Chapitre 1

Séries numériques

Sommaire

1.1 Généralités

Soit (u_n) une suite de nombres réels, on pose

$$S_0 = u_0,$$
$$S_1 = u_0 + u_1,$$
$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2,$$
$$\ldots$$
$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 1

- La suite $(S_n)_n$ est appelée **suite des sommes partielles**.
- La limite de (S_n) est appelée **série** de terme général u_n.

Notation. Une série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, ou simplement $\sum u_n$.

1.1.1 Convergence

Définition 2 (Convergence)
Si $(S_n)_n$ est convergente vers S, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite **convergente** et

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

est sa somme.

Une série qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Le nombre $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ est appelé le **reste** d'ordre n.

Exemple 1

a) Série géométrique. Le terme général d'une série géométrique est $u_n = ar^n,\ a \neq 0$.

La somme partielle $S_n = \begin{cases} a\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}, & r \neq 1, \\ a\,(n+1)\,, & r = 1. \end{cases}$

La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente si $|r| < 1$ et divergente si $|r| \geq 1$.

Dans le cas de convergence $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{a}{1-r}$.

b) Série harmonique. Le terme général d'une série harmonique est $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente. On écrit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Sa somme partielle est

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente et sa somme $S = 1$.

On écrit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. ■

Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 3

a) La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ n'est suffisante.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum u_n$ est divergente. ■

Définition 4

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente**.

Exemple 2

a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (non grossièrement).

b) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{\pi}{n}$ est grossièrement divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1 \neq 0$. ■

1.1.2 Propriétés

Proposition 5

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les deux séries sont de même nature. En cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.

Corollaire 6

On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ *si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.*

Remarque 7

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. ■

Proposition 8

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = V$ *sont convergentes, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha U + \beta V$.

Exemple 3

Considérons la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}\right)$. Cette série est convergente car les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ convergent. De plus on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}\right) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5. \blacksquare$$

Définition 9 (Critère de Cauchy)

Une série est dite de Cauchy si la suite des sommes partielles est de Cauchy *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N \text{ implique } |S_m - S_n| < \varepsilon,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N \text{ implique } \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon.$$

1.2 Séries à termes positifs

Définition 10

Une série $\sum u_n$ est dite série à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$.

Exemple 4

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-5}{n^2}$ est une série à termes positifs. ■

Proposition 11
Une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée.

1.2.1 Règles de comparaison

Théorème 12 (Règle de comparaison)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
- $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*

Exemple 5
Considérons les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.
On a $0 \leq \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente. ■

Théorème 13 (Règle de comparaison logarithmique)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ***strictement*** *positifs. On suppose que $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

- $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
- $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*

Exemple 6
Étudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ en utilisant la règle de comparaison logarithmique avec la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.
Posons $u_n = \frac{n+2}{3^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+2} = \frac{n+3}{3\,(n+2)} \leq \frac{1}{2} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ est convergente car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ l'est. ■

Théorème 14 (Critère d'équivalence)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ***strictement*** *positifs. On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,\ l \neq 0,\ l \neq +\infty.$$

Alors, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 7

1. Soient les séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ telles que $u_n = \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ et $v_n = \frac{3}{2^n}$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3}$, et comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ l'est aussi.

2. Soient les séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ telles que $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la série harmonique qui est divergente, donc il en est de même de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$. ■

Théorème 15 (Comparaison avec une intégrale)

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une application continue, décroissante et positive.

One pose $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ existe.}$$

Exemple 8

1. Considérons l'application $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.
   On a $\int_1^t \frac{1}{x}dx = \operatorname{Log} t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = +\infty$. Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2. Soit la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. La fonction f est continue, décroissante et positive. On a $\int_1^t f(x)\,dx = \operatorname{Log}\frac{t}{t+1} - \operatorname{Log}\frac{1}{2}$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \operatorname{Log} 2 < +\infty$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est alors convergente. ■

1.2.2 Séries de Riemann

Définition 16
On appelle série de Riemann $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ toute série dont le terme général est de la forme

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha},\ n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que les séries de Riemann sont des séries à termes positifs et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

On conclut que si $\alpha \leq 0$, la série de Riemann est divergente puisque le terme général ne tend pas vers 0.
Si $\alpha = 1$, on obtient la série harmonique qui est divergente elle aussi.

