Corrigé de quelques exercices de la série d'exercices n°3

Exercice 1 *: Déterminer le domaine de convergence simple, absolue des séries de fonctions suivantes:*

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$

Domaine de convergence absolue $D_{C.A}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x) \text{ converge absolument}\right\}$

Domaine de convergence simple $D_{C.S}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x) \text{ converge simplement}\right\}$

$(convergence\ absolue)\Longrightarrow(convergence\ simple)$. La réciproque est fausse.

$(la$ non $convergence\ simple)\Longrightarrow(la$ non $convergence\ absolue)$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|=|x|$ donc

$$\begin{cases} si\ \ |x|<1\Longrightarrow x\in\,]-1,1[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x) \text{ converge absolument et donc simplement}\\ si\ \ |x|>1\Rightarrow x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x) \text{ ne converge pas absolument et donc}\\ \text{on peut rien dire sur la convergence simple}\\ si\ \ |x|=1\Rightarrow x=\pm1,\ \text{on peut rien dire.}\end{cases}.$$

$si\ |x|>1$: condition nécéssaire de convergence :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n &= \lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}e^{n\ln(|x|)} \qquad \text{pas de conver simple et donc pas de conver absolue si } |x|>1.\\ &= e^{+\infty}=+\infty\neq0\end{aligned}$$

Si $x=1$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(1+n)}{n}\right]^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n=e\neq0$

Pas de convergence simple et donc pas de convergence absolue si $x=1$.
Si $x=-1$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(-1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{(1+n)}{n}\right]^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[1+\frac{1}{n}\right]^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n=\pm e$.
N'existe pas alors pas de convergence simple et donc pas de convergence absolue si $x=1$.

Conclusion :

$$D_{C.A}=D_{C.S}=\,]-1,1[$$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\ \ \forall x\neq-1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right||| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right|$$

donc

$$= \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$$\begin{cases} si \ \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \Rightarrow x > 0, \ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge absolument et donc simplement} \\ si \ \left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1 \Rightarrow x < 0 \ et \ x \neq -1, \ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ ne converge pas absolument} \\ \text{et donc on peut rien dire sur la convergence simple} \\ si \ \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = 1 \Rightarrow x = 0, \text{ on peut rien dire.} \end{cases}$$

$si\ x > 0$: condition nécéssaire de convergence :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}e^{n\ln\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}e^{n\ln\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right|}$$

$$= \pm\infty$$

n'existe pas alors pas de convergence simple et donc pas de convergence absolue si $x < 0\ et\ x \neq -1$.

Si $x = 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

série numérique non absolument convergente mais converge (simplement) par Leibnitz.

Conclusion :

$$D_{C.A} =]0,+\infty[\,,\ D_{C.S} = [0,+\infty[$$

Exercice 2 : *Déterminer le domaine de convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes:*

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xe^{-nx}}{x+n}, x \in \mathbb{R}^+$

Domaine de convergence uniforme $D_{C.U} = \left\{x \in \mathbb{R}/\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge uniformément}\right\}$.

Domaine de convergence normale $D_{C.N} = \left\{x \in \mathbb{R}/\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge normalement}\right\}$

$$(convergence\ normale) \Longrightarrow \begin{cases} (convergence\ uniforme) \\ (convergence\ absolue) \end{cases} \Longrightarrow (convergence\ simple).$$La réciproque est fausse

$(la$ non $convergence\ simple) \Longrightarrow (la$ non $convergence\ uniforme) \Longrightarrow (la$ non $convergence\ normale)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement ssi $|f_n(x)| \leq a_n$ *où* (a_n) est une série numérique convergente.

$$|f_n(x)| = \left|\frac{xe^{-nx}}{x+n}\right| = \frac{xe^{-nx}}{x+n} \leq \frac{xe^{-nx}}{n} \quad , \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $g_n(x) = xe^{-nx}$

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	$0 \nearrow$	$g_n\left(\frac{1}{n}\right)$	$\searrow 0$

$$g_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = (1-nx)e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{n}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{g_n(x)}{n} \leq \frac{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} g_n(x)}{n} = \frac{g_n\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{1}{en^2}$$

terme générale d'une série de Riemann convergente, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}^+$.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

$$\left|\frac{\sin x \sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha},$$ terme générale d'une série de Riemann convergente si $\alpha > 1$.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha \leq 1$, pas de convergence normale. On ne peut rien dire sur la convergence uniforme et simple.

