2°année LIC(Math)
Module : Probabilit1

Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Exercice 1 :(4 points).

On note les évènements : U_1 : « tirer de l'urne U_1 »

U_2 : « tirer de l'urne U_2 »

B : « la boule tirée est blanche »

$\{U_1, U_2\}$ forment un système complet

$$P(U_1) = P\{1,2\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(U_2) = P\{3,4,5,6\} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

1. la probabilité de tirer une boule blanche :

$$P(B) = P(U_1)\,P(B/U_1) + P(U_2).P(B/U_2) = \frac{1}{3}.\frac{3}{4} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

2. La probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 :

$$P(U_1/B) = \frac{P(U_1)P(B/U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{4}}{\frac{17}{36}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{17}{36}} = \frac{36}{4.17} = \frac{36}{68} = 0.53$$

Exercice 2 : (5 points)

1. L'ensemble $X(\Omega)$:
   - Si la première boule est blanche, on effectue des tirages sans remise jusqu'à obtention d'une boule blanche : $X(\Omega_1) = \{1,2,3\}$
   - Si la première boule est noire, on effectue des tirages sans remise jusqu'à obtention d'une boule noire : $X(\Omega_2) = \{1,2,3,4,5\}$

   $X(\Omega) = X(\Omega_1) \cup X(\Omega_2)$

2. La loi de probabilité de X :
   Si la première boule est blanche :

$$P(X=1) = P(B_1) = \frac{4}{6}$$

$$P(X=2) = P(N_1 B_2) = \frac{2}{6}.\frac{4}{5}$$

$$P(X=3) = P(N_1 N_2 B_3) = \frac{2}{6}.\frac{1}{5}.\frac{4}{4}$$

On vérifie que $\sum_{x \in X(\Omega_1)} P(X=x) = 1$

Si la première boule est noire :

$$P(X=1)=P(N_1)=\frac{2}{6}$$

$$P(X=2)=P(B_1\,N_2)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}$$

$$P(X=3)=P(B_1\,B_2N_3)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$$

$$P(X=4)=P(B_1\,B_2B_3N_4)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}$$

$$P(X=4)=P(B_1\,B_2B_3B_4N_5)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}$$

On vérifie que $\sum\limits_{x\in X(\Omega_2)} P(X=x)=1$

<u>Exercice 3 : (6 points)</u>

X une variable aléatoire absolument continue, de fonction densité définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\,x^{\frac{1}{\theta}-1} & si\;\;0\le x\le 1\\ 0 & sinon\end{cases}\qquad \text{Avec }\;\theta>0$$

Soit $Y=-\ln X$,

1. $Y(\Omega)=[0+\infty[$

   Car : $0\le x\le 1\Rightarrow -\infty\le \ln x\le 0\Rightarrow y=-\ln x\ge 0$,

2. La loi de la variable aléatoire Y :

   $$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\ln X\le y)=P(\ln X\ge -y)=P\left(X\ge e^{-y}\right)=1-F_X\left(e^{-y}\right)$$

   $$f_Y(y)=\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}=e^{-y}\,f_X\left(e^{-y}\right)=e^{-y}\,\frac{1}{\theta}\left(e^{-y}\right)^{\frac{1}{\theta}-1}=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}$$

   $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\,e^{-\frac{1}{\theta}y} & si\;\;0<y<+\infty\\ 0 & sinon\end{cases}$$

   Y suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\theta}$.

3. $E(X)=\theta.\;\; V(X)=\theta^2$ (d’après les résultats du cours)

<u>Exercice 4 :(3 points)</u>

1. La loi de la variable aléatoire X :

   X suit la loi binomiale $B\left(n\,,\dfrac{1}{10}\right)$

$$P(X=k)=C_n^k\,\frac{1}{10}^k\left(1-\frac{1}{10}\right)^{n-k}\ ,\ k=0,1,\ldots,n$$

2. $P(X=2)$ et $P(X>2)$

Pour $n=10$ **:**

$$P(X=2)=C_{10}^2\,\frac{1}{10}^2\left(1-\frac{1}{10}\right)^8=\frac{10!}{2!\,8!}.\left(\frac{1}{10}\right)^2.\left(\frac{9}{10}\right)^8=\frac{1}{2}.\left(\frac{9}{10}\right)^9$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[P(X=1)+P(X=0)\right]$$

$$=1-[\ C_{10}^1\,\frac{1}{10}^1\left(1-\frac{1}{10}\right)^9+C_{10}^0.\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\ ]$$

$$=1-.\left(\frac{9}{10}\right)^9-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$$

Pour $n=50$: la loi binomiale sera approximée par la loi de poisson de paramètre $n\,p=50.\frac{1}{10}=5$

$$B\left(n\,,\frac{1}{10}\right)\approx P\,(n\,p)=P(5)\ :\ P(X=k)=e^{-5}\,\frac{5^k}{k!},\ \ k\in N$$

$$P(X=2)=e^{-5}\,\frac{5^2}{2!}$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[e^{-5}\,\frac{5^0}{0!}+e^{-5}\,\frac{5^1}{1!}\right]$$

$$=1-6e^{-5}$$

<u>Exercice 5 :(2 points)</u>

X suit la loi normale $N\left(700,20^2\right)$

$Y=\dfrac{X-700}{20}$ suit la loi $N(0,1)$

La probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production, soit acceptée à la cuisson :

$$P(666\leq X\leq 732)=P\left(\frac{666-700}{20}\leq Y\leq\frac{732-700}{20}\right)$$

$$=P(-1.7\leq Y\leq 1.6)=F(1.6)-F(-1.7)$$

$$=F(1.6)-\left[1-F(1.7)\right]=F(1.6)+F(1.7)-1$$

$$=0.9452+0.9554-1=0.9$$