

Loi normale et approximations

Exercice 1

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

[Correction ▼](#)

[006014]

Exercice 2

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n , numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro i en mm» et Z la variable aléatoire «épaisseur des n plaques en mm». Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z , son espérance et sa variance ?

[Correction ▼](#)

[006015]

Exercice 3

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées ; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n , numérotées de 1 à n en les prenant au hasard. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée) ; quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égale à 3 ? Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3 ?

[Correction ▼](#)

[006016]

Exercice 4

Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.6$ mm et $\sigma = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm». Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6mm.

[Correction ▼](#)

[006017]

Exercice 5

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

[Correction ▼](#)

[006018]

Exercice 6

Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est la loi exacte avec les paramètres éventuels (espérance, variance) et indiquez éventuellement une loi approchée.

1. Nombre annuel d'accidents à un carrefour donné où la probabilité d'accident par jour est estimée à $\frac{4}{365}$.
2. Nombre de garçons dans une famille de 6 enfants ; nombre de filles par jour dans une maternité où naissent en moyenne 30 enfants par jour.
3. Dans un groupe de 21 personnes dont 7 femmes, le nombre de femmes dans une délégation de 6 personnes tirées au hasard.

[Correction ▼](#)

[006019]

Correction de l'exercice 1 ▲

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p = 1 - P[7.97 \leq D \leq 8.03]$. Or $P[7.97 \leq D \leq 8.03] = P[-\frac{0.03}{0.02} \leq \frac{D-8}{0.02} \leq \frac{0.03}{0.02}] = F(1.5) - F(-1.5) = 0.8664$. La proportion de billes rejetées est donc $p = 13.4\%$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm est : $P[X \leq 0.36] = P[\frac{X-0.3}{0.1} \leq 0.6] = 0.726$, soit 72.6%.
La probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm est $P[0.25 \leq X \leq 0.35] = 2F(0.5) - 1 = 0.383$, soit 38.3%.
 2. Pour $n = 20$, la loi de $Z = \sum X_i$ est une loi normale de paramètres : d'espérance $E(Z) = 20m = 6$ et de variance $\text{Var}Z = 20\sigma = 0.2$.
-

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $n = 2000$, la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» est une loi de Poisson de paramètre 2 : alors $P[N \leq 3] = 0.86$.

Remarquons qu'en faisant l'approximation par une loi normale et en employant le théorème central limite, on obtient : $P[N \leq 3] \simeq 0.76$, et avec correction de continuité on obtient $P[N \leq 3] \simeq 0.85$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Par des méthodes analogues on trouve que la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6 mm est 14.3%.

Correction de l'exercice 5 ▲

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X \leq 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{165-m}{\sigma}] = 0.56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15) = 0.5596$.

De même, si $P[X \geq 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{180-m}{\sigma}] = 0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{180-m}{\sigma}] = 0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28) = 0.8997$.

Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$ d'où $\sigma \simeq 13.27$, $m \simeq 163$ cg. Alors, $P[X \geq 182] = P[\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{182-m}{\sigma}] = 1 - F(1.43) = 0.0764$.

Sur 10000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Loi binomiale $B(365; \frac{4}{365})$, approchée par la loi de Poisson de paramètre 4, d'espérance et variance 4.
 2. Loi binomiale $B(6; \frac{1}{2})$, d'espérance 3 et variance $\frac{3}{2}$.
 3. Loi hypergéométrique.
-