Critère **d'Abel uniforme** : $f_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$ avec $\begin{cases} a_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha} \\ b_n(x) = \sin x \sin nx \end{cases}$

1) $a_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha}$: $\begin{cases} a_n(x) \geq 0, \forall n \geq 1 \\ a_n(x) \text{ est décroissante } \forall n \geq 1 \text{ car } a_n'(x) = -\alpha n^{-\alpha-1} < 0, \forall \alpha > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(x) \text{ converge uniformément vers } a(x) = 0, \forall \alpha > 0 \end{cases}$

2) $b_n(x) = \sin x \sin nx$: $\exists M = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| \leq 2$?

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \sin x \sin kx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2}\left(\cos((k-1)x) - \cos((k+1)x)\right)\right| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|[1 + \cos x - \cos nx - \cos(n+1)]\right| \leq \tfrac{1}{2}\left[|1| + |\cos x| + |\cos nx| + |\cos(n+1)|\right] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[1+1+1+1] = 2
\end{aligned}$$

De 1) et 2) et en vertu du critère d'ABEL, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{n^\alpha}$ converge uniformément et donc simplement si $\alpha \leq 1$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^2}{1+n^3x^4}$

$$\left|\frac{(-1)^n x^2}{1+n^3x^4}\right| = \frac{x^2}{1+n^3x^4} = g_n(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = \sup_{x\in[0,+\infty[} g_n(x) \qquad \text{car } g_n(x) \text{ est paire.}$$

$$g_n'(x) = \frac{2x(1-n^3x^4)}{(1+n^3x^4)^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}$$

x	0		$\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}\right)$	$\searrow$	0

$|f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} g_n(x) = g_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}\right) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ terme générale d'une série de Riemann convergente, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *: Soit la série de fonctions définie par :* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^\alpha e^{-nx}$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$.

1) **1.1.** Si $x \neq 0$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^\alpha e^{-kx} = x^\alpha \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = x^\alpha \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}, \forall n \geq 0.$

$S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^\alpha \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{x^\alpha}{1-e^{-x}}, \forall n \geq 0, \forall x \neq 0.$

1.2. Si $x = 0$, $S(0) = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0.$

D'où $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement $\forall x \geq 0$ vers $S(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{1-e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1) $|x^\alpha e^{-nx}| = x^\alpha e^{-nx} = f_n(x)$.

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}e^{-nx} - nx^\alpha e^{-nx} \\ &= (\alpha - nx)x^{\alpha-1}e^{-nx} = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\alpha}{n}, \alpha > 0 \end{aligned}$$

x	0		$\frac{\alpha}{n}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{\alpha}{n}\right)$	$\searrow$	0

$|f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\geq 0} f_n(x) = f_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \frac{1}{n^\alpha}$ terme général d'une série de Riemann convergente si $\alpha > 1$.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha > 1$.

3) $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Continuité de $S(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} S(x) &= \lim_{x\to0} \frac{x^\alpha}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to0} \frac{x^\alpha}{x} \\ &= \lim_{x\to0} x^{\alpha-1} = \lim_{x\to0} e^{(\alpha-1)\ln x} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha-1>0 \to \alpha>1 \\ 1 & \text{si } \alpha-1=0 \to \alpha=1 \\ +\infty & \text{si } \alpha-1<0 \to \alpha<1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\alpha \leq 1$: $\lim\limits_{x\to 0} S(x) \neq 0 = S(0)$, d'où $S(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^+$ (discontinue en $x_0 = 0$), alors pas de convergence uniforme si $\alpha \leq 1$.

3) $\forall x \in [a, +\infty[\,, a > 0 : |f_n(x)| = |x^\alpha e^{-nx}| \leq a^\alpha e^{-na}$, terme général d'une série géométrique convergente, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[\,, a > 0$.

Exercice 4 *: Calculer les limites suivantes :*

1) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}\right)$

<u>**Convergence unifome sur** $[0, +\infty[$:</u>

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n n^x}\right| = \frac{1}{2^n n^x} = f_n(x)\,, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$f_n'(x) = -\frac{(\ln n)\, n^x}{2^n (n^x)^2} \leq 0, \quad \forall x \in [0, +\infty[\,, \quad \forall n \geq 1,$$

$f_n(x)$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

$|f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = |f_n(0)| = \frac{1}{2^n}$ terme général terme général d'une série géométrique convergente.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, +\infty[$.