Examinons le cas $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.
Soit la fonction définie par

$$\begin{aligned} f_\alpha : \quad [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^\alpha}. \end{aligned}$$

La fonction f_α est positive, continue et décroissante car la dérivée $f'_\alpha(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$.
On a $\displaystyle\int_1^t f_\alpha(x)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{-\alpha+1} - 1\right)$ et donc

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f_\alpha(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Alors, la série de Riemann est divergente si $0 < \alpha < 1$ et convergente si $\alpha > 1$.

Proposition 17
La série de Riemann $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Exemple 9
Les séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$ sont des séries de Riemann divergentes. ■

Proposition 18 (Règle de Riemann)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- *S'il existe $\alpha > 1$ et $M > 0$ tels que $n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ converge.*
- *S'il existe $\alpha \leq 1$ et $m > 0$ tels que $n^\alpha u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Corollaire 19

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$, $l \neq 0$, $l \neq +\infty$. Alors, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 10

Considérons la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{3}{n^2}} - 1\right)$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \left(e^{\frac{3}{n^2}} - 1\right) = 3$, $\alpha = 2 > 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{3}{n^2}} - 1\right)$ converge. ■

1.2.3 Critère de D'Alembert

Proposition 20

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

- *S'il existe $M \in \mathbb{R}$, $0 < M < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.*
- *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Corollaire 21 (Critère de D'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, posons $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

- *$l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.*
- *$l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.*
- *$l = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exemple 11

1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$.

   Alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ est convergente.

2. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$,

   et par suite la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ est divergente. ■

1.2.4 Critère de Cauchy (ou règle de Cauchy)

Proposition 22

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- *S'il existe $M \in \mathbb{R}$, $0 < M < 1$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq M$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Corollaire 23 (Critère de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, posons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

- *$l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.*
- *$l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.*
- *$l = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exemple 12

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n^p}\right)^n$, avec $a > 0$ et $p > 0$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(a + \dfrac{1}{n^p}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(a + \dfrac{1}{n^p}\right) = a$.

Alors, la série est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a > 1$.

Si $a = 1$, on ne peut rien conclure en utilisant le critère de Cauchy.

Mais on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^p}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^{n^p}\right]^{n^{1-p}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p > 1 \\ e & \text{si } p = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < p < 1 \end{cases}.$$

Le terme général ne tend pas vers zéro, la série est donc divergente. ■

Une question se pose maintenant, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critères de d'Alembert et celui de Cauchy?

La réponse est donnée par la proposition suivante.

Proposition 24

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, alors $l_1 = l_2$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.*

La réciproque du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série converge.

Cet exemple montre que le critère de Cauchy est plus puissant que celui de D'Alembert.

1.2.5 Critère de Raabe-Duhamel

Proposition 25
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=l$.

- $l>1 \Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
- $l<1 \Rightarrow \sum u_n$ *diverge.*
- $l=1$, *on ne peut rien conclure.*

Exemple 13 (Série de Bertrand)
Soit la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha\,(\operatorname{Log} n)^\beta}$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
La série de Bertrand $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha\,(\operatorname{Log} n)^\beta}$

- converge si et seulement si $(\alpha>1$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1))$,
- diverge si et seulement si $(\alpha<1$ ou $(\alpha=1$ et $\beta\leq 1))$.

Preuve. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{n^\alpha\,(\operatorname{Log} n)^\beta}{(n+1)^\alpha\,(\operatorname{Log}\,(n+1))^\beta}\right)$.
Comme $\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\overset{\mathcal{V}(\infty)}{\sim}1-\dfrac{\alpha}{n}$ et $\dfrac{(\operatorname{Log} n)^\beta}{(\operatorname{Log}\,(n+1))^\beta}\overset{\mathcal{V}(\infty)}{\sim}1-\dfrac{\beta}{n\operatorname{Log} n}$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\alpha.$$

Alors, la série est convergente pour $\alpha>1$ et divergente pour $\alpha<1$.
Si $\alpha=1$, on ne peut rien conclure en utilisant le critère de Raabe-Duhamel.
Dans ce cas la démonstration peut être faite à l'aide de règle de comparaison et comparaison avec une intégrale. ■

1.2.6 Critère de Gauss

Proposition 26
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.
S'il existe $\alpha>1$ et $M>0$ tels que $-M\leq n^\alpha\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1+\dfrac{1}{n}\right)\leq M$ *pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Exemple 14
Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$.
Noter que $n!!$ est appelé double factorielle de n, qu'est définie par

$$n!! = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 ... \times n, \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2 \times 4 \times 6 ... \times n, \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Pour $\alpha = 2$ on a

$$\begin{aligned} n^2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n}\right) &= n^2\left(\frac{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2}{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2} - 1 + \frac{1}{n}\right) = n^2\left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - 1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{n(5n+4)}{4(n+1)^2} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est divergente. ■

1.3 Séries à termes quelconques

Définition 27
On appelle série à termes quelconques une série $\sum u_n$ dont les termes peuvent être positifs ou négatifs suivant les valeurs prises par n.

