§2. Axiomes de probabilités

Solutions du TD no. 2

1. (a) $A \cap B^c$

(b) $(A \cap B^c) \bigcup (B \cap A^c)$

2. (a) $(A \cap B) \cap C^c$ (b) $A \cap (B \cup C)^c$

3. (i) $A = \{F2, F4, F6\}$, $B = \{F2, F3, F5, P1, P2, P3, P5\}$, $C = \{P1, P3, P5\}$.

(ii) (a) $A \cup B = \{F2, F3, F4, F5, F6, P1, P2, P3, P5\}$ (b) $A \cap C = \varnothing$, (c) $B \cap (A \cup C)^c = \{F3, F5\}$

(iii) $A \cap C = \varnothing$

4.

(i)	$\sum p_i > 1$	(ii)	$p_3 < 0$ donc ce n'est pas une probabilité
(iii)	$\sum p_i = 1, p_i \geq 0$	(iv)	$\sum p_i = 1, p_i \geq 0$

5. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, et soit P une probabilité sur Ω. Completer les tableaux suivants:

(i)	$k = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) = \frac{7}{18}$	(ii)	$3k + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{6}$
(iii)	$5k + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{10}$	(iv)	$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} = 1 \Rightarrow k = 10$

6. $P(P) = \dfrac{1}{3}$ et $P(F)=\dfrac{2}{3}$.

7. On pipe un dé de telle sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on jette le dé soit proportionnelle au résultat (par exemple, 6 a une probabilité deux fois plus grande que 3).
Soit A = {nombre pair}, B = {nombre premier}, C = {nombre impair}.

(i) $P(i) = ki, \sum_{i=1}^{6} ki = 21k = 1$ donc $k = \dfrac{1}{21}$ et $P(i) = \dfrac{i}{21}, i = 1, 2, \ldots 6.$

(ii) $P(A) = \dfrac{2+4+6}{21} = \dfrac{12}{21}$, $P(A) = \dfrac{2+3+5}{21} = \dfrac{10}{21}$, et $P(C) = \dfrac{1+3+5}{21} = \dfrac{9}{21}$.

(iii) (a) $P(A \cup B) = P(\Omega - \{1\}) = \dfrac{20}{21}$

(b) $P(B \cap C) = P(\{3, 5\}) = \dfrac{8}{21}$

(c) $P(A \cap B^c) = P(\{4, 6\}) = \dfrac{10}{21}$.

8. Calculer la probabilité p de chacun des événements suivants :

(i) $p = P(\{2, 4, 6\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; (ii) $p = \dfrac{4}{52}$;

(iii) $p = P(\Omega - \{FFF\}) = \dfrac{7}{8}$; (iv) $p = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

9. (a) $7/8$

(b) $3/8$

10. $P[\overline{(A \cup B)}] = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.61 + 0.24 - 0.11) = 0.26 = 26\%$

11. On tire au hasard deux cartes d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité p pour que

(i) $\dfrac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \dfrac{78}{1326} = \dfrac{1}{13}$ (ii) $\dfrac{\binom{13}{1}\binom{13}{1}}{\binom{52}{2}} = \dfrac{169}{1326} = \dfrac{13}{102}$

12. (i) $p = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{120}{455} = \dfrac{24}{91}$; (ii) $p = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{225}{455} = \dfrac{45}{91}$, (iii)$p = 1 - \dfrac{24}{91} = \dfrac{67}{91}$.

13. $P(G \cup M) = P(G) + P(M) - P(GM) = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}$.

14. $P(Y) = \frac{4}{10}$, $P(O) = \frac{8}{10}$ et $P(YO) = \frac{3}{10}$.

(a) $P(YO^c) = P(Y) - P(YO) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

(b) $P(Y^cO) = P(O) - P(YO) = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

(c) $P(Y^cO^c) = P(Y \cup O)^c = 1 - P(Y \cup O) = 1 - \frac{4}{10} - \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

15. Soient A et B des événements tels que $P(A) = \frac{3}{8}, P\left(B\right) = \frac{1}{2}$ et $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{4}$. Calculer:
(i) $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$
(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ et $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
(iii) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$,
(iv) $P(\overline{A}U\overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,
(v) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$,
(vi) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

16. $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ et $P(A \cap B) = 0.1$.

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.3 - 0.1 = 0.8$
(2) $P(AB^c) + P(BA^c) = 0.6 - 0.1 + 0.3 - 0.1 = 0.7$
(3) $P[(A \cap B)^c] = 1 - 0.1 = 0.9$
(4) $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$

17. 1. $P(F) = p_a + p_b + p_c = 0.9$ donc $p_d = 0.1$, $P(E) = p_a + p_d = 0.5$ donc $p_a = 0.4$, $P(G) = p_b + p_d = 0.4$ donc $p_b = 0.3$ et $p_c = 0.2$
2. $P(F) = p_a + p_b + p_c = 0.6$ donc $p_d = 0.4$, $P(E) = p_a + p_d = 0.8$ donc $p_a = 0.4$, $P(G) = p_b + p_d = 0.7$ donc $p_b = 0.3$ mais $p_a + p_b + p_c = 1.1 > 1$ donc c'est impossible de trouver telles probabilités
3. $P(E) = P(F) = P(G) = k$ donc $p_d = 1 - k$,$p_a = p_b = 2k - 1$, $p_c = 2 - 3k$ pour $k \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

18. (a) $P(AB^c) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$
(b) $P(A^cB^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)] = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)P(B^c)$

19. Trouver une expression simple pour les évènements suivants:
(a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c) = E \cup (F \cap F^c) = \varnothing$
(b) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c) = \varnothing$
(c) $(E \cup F) \cap (F \cup G) = F \cup (E \cap G)$.