D'où $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{2^n n^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(1+x^n)}\right)$

<u>**Convergence unifome sur** $[1, +\infty[$:</u>

$f_n(x) = (-1)^n a_n(x) : a_n(x) = \frac{x^n}{n(1+x^n)}$

$$\begin{cases} a_n(x) > 0, \forall x \in [1, +\infty[\\[2ex] a_n'(x) = \dfrac{n(\ln x)\, x^n (1+x^n) - x^n (1 + x^n + n(\ln x)\, x^n)}{(n(1+x^n))^2} = \dfrac{x^n (n(\ln x) - 1 - x^n)}{(n(1+x^n))^2} \leq 0 \\[2ex] \text{donc } a_n(x) \text{ est décroissante sur } [1, +\infty[\,. \\[2ex] \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(x) = 0, \forall x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement par Leibnitz et de plus $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n(1+x^{n+1})} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.D'où la convergence uniforme de$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $[1, +\infty[$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n\left(1+x^n\right)}\right) &= \sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 1}\left((-1)^n\frac{x^n}{n\left(1+x^n\right)}\right)\\
&= \sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n}\\
&= \frac{1}{2}\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\\
&= -\frac{1}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

Exercice 5 : *Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :*

1) $f(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$

Continuité de $f(x)$:

1. $f_n(x)=\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. $|f_n(x)| = \left|\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$ terme général d'une série de Riemann convergente, d'où $\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

De 1) et 2) et par le théorème sur la continuité des séries de fonctions $f(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de $f(x)$:

3.$f_n(x)=\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. $\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ converge simplement car elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.(d'après 2)
5. $\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

$$\left|f_n'(x)\right| = \left|\frac{1}{n\left(1+n^2x^2\right)}\right| \leq \frac{1}{n}$$ terme général d'une série divergente, d'où $\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$

Convergenc normale sur $]-\infty,-a]\cup]a,+\infty]\,,a>0$:

$$\left|f_n'(x)\right| = \left|\frac{1}{n\left(1+n^2x^2\right)}\right| \leq \frac{1}{n\left(1+n^2a^2\right)} \leq \frac{1}{n^3a^2}$$

terme général d'une série de Riemann convergente, d'où $\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[\,,a>0$

Si $x=0$ $\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}f_n'(0)=\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ pas de convergence simple et donc pas de convergence uniforme.

Conclusion : $f(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]-\infty,-a]\cup]a,+\infty]\,,a>0$.

2) $f(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^x}\right)$

__**Continuité de** $f(x)$ **sur** $]0,+\infty[$:__

Sur $]-\infty,0]$ la série ne converge pas simplement car $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ n'existe pas pour $x\leq 0$

1. $f_n(x)=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
2. $f_n(x)=(-1)^n a_n(x) : a_n(x)=\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$

$$\begin{cases} a_n(x)>0,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\\ a_n'(x)=\dfrac{-xn^{-x}}{1+n^{-x}}\leq 0,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\ \text{ donc } a_n(x) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(x)=0, \forall x\in\,]0,+\infty[\end{cases}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement par Leibniz et de plus $|R_n(x)|\leq|f_{n+1}(x)|=\ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^x}\right)\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.D'où la convergence uniforme de$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $]0,+\infty[$.

De 1) et 2) et par le théorème sur la continuité des séries de fonctions $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

__**Dérivabilité de** $f(x)$ **sur** $]0,+\infty[$:__

3.$f_n(x)=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement car elle converge uniformément sur $]0,+\infty[$.(d'après 2)
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

$$f_n'(x) \quad = \quad (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^x+1}$$

$f_n(x)=(-1)^n a_n(x) : a_n(x)=\frac{\ln n}{n^x+1}$

$$\begin{cases} a_n(x)\geq 0,\ \forall x\in\,]0,+\infty[, \forall n\geq 1 \\ a_n'(x)=\dfrac{n^x+1-xn^x\ln n}{n(1+n^x)^2}\leq 0,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\ \text{ donc } a_n(x) \text{ est décroissante à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(x)=0, \forall x\in\,]0,+\infty[\end{cases}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement par Leibniz et de plus $|R_n(x)|\leq|f_{n+1}(x)|=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x+1}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.D'où la convergence uniforme de$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $]0,+\infty[$

__**Conclusion :**__ $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]0,+\infty[$.