Exemple 15
Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ sont à termes quelconques. ■

1.3.1 Critère d'Abel

Proposition 28 (Critère d'Abel)
Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques. On suppose que $u_n = a_n b_n$, avec b_n strictement positif, telles que :

- *La suite $(b_n)_n$ est décroissante et tend vers 0. ($b_{n+1} \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$).*
- *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$: $p \geq q \Rightarrow |a_q + a_{q+1} + ... + a_p| \leq M$.*

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 16

Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente.

Soit $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. ($u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = a_n b_n$). On a

- La suite $(b_n)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$
- $|a_q + a_{q+1} + ... + a_p| = \left|(-1)^q + (-1)^{q+1} + ... + (-1)^p\right| = 0$ ou $1 \le M = 1.$

Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge. ■

1.3.2 Séries alternées

Définition 29

On appelle série alternée $\sum u_n$ toute série vérifiant la relation $u_n u_{n+1} \le 0$.

Le terme général u_n d'une série alternée s'écrit sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$, avec $v_n \ge 0$.

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $\sum (-1)^n |u_n|$.

Critère de Leibniz

Proposition 30 (Critère de Leibniz)

Soit $\sum u_n$ une série alternée. On suppose que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \le |u_0| \ \ et \ \ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \le |u_{n+1}|\,.$$

Exemple 17

Soit série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ harmonique alternée. ($\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$).

Le général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. La suite $(|u_n|)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0.

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est donc convergente. De plus

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \le |u_0| = 1 \text{ et } \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \le |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}. \ ■$$

1.4 Séries absolument convergentes

Définition 31

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Il est clair que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Proposition 32

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

En d'autres termes : $\sum |u_n|$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Exemple 18

1. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ est convergente, car $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente. ■

Définition 33

Une série $\sum u_n$ est dite **semi-convergente** si elle converge et la série $\sum |u_n|$ est divergente.

Exemple 19

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. ■

1.5 Séries commutativement convergentes

Définition 34

Une série $\sum u_n$ est dite **commutativement convergente** si elle reste convergente par toute permutation de l'ordre de ses termes et sa somme ne change pas.

Proposition 35

Toute série absolument convergente est commutativement convergente.

Les séries semi-convergentes ne sont pas commutativement convergentes.

Exemple 20

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est semi-convergente. (*i.e.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente).

On a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + ...$

Regroupons ses termes de telle sorte que chaque terme positif soit suivi de deux négatifs. Il vient

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}\right) + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

où

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

On a obtenu une autre série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ qu'est convergente et sa somme est

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ... \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ...\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

En réorganisant autrement les termes de la série convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, on a obtenu une série convergente mais pas de même somme. Cela est dû au fait que l'addition d'une infinité de termes n'est pas nécessairement commutative.

En regroupant les termes de cette série d'une autre façon, on peut avoir une série divergente. ∎

Exemple 21

Soit la série alternée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On a la suite $\left(\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)_n$ décroît vers 0. Ceci assure la convergence de la série donnée. Cette série n'est pas absolument convergente car la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergente.

En regroupant les termes de cette série de la façon suivante

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\operatorname{Log}\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\operatorname{Log}\left(\tfrac{n+1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\operatorname{Log}(n+1)-\operatorname{Log} n\right] \\ &= (\operatorname{Log} 2-\operatorname{Log} 1)-(\operatorname{Log} 3-\operatorname{Log} 2)+(\operatorname{Log} 4-\operatorname{Log} 3)+\ldots \\ &= 2\left[\operatorname{Log} 2-\operatorname{Log} 3+\operatorname{Log} 4-\operatorname{Log} 5+\ldots\right] \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\,\operatorname{Log} n,\end{aligned}$$

on obtient une série grossièrement divergente, puisque le terme général ne tend pas vers 0. ■