20. Si $P(E) = 0.9$ et $P(F) = 0.8$, montrer que $P(EF) \geq 0.7$.
$P(E) + P(F) - P(EF) = P(E \cup F) \leq 1$ donc $P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1 = 0.7$

21. Montrer que
1. $P(E) = P(EF \cup EF^c) = P(EF) + P(EF^c)$ donc $P(EF^c) = P(E) - P(EF)$.
2. On pose $X = F \cup G$ donc
$P(E \cup F \cup G) = P(E \cup X) = P(E) + P(X) - P(EX)$
$= P(E) + P(F) + P(G) - P(FG) - P[E \cap (F \cup G)]$
$= P(E) + P(F) + P(G) - P(FG) - P[EF \cup FG)]$
$= P(E) + P(F) + P(G) - P(FG) - P(EF) - P(EG) + P(EFG)$
3. On utilise (2) avec les faits que
$P(EF) = P(EFG) + P(EFG^c)$,
$P(EG) = P(EFG) + P(EF^cG)$,
$P(FG) = P(EFG) + P(E^cFG)$,
$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E^cFG) - P(EF^cG) - P(EFG^c) - 2P(EFG)$.

22. (i) $P(X_1 + X_2 \geq 10 | X_1 = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
(ii) $P(X_1 + X_2 \geq 10 | X_1 = 5$ ou $X_2 = 5) = \frac{3}{11}$

23. (i) $p = P(FFF | X_1 = F) = \frac{1}{4}$
(ii) $p = P(FFF | X_1 = F$ ou $X_2 = F$ ou $X_3 = F) = \frac{1}{7}$

24. On tire au hasard deux des chiffres de 1 à 9. Sachant que la somme obtenue est paire, calculer la probabilité p pour que les deux chiffres soient impairs.

La somme est paires si les deux chiffres sont pairs ou impairs. Il y a 5 chiffres impairs et 4 chiffres pairs. Donc

$$p = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

25. On peut utilise le théorème de multiplication:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_1|A_1A_2) = \frac{12}{16} \times \frac{11}{15} \times \frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

Ou bien les combinaisons
$$\binom{12}{3} \div \binom{16}{3} = \frac{220}{560} = \frac{11}{28}$$

26. $p = \dfrac{13}{52} \cdot \dfrac{12}{51} \cdot \dfrac{11}{50} \cdot \dfrac{10}{49} \cdot \dfrac{9}{48} = \dfrac{33}{66640}$

27. $p = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{6}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{40}$

28. (a) $P(M|C) = \dfrac{P(MC)}{P(C)} = \dfrac{0.1}{0.15} = \frac{2}{3}$

(b) $P(C|M) = \dfrac{P(MC)}{P(M)} = \dfrac{0.1}{0.25} = \frac{2}{5}$

(c) $P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(MC) = 0.25 + 0.15 - 0.1 = 0.3 = \frac{3}{10}$

29. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
(i) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$,
(ii) $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$,
(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$,
(iv) $P(A^c|B^c) = \dfrac{P(A^cB^c)}{P(B^c)} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{8}$,
(v) $P(B^c|A^c)\dfrac{P(A^cB^c)}{P(A^c)} = \frac{5/12}{1/2} = \frac{5}{6}$.

30. $P(X_1 = 6 \text{ ou } X_2 = 6 | X_1 \neq X_2) = \dfrac{11}{30}$

31. (a) $P(D) = P(DH) + P(DF) = P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)$
$= 0.05 \times 0.48 + 0.025 \times 0.52 = 0.037$

(b) $P(H|D) = \dfrac{P(HD)}{P(D)} = \dfrac{P(D|H)P(H)}{P(D)} = \dfrac{0.05 \times 0.48}{0.037} = 0.649$

32. Dans une entreprise, une machine A fabrique 40% des pièces et une machine B en fabrique 60%. La proportion de pièces défectueuses fabriquées par A est de 3% et par B de 2%. On choisit une pièce au hasard.

(a) $P(D) = P(DA) + P(DB) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = 0.03 \times 0.4 + 0.02 \times 0.6$
$= 0.024$

(b) $P(A|D) = \dfrac{P(AD)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0.03 \times 0.4}{0.024} = 0.5$

33. Une armoire contient 10 paires de chaussures et on en tire 8 chaussures au hasard. Quelle est la probabilité:

(a) On a $\binom{20}{8}$ façons de choisir nos 8 chaussures. Puisque on ne veut pas de pairs on choisi 8 chaussures des 10 (gauches/droites) on peut le faire de $\binom{10}{8}$ façons . Dans chaque pair on peut choisir la gauche ou la droite.

Cela nous donne $p = \dfrac{\binom{10}{8}2^8}{\binom{20}{8}} = 0.09$

(b) $p = \dfrac{\binom{10}{1}\binom{9}{6}2^6}{\binom{20}{8}} = 0.4267$