)}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{2}{p^2\ln(p)}.$$

La série de fonctions de la variable a converge donc uniformément et nous en déduisons $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\sum_{p=2}^{+\infty}v_p(a)\frac{1}{p\ln(p)}=\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\lim_{a\to 0^+}\left(v_p(a)\frac{1}{p\ln(p)}\right)\right)$.

Nous obtenons donc pour $p\geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{\pi}{n\ln(n)}$, pour $p=0$ ou 1, $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx=0$.

La série de Fourier de f a donc pour somme la fonction f.

Index

Produits infinis, 11, 27

Séries de Bertrand, 9, 34, 42, 70, 115, 251

Théorème de convergence dominée, 1
Transformation d'Abel, 7, 85, 86, 88, 99, 113, 129, 138, 143, 156, 181, 188, 203, 205, 251